ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 512.577+512.548.2+512.534.2

О ПОЭЛЕМЕНТНОМ ОПИСАНИИ МОНОИДА ВСЕХ ЭНДОМОРФИЗМОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ГРУППОИДА И ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ЭНДОМОРФИЗМОВ ГРУППОИДА[1]

А. В. Литаврин

В работе рассматривается проблема поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов произвольного группоида. Установлено, что данный моноид раскладывается в объединение попарно непересекающихся классов эндоморфизмов; эти классы получают название базовых множеств эндоморфизмов. Такие множества эндоморфизмов группоида G параметризуются отображениями $\gamma : G \to \{1,2\}$, которые в данной работе называются биполярными типами (либо, кратко, типами). Если некоторый эндоморфизм лежит в базовом множестве типа γ, то мы говорим, что этот эндоморфизм имеет тип γ. Таким образом, мы получаем классификацию всех эндоморфизмов фиксированного группоида (биполярную классификацию эндоморфизмов). Выявлена связь между типами эндоморфизмов двух изоморфных группоидов. Базовое множество эндоморфизмов не обязано быть замкнутым относительно композиции. Построены группоиды, в которых некоторые базовые множества замкнуты. Для каждого базового множества строится полугруппа эндоморфизмов, которая в этом базовом множестве содержится. Эти полугруппы в некоторых случаях вырождаются в пустые множества. Приведены примеры группоидов, в которых построенные полугруппы эндоморфизмов непустые. Построенные полугруппы могут быть использованы для исследования проблемы поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов и для изучения структуры моноида всех эндоморфизмов.

Ключевые слова: эндоморфизм группоида, автоморфизм группоида, группоид, базовое множество эндоморфизмов, биполярная классификация эндоморфизмов группоида, монотипные полугруппы эндоморфизмов.

A. V. Litavrin. On an element-by-element description of the monoid of all endomorphisms of an arbitrary groupoid and one classification of endomorphisms of a groupoid.

The problem of element-by-element description of the monoid of all endomorphisms of an arbitrary groupoid is considered. It is established that this monoid is decomposed into a union of pairwise disjoint classes of endomorphisms; these classes are called basic sets of endomorphisms. These sets of endomorphisms of a groupoid G are parameterized by mappings $\gamma : G \to \{1,2\}$, which in this paper are called bipolar types (hereinafter, simply types). If some endomorphism lies in a basic set of type γ, then we say that it has type γ. Thus, we obtain a classification of all endomorphisms of a fixed groupoid (a bipolar classification of endomorphisms). A connection between the types of endomorphisms of two isomorphic groupoids is revealed. The basic set of endomorphisms need not be closed under composition. Groupoids are constructed in which some basic sets are closed. For each basic set, an endomorphism semigroup contained in this basic set is constructed. These semigroups in some cases degenerate into empty sets. Examples of groupoids are given in which the constructed endomorphism semigroups are nonempty. The constructed semigroups can be used to study the problem of element-by-element description of the monoid of all endomorphisms and to study the structure of the monoid of all endomorphisms.

Keywords: groupoid endomorphism, groupoid automorphism, groupoid, basic set of endomorphisms, bipolar classification of groupoid endomorphisms, monotypic endomorphism semigroups.

MSC: 20N02, 20M30

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-143-159

1. Введение

В терминах универсальной алгебры группоидом называют алгебру $G = (G, *)$ с единственной бинарной алгебраической операцией $(*)$ (распространен термин *магма*). Эндоморфизмом

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Красноярском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2022-876).

группоида G называют всякое преобразование α множества G, такое что для любых $x, y \in G$ выполняется равенство $\alpha(x * y) = \alpha(x) * \alpha(y)$. Множество всех эндоморфизмов образует моноид (полугруппу с единицей) относительно композиции в симметрической полугруппе всех преобразований множества G. Обратимые эндоморфизмы называют автоморфизмами, они образуют группу всех автоморфизмов в моноиде всех эндоморфизмов.

В данной работе исследуются эндоморфизмы именно группоида в смысле приведенного выше определения (в сигнатуре группоида). Если группоид удовлетворяет аксиомам моноида, то говорят об эндоморфизмах моноида с соответствующей сигнатурой. Поэтому эндоморфизмы моноида имеют другое определение (появляется условие перехода нейтрального элемента в нейтральный элемент).

В статье рассматривается общая проблема.

Проблема 1. *Для некоторого группоида G требуется привести поэлементное описание моноида всех эндоморфизмов.*

Под поэлементным описанием, естественно, понимается описание эндоморфизмов как преобразований множества G. Имеются разные приемы поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов, например, перечисления или указание общего вида эндоморфизмов (см. [1] и [2]). В случае, когда ставится вопрос об описании группы всех автоморфизмов некоторого группоида, в частности полугруппы, поэлементное описание может быть реализовано с помощью нахождения порождающего множества группы всех автоморфизмов (см., например [3]). Для описания всех эндоморфизмов (или автоморфизмов) группоида часто исследуется действие произвольного эндоморфизма на элементах порождающего множества этого группоида (см., например, [1–3]).

Существует множество исследований эндоморфизмов, и в частности автоморфизмов различных группоидов. Например, в работах [4] и [5] решаются вопросы классификации всех группоидов, обладающих группами автоморфизмов с определенными условиями. В [6] рассмотрены группы автоморфизмов конечно определенных квазигрупп. Эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп исследовались в статье [7] (там же содержатся результаты относительно эндоморфизмов произвольной квазигруппы). В работе [8] представлен анализ полугруппы эндоморфизмов свободных произведений специальных полугрупп.

Проблема 1 для различных матричных полугрупп изучается в работах [9] и [10]. Таким образом, мы видим, что эндоморфизмы различных группоидов (в том числе неполугрупп и неквазигрупп) довольно часто становятся предметом исследований. Это подчеркивает важность и необходимость разработки методов поэлементного и структурного описания моноидов всех эндоморфизмов произвольных группоидов.

К главным результатам настоящей статьи относится теорема 1, дающая разложение моноида всех эндоморфизмов произвольного группоида в объединение (в общем случае бесконечное) попарно непересекающихся множеств специального вида, которые в данной работе получают название *базовых множеств эндоморфизмов* группоида (см. определение 3). Таким образом, моноид всех эндоморфизмов группоида вычислен с точностью до вычисления всех базовых множеств эндоморфизмов данного группоида. Указанный результат может быть полезным как метод исследования проблемы 1 для конкретных группоидов (или классов группоидов). В частности, теорему 1 и ее следствие 1 можно использовать как инструмент поэлементного описания группы всех автоморфизмов некоторого группоида.

Каждое базовое множество эндоморфизмов $D(\gamma)$ группоида G определяется подходящим отображением $\gamma : G \to \{1, 2\}$, данное отображение в рамках статьи получает название *биполярный тип* эндоморфизмов или, кратко, *тип* эндоморфизмов (см. определение 5).

Выяснилось, что базовые множества эндоморфизмов различных типов имеют пустое пересечение (см. теорему 1). Поэтому каждому эндоморфизму $\alpha \in D(\gamma)$ можно присвоить свой тип γ (см. определения 5). Такое присвоение типов приводит к классификации эндоморфизмов данного группоида, которая получает название *биполярной классификации эндоморфизмов.* Биполярная классификация эндоморфизмов является внутренней классификацией, поскольку происходит внутри моноида всех эндоморфизмов рассматриваемого группоида. В биполярной классификации выделим *первый*, *второй* и *смешанный типы* (см. определение 1). Термин *биполярный* становится ясным из определения базового множества эндоморфизмов — множества, являющегося пересечением множеств из двух классов множеств специального вида (см. определение 2).

К основным результатам статьи относится теорема 2, которая раскрывает взаимосвязь между типами эндоморфизмов группоида G и типами эндоморфизмов изоморфного ему группоида G'.

В общем случае базовое множество эндоморфизмов группоида типа γ не замкнуто относительно композиции (см. пример 1 п. г)). При этом для произвольного группоида удается построить полугруппы эндоморфизмов, которые состоят из эндоморфизмов одного типа. Теорема 3 дает моноид $\mathrm{Motend}(A, G)$ эндоморфизмов первого типа, теорема 4 — полугруппу $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ эндоморфизмов второго типа и теорема 5 — полугруппу $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ смешанного типа γ (в последнем случае полугруппа $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ строится для каждого смешанного типа γ). В зависимости от конкретного группоида G полугруппы $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ и $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ могут отсутствовать (вырождаться в пустые множества), а моноид $\mathrm{Motend}(A, G)$ для любого группоида G содержит тождественное преобразование.

Таким образом, теоремы 3–5 могут быть полезны для исследования структуры моноида всех эндоморфизмов конкретного группоида G.

Метод исследования. Главным инструментом исследования произвольного группоида $G = (G, *)$ в данной работе становятся хорошо известные *внутренние левые сдвиги* h_x (или просто левые сдвиги), где $x \in G$, т. е. преобразования h_x из симметрической полугруппы $I(G)$ преобразований множества G такие, что для любых $x, y \in G$ выполняется равенство $x * y = h_x(y)$. В силу отсутствия дополнительных условий на группоид G семейство преобразований $\{h_x\}_{x \in G} \subseteq I(G)$ рассматривается просто как семейство произвольных преобразований, элементы которого могут совпадать, а их композиция не обязана лежать в данном семействе преобразований. При этом следует подчеркнуть, что для получения основных результатов активно использовалось свойство ассоциативности преобразований из симметрической полугруппы $I(G)$.

2. Теорема про базовые множества эндоморфизмов

Обозначения, связанные с симметрической полугруппой и эндоморфизмами. Симметрическую полугруппу всех преобразований множества G будем обозначать символом $I(G)$. Если α_1, α_2 — преобразование из $I(G)$, то их композицию $(\cdot)$ будем определять равенством

$$(\alpha_1 \cdot \alpha_2)(x) = \alpha_1(\alpha_2(x))$$

для любого $x \in G$. В предлагаемом исследовании эндоморфизмы и их композиции специальных обозначений не имеют и рассматриваются в обозначениях симметрической полугруппы.

Пусть $G = (G, *)$ — некоторый группоид. Для всякого $x \in G$ через h_x будем обозначать преобразование множества G такое, что для любого $y \in G$ выполняется равенство $h_x(y) = x * y$. Поскольку $(*)$ — замкнутая операция в G, то для любого $x \in G$ преобразование h_x лежит в симметрической полугруппе $I(G)$. Преобразование h_x является внутренним левым сдвигом группоида G (далее — левый сдвиг, соответствующий элементу x).

О п р е д е л е н и е 1. Через $\mathrm{Bte}(G)$ обозначим множество всевозможных однозначных отображений множества G в множество $\{1, 2\}$.

Отображения из данного множества будем называть *биполярными типами эндоморфизмов* группоида G (или, кратко, *типами*). Если $\gamma \in \mathrm{Bte}(G)$ и для любого $g \in G$ выполняется равенство $\gamma(g) = 1$ (аналогично $\gamma(g) = 2$), то отображение γ будем называть *первым типом* (аналогично *вторым типом*). В данной работе первый тип будем обозначать через A, а второй тип — через Ω. Если отображение $\gamma \in \mathrm{Bte}(G)$ не является постоянной на элементах из G, то отображение γ будем называть *смешанным типом.*

Обозначение $\mathrm{Bte}(G)$ возникает как аббревиатура *Bipolar type of endomorphism.* Связь с эндоморфизмами выявится в теореме 1.

Как обычно, централизатор преобразования α в симметрической полугруппе $I(G)$ будем обозначать символом
$$C(\alpha) := \{\beta \in I(X) \mid \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha\}.$$

О п р е д е л е н и е 2. Для всякого $s \in G$ определим множества
$$L^{(1)}(s) := \{\alpha \in C(h_s) \mid h_{\alpha(s)} = h_s\},$$
$$L^{(2)}(s) := \{\alpha \in I(G) \mid h_{\alpha(s)} \neq h_s, \quad \alpha \cdot h_s = h_{\alpha(s)} \cdot \alpha\}.$$

Отметим, что для любого $s \in G$ множество $L^{(1)}(s)$ не пусто, так как всегда содержит тождественное преобразование. Множество $L^{(2)}(s)$ может быть пустым. Очевидно, что при любом $s \in G$ множества $L^{(1)}(s)$ и $L^{(2)}(s)$ имеют пустое пересечение. Последнее вытекает из условий, которыми определяются данные множества.

Из определения множеств $L^{(1)}(s)$ и $L^{(2)}(s)$ видно, что их объединение есть множество всех решений уравнения $\alpha \cdot h_s = h_{\alpha(s)} \cdot \alpha$ относительно преобразования α. В доказательстве теоремы 1 будет выявлена простая связь этого уравнения с определением эндоморфизма.

О п р е д е л е н и е 3. Для всякого $\gamma \in \mathrm{Bte}(G)$ определим множество
$$D(\gamma) := \bigcap_{s \in G} L^{(\gamma(s))}(s).$$

Множество $D(\gamma)$ будем называть *базовым множеством эндоморфизмов типа* γ (то, что данные множества состоят из эндоморфизмов, будет доказано в теореме 1). В частности, имеют место равенства
$$D(A) = \bigcap_{s \in G} L^{(1)}(s), \quad D(\Omega) = \bigcap_{s \in G} L^{(2)}(s).$$

Теорема 1. *Для всякого группоида G справедливо*
$$\mathrm{End}(G) = \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Bte}(G)} D(\gamma). \tag{2.1}$$

Кроме того, если τ и ω — два различных типа из $\mathrm{Bte}(G)$*, то пересечение множеств $D(\tau)$ и $D(\omega)$ пусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем, что α — некоторый эндоморфизм группоида G. Это событие, в силу определения эндоморфизма группоида, возможно тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in G$ выполняется соотношение
$$\alpha(x * y) = \alpha(x) * \alpha(y). \tag{2.2}$$

Запишем левую и правую части тождества (2.2) с помощью левых сдвигов:
$$\alpha(x * y) = \alpha(h_x(y)), \quad \alpha(x) * \alpha(y) = h_{\alpha(x)}(\alpha(y)).$$

Таким образом, преобразование $\alpha \in I(G)$ является эндоморфизмом тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in G$ справедливо
$$\alpha(h_x(y)) = h_{\alpha(x)}(\alpha(y)). \tag{2.3}$$

Условия (2.3) равносильны тому, что для любого $x \in G$ верны преобразования

$$\alpha \cdot h_x = h_{\alpha(x)} \cdot \alpha. \tag{2.4}$$

Далее покажем, что выполняется равенство множеств

$$\mathrm{End}(G) = \bigcap_{s \in G} (L^{(1)}(s) \cup L^{(2)}(s)). \tag{2.5}$$

Пусть α — преобразование из правой части равенства (2.5). Убедимся, что $\alpha \in \mathrm{End}(G)$. В самом деле, если осуществляется включение α в множество из правой части равенства (2.5), то для любого $s \in G$ имеем $\alpha \in W(s) := (L^{(1)}(s) \cup L^{(2)}(s))$. Следовательно, имеет место хотя бы одно из включений $\alpha \in L^{(1)}(s)$ или $\alpha \in L^{(2)}(s)$. Если включение $\alpha \in L^{(1)}(s)$ истинно, то выводим равенство $h_{\alpha(s)} = h_s$, преобразование α лежит в $C(h_s)$ и справедливы импликации

$$\alpha \cdot h_s = \alpha \cdot h_s \Rightarrow \alpha \cdot h_s = h_s \cdot \alpha \Rightarrow \alpha \cdot h_s = h_{\alpha(s)} \cdot \alpha.$$

В этом случае равенство (2.4) превращается в тождество для элемента $x = s$. Если $\alpha \in L^{(2)}(s)$, то мы получаем равенство $\alpha \cdot h_s = h_{\alpha(s)} \cdot \alpha$. В последнем случае равенство (2.4) выполняется для элемента $x = s$.

Поскольку включение α в $W(s)$ справедливо для любого $s \in G$, то α удовлетворяет равенству (2.4) для любого $x \in G$. Отсюда вытекает $\alpha \in \mathrm{End}(G)$.

Мы доказали, что множество из правой части равенства (2.5) является подмножеством из левой части этого равенства. Далее покажем обратное включение.

Пусть теперь α — произвольный эндоморфизм из $\mathrm{End}(G)$. Тогда для любого $x \in G$ верно равенство (2.4). Зафиксируем произвольный элемент s из G. Тогда либо $h_{\alpha(s)} = h_s$ либо $h_{\alpha(s)} \neq h_s$.

Если $h_{\alpha(s)} = h_s$, то справедливы тождества $\alpha \cdot h_s = h_{\alpha(s)} \cdot \alpha,\ \alpha \cdot h_s = h_s \cdot \alpha$, следовательно, $\alpha \in C(h_s)$. Таким образом, получаем вхождение α в $L^{(1)}(s)$.

В случае, когда $h_{\alpha(s)} \neq h_s$, также справедливо тождество $\alpha \cdot h_s = h_{\alpha(s)} \cdot \alpha$. Отсюда находим включение $\alpha \in L^{(2)}(s)$.

Из сказанного выше получаем, что множество $W(s)$ содержит эндоморфизм α.

Поскольку равенство (2.4) выполняется для любых $x \in G$, то эндоморфизм α лежит в $W(s)$ при любом s из G. Соответственно, эндоморфизм α лежит в множестве из правой части равенства (2.5). Итак, мы показали, что справедливо соотношение (2.5).

Теперь убедимся, что выполняется равенство (2.1). Полагаем, что $\alpha \in \mathrm{End}(G)$, следовательно, $\alpha \in W(s)$ при любом $s \in G$. Значит, для любого $s \in G$ преобразование α лежит в множестве $L^{(1)}(s)$ либо в множестве $L^{(2)}(s)$ (напомним, пересечение этих множеств пусто). Таким образом, для любого элемента $s \in G$ можно задать число $d_\alpha(s) \in \{1, 2\}$, которое определяется эквиваленциями

$$d_\alpha(s) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in L^{(1)}(s), \quad d_\alpha(s) = 2 \Leftrightarrow \alpha \in L^{(2)}(s).$$

Для каждого фиксированного α числа $d_\alpha(s)$ (при различных $s \in G$) определяют отображение из $\mathrm{Bte}(G)$. В силу определения отображения $d_\alpha \colon G \to \{1, 2\}$ получаем, что эндоморфизм α лежит сразу во всех множествах семейства множеств $\{L^{(d_\alpha(s))}(s)\}_{s \in G}$, следовательно, $D(d_\alpha)$ содержит α. Как и требовалось, мы показали включение

$$\mathrm{End}(G) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Bte}(G)} D(\gamma).$$

Докажем, что последнее включение выполняется и в обратную сторону. Пусть преобразование α принадлежит объединению из правой части равенства (2.1). Соответственно, включение $\alpha \in D(\gamma_0)$ верно для некоторого фиксированного типа $\gamma_0 \in \mathrm{Bte}(G)$. Значит, по определению множеств $D(\gamma)$ преобразование α лежит в множестве $L^{(\gamma_0(s))}(s)$ для любого $s \in G$, следовательно, преобразование α принадлежит множеству $W(s)$ при любом s из G. Отсюда, в силу тождества (2.5) получаем $\alpha \in \mathrm{End}(G)$. Включение в обратную сторону доказано. Таким образом, мы показали равенство (2.1).

Наконец, покажем, что пересечение базовых множеств $D(\tau)$ и $D(\omega)$ пусто, если типы τ и ω различны. Полагаем, что $D(\tau)$ содержит некоторый эндоморфизм α и для фиксированного элемента s из G выполняются соотношения $\tau(s) = 1$, $\omega(s) = 2$. Поскольку эндоморфизм α находится в множестве $D(\tau)$, то имеет место включение $\alpha \in L^{(1)}(s)$. Множества $L^{(1)}(s)$ и $L^{(2)}(s)$ имеют пустое пересечение, следовательно, $L^{(2)}(s)$ не содержит эндоморфизм α. При этом $D(\omega) \subseteq L^{(2)}(s)$; как итог, получаем условие $\alpha \notin D(\omega)$.

Теорема доказана.

Множество всех перестановок множества X будем обозначать символом $S(X)$.

Определение 4. Множество $D_a(\gamma) := S(G) \cap D(\gamma)$ будем называть *базовым множеством автоморфизмов типа* γ группоида G.

Поскольку произвольный эндоморфизм группоида G является автоморфизмом этого группоида тогда и только тогда, когда он обратим, то получаем следующее

Следствие 1. *Множество всех автоморфизмов всякого группоида является объединением всевозможных базовых множеств автоморфизмов данного группоида. Базовые множества автоморфизмов группоида различных типов имеют пустое пересечение.*

Замечание 1. Таким образом, множество всех эндоморфизмов является объединением всевозможных базовых множеств эндоморфизмов. Отметим, что тождественное преобразование ε лежит в базовом множестве $D(A)$ эндоморфизмов первого типа. В зависимости от группоида G некоторые базовые множества могут быть пустыми (см. пример 1, п. a)). Если G — моноид, то $D(A) = \{\varepsilon\}$. Действительно, из определения множеств $L^{(1)}(g)$ легко увидеть, что $D(A) = \{\varepsilon\}$, когда все элементы семейства левых сдвигов $\{h_x\}_{x\in G}$ различны. Когда G — моноид, последнее условие выполняется. Обратное, разумеется, не верно, можно построить пример, когда все левые сдвиги различны, но группоид G не содержит единицы.

Замечание 2. В случае, когда дан конкретный конечный группоид G, мы можем явно выписать все левые сдвиги $\{h_x\}_{x\in G}$ и вопрос вычисления базовых множеств эндоморфизмов сведется к вычислению множеств преобразований $L^{(1)}(s)$, $L^{(2)}(s)$ и нахождению их пересечений. Из определения ясно, что вычисление множества $L^{(1)}(s)$ — это, по сути, выделение из централизатора $C(h_s)$ преобразований α, которые удовлетворяют равенству $h_s = h_{\alpha(s)}$. Нахождение централизатора конкретного преобразования конечного множества не вызывает принципиальных технических сложностей (например, его можно найти с помощью матричных представлений преобразования и систем линейных алгебраических уравнений с дополнительными условиями). Аналогично не является принципиально технически сложным нахождение множества $L^{(2)}(s)$. Главной технической проблемой здесь становится объем вычислений.

Построим *биполярную классификацию эндоморфизмов* произвольного группоида G.

Определение 5. Эндоморфизм α группоида G будем называть *эндоморфизмом первого (второго) типа*, если α лежит в базовом множестве эндоморфизмов первого (второго) типа.

Если эндоморфизм α лежит в базовом множестве эндоморфизмов смешанного типа, то будем говорить, что α является *эндоморфизмом смешанного типа*.

Более детально будем говорить, что эндоморфизм α имеет тип γ из $\mathrm{Bte}(G)$, если выполняется включение $\alpha \in D(\gamma)$.

3. Типы эндоморфизмов пары изоморфных группоидов

В данном разделе исследуется, как между собой связаны типы эндоморфизмов из моноидов $\mathrm{End}(G)$ и $\mathrm{End}(G')$, когда группоиды G и G' изоморфны. Основной результат раздела представлен в виде теоремы 2.

Хорошо известно, что моноиды эндоморфизмов изоморфных группоидов также изоморфны. Для формулировки результата нам потребуется описать конкретный изоморфизм моноидов эндоморфизмов, индуцированный некоторым изоморфизмом соответствующих группоидов (а именно описать как явное отображение).

Пусть $G = (G, *)$ и $G' = (G', *')$ — два изоморфных группоида и отображение $\zeta : G \to G'$ осуществляет их изоморфизм (данных обозначений мы придерживаемся во всем разделе).

Каждому преобразованию $\alpha \in I(G)$ поставим в соответствие преобразование $\alpha' \in I(G')$, заданное равенством

$$\alpha' = \zeta \cdot \alpha \cdot \zeta^{-1}. \tag{3.1}$$

С каждым изоморфизмом ζ группоидов G и G' будем ассоциировать следующее отображение $\zeta_e \colon \mathrm{End}(G) \to \mathrm{End}(G')$, которое вытекает из правила $\zeta_e(\alpha) = \alpha'$, где $\alpha \in \mathrm{End}(G)$ и эндоморфизм α' группоида G' определен соотношением (3.1).

Далее в утверждениях мы будем использовать отображения $(')$ и ζ_e. Композицию преобразований в полугруппах $I(G)$ и $I(G')$ будем обозначать одним символом $(\cdot)$. Нетрудно показать, что отображения $(') : \ I(G) \to I(G')$ и $\zeta_e \colon \mathrm{End}(G) \to \mathrm{End}(G')$ — изоморфизмы соответствующих моноидов.

Левые сдвиги элементов группоида G обозначаем как обычно (т. е. h_x), а левые сдвиги элементов группоида G' — через $\tilde{h}_x$, где $x \in G'$.

Лемма 1. *Пусть отображение $\zeta : G \to G'$ является изоморфизмом группоидов G и G'. Тогда для любых элементов $x, y \in G$ выполняются соотношения*

$$(h_x)'(\zeta(y)) = \zeta(h_x(y)) = \tilde{h}_{\zeta(x)}(\zeta(y)),$$

где $\tilde{h}_{\zeta(x)}$ — левый сдвиг элемента $\zeta(x)$ в группоиде G' и $(h_x)'(\zeta(y))$ — отображение, определенное равенством (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.1) получаем равенство $(h_x)'(\zeta(y)) = \zeta(h_x(y))$. С другой стороны, для любых $x, y \in G$ имеет место тождество $\zeta(x * y) = \zeta(x) *' \zeta(y)$, которое приводит к соотношениям $\zeta(x * y) = \zeta(h_x(y))$, $\ \zeta(x) *' \zeta(y) = \tilde{h}_{\zeta(x)}(\zeta(y))$, $\zeta(h_x(y)) = h'_{\zeta(x)}(\zeta(y))$, где $\tilde{h}_{\zeta(x)}$ — левый сдвиг элемента $\zeta(x)$ в группоиде G'.

Таким образом, для любого $x, y \in G$ верны равенства $(h_x)'(\zeta(y)) = \zeta(h_x(y)) = \tilde{h}_{\zeta(x)}(\zeta(y))$.

Лемма доказана.

Пусть α — эндоморфизм группоида G. Тогда символом γ_α будем обозначать тип эндоморфизма α.

Теорема 2. *Пусть $\zeta : G \to G'$ — изоморфизм группоидов G и G'. Тогда для любого $g \in G$ и всякого $\alpha \in \mathrm{End}(G)$ справедливо равенство*

$$\gamma_{\alpha'}(\zeta(g)) = \gamma_\alpha(g),$$

где $\alpha' = \zeta_e(\alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем, что эндоморфизм $\alpha \in \mathrm{End}(G)$ удовлетворяет включению $\alpha \in L^{(1)}(g)$ для некоторого $g \in G$, т. е. выполняется равенство $\gamma_\alpha(g) = 1$. Покажем, что эндоморфизм $\alpha' = \zeta_e(\alpha)$ группоида G' удовлетворяет включению $\alpha' \in L^{(1)}(\zeta(g))$, где $L^{(1)}(\zeta(g)) \subseteq I(G')$.

Поскольку $\alpha \in L^{(1)}(g)$, то справедливы соотношения

$$h_g = h_{\alpha(g)}, \quad \alpha \cdot h_g = h_{\alpha(g)} \cdot \alpha. \tag{3.2}$$

Применяя к первому равенству из (3.2) операцию $(')$ и учитывая лемму 1, получаем

$$(h_g)' = \tilde{h}_{\zeta(g)}, \quad (h_{\alpha(g)})' = \tilde{h}_{\zeta(\alpha(g))}, \quad \tilde{h}_{\zeta(g)} = \tilde{h}_{\zeta(\alpha(g))}. \tag{3.3}$$

Применяя операцию $(')$ ко второму равенству из (3.2), выводим

$$(\alpha \cdot h_g)' = \alpha' \cdot (h_g)' = \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(g)}, \quad (h_{\alpha(g)} \cdot \alpha)' = (h_{\alpha(g)})' \cdot \alpha' = \tilde{h}_{\zeta(\alpha(g))} \cdot \alpha', \tag{3.4}$$

$$\alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(g)} = \tilde{h}_{\zeta(\alpha(g))} \cdot \alpha'.$$

Таким образом, соотношения (3.3) и (3.4) дают равенства

$$\tilde{h}_{\zeta(g)} = \tilde{h}_{\zeta(\alpha(g))}, \quad \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(g)} = \tilde{h}_{\zeta(\alpha(g))} \cdot \alpha'.$$

Далее, имеем равенство $\zeta(\alpha(g)) = \alpha'(\zeta(g))$ (см. (3.1)), следовательно, получаем соотношения

$$\tilde{h}_{\zeta(g)} = \tilde{h}_{\alpha'(\zeta(g))}, \quad \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(g)} = \tilde{h}_{\alpha'(\zeta(g)))} \cdot \alpha'.$$

Таким образом, мы показали, что $\alpha' \in L^{(1)}(\zeta(g))$. Значит, верно равенство $\gamma_{\alpha'}(\zeta(g)) = 1$. Из того, что $\alpha \in L^{(1)}(g)$ вытекает $\alpha' \in L^{(1)}(\zeta(g))$. Поэтому для любого $g \in G$ и для любого $\alpha \in \mathrm{End}(G)$ справедлива импликация

$$\gamma_\alpha(g) = 1 \ \Rightarrow \ \gamma_{\alpha'}(\zeta(g)) = 1. \tag{3.5}$$

Теперь полагаем, что эндоморфизм $\alpha \in \mathrm{End}(G)$ удовлетворяет включению $\alpha \in L^{(2)}(g)$ для некоторого $g \in G$ (т.е. $\gamma_\alpha(g) = 2$). Поскольку $\alpha \in L^{(2)}(g)$, то выполняются соотношения

$$h_g \neq h_{\alpha(g)}, \quad \alpha \cdot h_g = h_{\alpha(g)} \cdot \alpha. \tag{3.6}$$

Применяя к неравенству из (3.6) операцию $(')$ и учитывая лемму 1, получаем

$$(h_g)' = \tilde{h}_{\zeta(g)},\ (h_{\alpha(g)})' = \tilde{h}_{\zeta(\alpha(g))},\ \tilde{h}_{\zeta(g)} \neq \tilde{h}_{\zeta(\alpha(g))}. \tag{3.7}$$

Действительно, поскольку $(')$ — изоморфизм, то различным прообразам соответствуют различные образы.

Применяя операцию $(')$ к равенству из (3.6), очевидно, приходим к равенствам (3.4). Соотношения (3.7) и (3.4) дают условия

$$\tilde{h}_{\zeta(g)} \neq \tilde{h}_{\zeta(\alpha(g))}, \quad \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(g)} = \tilde{h}_{\zeta(\alpha(g))} \cdot \alpha'.$$

Далее, имеем $\zeta(\alpha(g)) = \alpha'(\zeta(g))$, следовательно, получаем

$$\tilde{h}_{\zeta(g)} \neq \tilde{h}_{\alpha'(\zeta(g))}, \quad \alpha' \cdot \tilde{h}_{\zeta(g)} = \tilde{h}_{\alpha'(\zeta(g)))} \cdot \alpha'.$$

Таким образом, мы показали, что $\alpha' \in L^{(2)}(\zeta(g))$. Значит, верно равенство $\gamma_{\alpha'}(\zeta(g)) = 2$. Поэтому для любого $g \in G$ и для любого $\alpha \in \mathrm{End}(G)$ справедлива импликация

$$\gamma_\alpha(g) = 2 \ \Rightarrow \ \gamma_{\alpha'}(\zeta(g)) = 2. \tag{3.8}$$

Поскольку импликации (3.5) и (3.8) имеют место для любого $g \in G$ и всякого эндоморфизма $\alpha \in \mathrm{End}(G)$, то выполняется утверждение этой теоремы.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 2. *Пусть $\zeta : G \to G'$ — изоморфизм группоидов G и G'. Тогда для любого $g' \in G'$ и всякого $\alpha \in \mathrm{End}(G)$ справедливо равенство*

$$\gamma_{\alpha'}(g') = \gamma_\alpha(\zeta^{-1}(g')),$$

где $\alpha' = \zeta_e(\alpha)$.

4. Специальный моноид эндоморфизмов первого типа

Пусть G — некоторый группоид. Как и раньше, $C(\alpha)$ — централизатор преобразования α в симметрической полугруппе G. Для каждого элемента $g \in G$ определим следующие множества:

$$M_g := \{m \in G \mid h_g = h_m\}, \quad O_g := \{\alpha \in I(G) \mid \alpha(M_g) \subseteq M_g\}.$$

Отметим, что множество M_g всегда непустое (там всегда содержится элемент g). Введем множество

$$\mathrm{Motend}(A, G) := \bigcap_{g \in G} (O_g \cap C(h_g)).$$

Из определения данного множество видно, что для любого группоида G оно содержит тождественное преобразование.

Теорема 3. *Множество преобразований* $\mathrm{Motend}(A, G)$ *является подмоноидом в моноиде всех эндоморфизмов группоида* G. *Моноид* $\mathrm{Motend}(A, G)$ *состоит из эндоморфизмов первого типа.*

Доказательство. Множество преобразований O_g замкнуто относительно композиции преобразований для любого g из G. Действительно, пусть выполняется включение $\alpha, \beta \in O_g$ тогда для любого $g \in G$ и любого $s \in M_g$ справедливы соотношения

$$(\alpha \cdot \beta)(s) = \alpha(\beta(s)),\ \beta(s) \in M_g \Rightarrow \alpha(\beta(s)) \in M_g \Rightarrow (\alpha \cdot \beta) \in O_g.$$

Нетрудно показать, что для любого $g \in G$ пересечение $O_g \cap C(h_g)$ есть подмножество в множестве $L^{(1)}(g)$. Действительно, пусть $\alpha \in O_g \cap C(h_g)$, следовательно, централизатор $C(h_g)$ содержит преобразование α и выполняется условие $\alpha(M_g) \subseteq M_g$. Поскольку $g \in M_g$, то множество M_g непусто и верно равенство $h_{\alpha(g)} = h_g$. Значит, выполняется включение $\alpha \in L^{(1)}(g)$.

Поскольку O_g и $C(h_g)$ — полугруппы для любого $g \in G$, то $O_g \cap C(h_g)$ — полугруппа. Следовательно, $\mathrm{Motend}(A, G)$ — подполугруппа в $I(G)$.

Так как для любого $g \in G$ выполняется включение $O_g \cap C(h_g) \subseteq L^{(1)}(g)$, то имеют место соотношения

$$\mathrm{Motend}(A, G) = \bigcap_{g \in G} (O_g \cap C(h_g)) \subseteq \bigcap_{g \in G} L^{(1)}(g) = D(A).$$

Таким образом, получаем, что множество преобразований $\mathrm{Motend}(A, G)$ является полугруппой и состоит из эндоморфизмов первого типа группоида G. Несложно увидеть, что тождественное преобразование ε лежит в множествах O_g и $C(h_g)$ для любого $g \in G$. Поэтому полугруппа $\mathrm{Motend}(A, G)$ содержит тождественное преобразование, следовательно, является моноидом.

Теорема доказана.

5. Специальная полугруппа эндоморфизмов второго типа

Как и раньше, G — некоторый группоид. С каждым элементом $g \in G$ сопоставим множества

$$\overline{M_g} := \{m \in G \mid h_g \neq h_m\},$$
$$O'_g := \begin{cases} \{\alpha \in I(G) \mid \alpha(\overline{M_g}) \subseteq \overline{M_g}\}, & \text{если } \overline{M_g} \neq \varnothing, \\ \varnothing, & \text{если } \overline{M_g} = \varnothing. \end{cases}$$

В множестве $I(G)$ выделим подмножество

$$\mathrm{Motend}(\Omega, G) := \bigcap_{g \in G} (O'_g \cap L^{(2)}(g)).$$

Теорема 4. *Если множество преобразований* $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ *не пусто для группоида* G, *то оно является подполугруппой в моноиде всех эндоморфизмов группоида* G. *Полугруппа* $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ *состоит из эндоморфизмов второго типа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем, что группоид G такой, что множество $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ не пусто. Как и O_g, множество O'_g есть подполугруппа в полугруппе $I(G)$. Пусть α_1, α_2 — преобразования из множества $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$. Тогда для любого элемента $g \in G$ композиция $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ лежит в множестве $L^{(2)}(g)$. В самом деле, поскольку преобразования α_1 и α_2 лежат в $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$, то справедливы включения $\alpha_1, \alpha_2 \in L^{(2)}(g)$ для любого $g \in G$. Следовательно, верны соотношения

$$\alpha_2 \cdot h_g = h_{\alpha_2(g)} \cdot \alpha_2, \quad \alpha_1 \cdot h_{\alpha_2(g)} = h_{\alpha_1(\alpha_2(g))} \cdot \alpha_1. \tag{5.1}$$

Последнее равенство вытекает из того, что включение $\alpha_1 \in L^{(2)}(s)$ выполняется для любого $s \in G$ в частности для $s = \alpha_2(g)$, где g — произвольный элемент из G.

В силу равенств (5.1) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot h_g = \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot h_g) = \alpha_1 \cdot (h_{\alpha_2(g)} \cdot \alpha_2) = (\alpha_1 \cdot h_{\alpha_2(g)}) \cdot \alpha_2 \\ = (h_{\alpha_1(\alpha_2(g))} \cdot \alpha_1) \cdot \alpha_2 = h_{(\alpha_1 \cdot \alpha_2)(g)} \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha_2).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Поскольку преобразования α_1, α_2 лежат в $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$, то преобразования α_1, α_2 лежат в O'_g для всякого g. Так как O'_g — полугруппа, то для каждого $g \in G$ имеем включение $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \in O'_g$. Поскольку для любого $g \in G$ множество O'_g содержит композицию $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, то выполняются соотношения $\alpha_2(g) = k \in \overline{M_g}$, $\alpha_1(k) = u \in \overline{M_g}$. Следовательно, верно равенство $(\alpha_1 \cdot \alpha_2)(g) = u$, где $u \in \overline{M_g}$. Отсюда выводим неравенство $h_g \neq h_u$. Таким образом, мы показали (с учетом (5.2)), что композиция $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ лежит в $L^{(2)}(g)$ для каждого фиксированного $g \in G$.

Так как для любого $g \in G$ множества $L^{(2)}(g)$ и O'_g содержат композицию $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, то получаем включение $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \in \mathrm{Motend}(\Omega, G)$.

Поскольку для любого $g \in G$ множество $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ является подмножеством $L^{(2)}(g)$, то выполняется включение $\mathrm{Motend}(\Omega, G) \subseteq D(\Omega)$. Таким образом, множество $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ — подполугруппа моноида всех эндоморфизмов, состоящая из эндоморфизмов второго типа.

Теорема доказана.

Полугруппа $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ в зависимости от группоида G может вырождаться в пустое множество (см. пример 1).

Заметим, что множество $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ пусто для группоида G, в котором нет различных левых сдвигов (тривиально вытекает из определения O'_g).

6. Специальная полугруппа эндоморфизмов смешанного типа

Пусть G — некоторый группоид и γ — смешанный тип из $\mathrm{Bte}(G)$. Как и раньше, будем использовать множества $M_g, \overline{M_g}, O_g, O'_g$ (их определение см. в двух предыдущих разделах). Разобьем множество G на два непересекающихся класса

$$J_1(\gamma) := \{g \in G \mid \gamma(g) = 1\}, \quad J_2(\gamma) := \{g \in G \mid \gamma(g) = 2\}.$$

Очевидно, что справедливо разложение $G = J_1(\gamma) \cup J_2(\gamma)$. В симметрической полугруппе $I(G)$ выделим подмножество

$$\mathrm{Motend}(\gamma, G) := \Big(\bigcap_{g \in J_1(\gamma)} (O_g \cap C(h_g)) \Big) \bigcap \Big(\bigcap_{g \in J_2(\gamma)} (O'_g \cap L^{(2)}(g)) \Big).$$

Несложно увидеть, что выполняется равенство

$$\begin{aligned}\mathrm{Motend}(\gamma, G) = \Big\{ \alpha \in I(G) \mid \big[\forall g \in J_1(\gamma) \colon (\alpha \in C(h_g)) \wedge (\alpha(M_g) \subseteq M_g)\big] \\ \wedge \big[\forall g \in J_2(\gamma) \colon (\alpha \in L^{(2)}(g)) \wedge (\alpha(\overline{M_g}) \subseteq \overline{M_g})\big] \Big\}.\end{aligned}$$

Теорема 5. *Если множество преобразований* $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ *не пусто для группоида* G, *то оно является подполугруппой в моноиде всех эндоморфизмов группоида* G *и состоит из эндоморфизмов типа* γ.

Доказательство. Покажем, что множество $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ замкнуто относительно композиции двух преобразований.

Выполняется равенство $\mathrm{Motend}(\gamma, G) = Q_1 \cap Q_2$, где

$$Q_1 := \bigcap_{g \in J_1(\gamma)} (O_g \cap C(h_g)), \quad Q_2 := \bigcap_{g \in J_2(\gamma)} (O'_g \cap L^{(2)}(g)).$$

Далее полагаем, что $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Motend}(\gamma, G)$. Очевидно, что множество Q_1 — это полугруппа, так как оно является пересечением полугрупп. Поскольку имеют место включения α_1, $\alpha_2 \in \mathrm{Motend}(\gamma, G)$, то преобразования α_1 и α_2 содержатся в Q_1, следовательно, композиция $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ лежит в полугруппе Q_1.

Покажем, что композиция $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ лежит в множестве Q_2. Поскольку выполняются включения преобразований $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Motend}(\gamma, G)$, то для любого $g \in J_2(\gamma)$ преобразования α_1 и α_2 лежат в множествах: $L^{(2)}(g)$ и O'_g. Следовательно, для любого элемента $g \in J_2(\gamma)$ верны соотношения

$$\alpha_2(g) = k_g \in \overline{M_g}, \quad \alpha_1(\alpha_2(g)) = \alpha_1(k_g) = u_g \in \overline{M_g}, \tag{6.1}$$

где k_g и u_g — конкретные элементы из $\overline{M_g}$, зависящие от $g \in G$ (элементы группоида k_g и u_g могут совпадать). Действительно, соотношение $\alpha_2(g) = k_g \in \overline{M_g}$ получаются из вхождения преобразования α_2 в множество $L^{(2)}(g)$, а включение $u_g \in \overline{M_g}$ вытекает из того, что O'_g содержит α_1.

Далее покажем, что для любого элемента g из $J_2(\gamma)$ композиция $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ лежит в множестве $L^{(2)}(g)$. Рассмотрим два взаимоисключающих случая.

Случай 1. Элемент $\alpha_2(g)$ лежит в $J_2(\gamma)$.

Случай 2. Элемент $\alpha_2(g)$ не лежит в $J_2(\gamma)$. Отсюда $\alpha_2(g) \in J_1(\gamma)$.

Рассматриваем случай 1. Так как $\alpha_2 \in L^{(2)}(g)$ и $\alpha_2(g) \in J_2(\gamma)$ (следовательно, имеем включение $Q_2 \subseteq L^{(2)}(\alpha_2(g))$), то выполняются соотношения

$$\alpha_2 \cdot h_g = h_{\alpha_2(g)} \cdot \alpha_2, \quad \alpha_1 \cdot h_{\alpha_2(g)} = h_{\alpha_1(\alpha_2(g))} \cdot \alpha_1. \tag{6.2}$$

Соотношения (6.1) и (6.2) дают равенства

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot h_g &= \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot h_g) = \alpha_1 \cdot (h_{\alpha_2(g)} \cdot \alpha_2) = (\alpha_1 \cdot h_{\alpha_2(g)}) \cdot \alpha_2 \\ &= (h_{\alpha_1(\alpha_2(g))} \cdot \alpha_1) \cdot \alpha_2 = h_{(\alpha_1 \cdot \alpha_2)(g)} \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha_2) = h_{u_g} \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha_2).\end{aligned} \tag{6.3}$$

Поскольку множество $\overline{M_g}$ содержит элемент u_g, выводим

$$h_{(\alpha_1 \cdot \alpha_2)(g)} \neq h_g. \tag{6.4}$$

Рассмотрим случай 2. Здесь $\alpha_2(g) \in J_1(\gamma)$ и преобразование α_1 лежит в Q_1 (см. начало доказательства). Поэтому истинны соотношения $\alpha_1 \in Q_1 \subseteq \left(C(h_{\alpha_2(g)}) \cap O_{\alpha_2(g)}\right)$.

Мы получаем, что выполняются включение $\alpha_1 \in C(h_{\alpha_2(g)})$ и тождество $h_{\alpha_2(g)} = h_{\alpha_1(\alpha_2(g))}$. Следовательно, выполняется равенство $\alpha_1 \cdot h_{\alpha_2(g)} = h_{\alpha_1(\alpha_2(g))} \cdot \alpha_1$, которое показывает, что в этом случае выполняются соотношения (6.3). Равенства (6.1) дают соотношение

$$h_{\alpha_1(\alpha_2(g))} = h_{\alpha_2(g)} = k_g \in \overline{M_g},$$

исходя из которого можно утверждать, что имеет место (6.4).

Таким образом, мы видим, что в случаях 1 и 2 выполняются равенства (6.3) и неравенство (6.4). Поэтому для любого $g \in J_2(\gamma)$ будет выполняться включение композиции $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ в множество $L^{(2)}(g)$.

O'_g — полугруппа для любого $g \in G$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in O'_g$, поэтому $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \in O'_g$. Значит, композиция $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ лежит в Q_2. С учетом включения $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \in Q_1$ получаем, что множество $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ замкнуто относительно композиции.

Далее, поскольку выполняются включения

$$Q_1 \subseteq \bigcap_{g \in J_1(\gamma)} L^{(1)}(g), \quad Q_2 \subseteq \bigcap_{g \in J_1(\gamma)} L^{(2)}(g),$$

то справедливы соотношения

$$\mathrm{Motend}(\gamma, G) = Q_1 \cap Q_1 \subseteq \Big(\bigcap_{g \in J_1(\gamma)} L^{(1)}(g) \Big) \bigcap \Big(\bigcap_{g \in J_2(\gamma)} L^{(2)}(g) \Big) = D(\gamma).$$

Таким образом, мы убедились, что $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ — это полугруппа эндоморфизмов смешанного типа γ.

Теорема доказана.

К сожалению, теоремы 3 и 4 не вытекают из теоремы 5. Теорема 5 и связанные с ней обозначения корректны только при условии, что γ — смешанный тип. Доказательства теорем 3, 4 и 5 также имеют нюансы и не являются аналогичными. Поэтому их приходится рассматривать отдельно.

Существуют непустые полугруппы эндоморфизмов смешанного типа (см. пример 1, п. б)). В некоторых случаях они могут совпадать со всем базовым множеством эндоморфизмов, в котором они находятся (см. пример 1, п. б)).

О п р е д е л е н и е 6. Полугруппу E эндоморфизмов группоида G будем называть *монотипной*, если существует тип $\gamma \in \mathrm{Bte}(G)$ такой, что выполняется включение $E \subseteq D(\gamma)$. Полугруппу E' эндоморфизмов группоида будем называть *мультитипной*, если она содержит эндоморфизмы различных типов.

Полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{Motend}(A, G)$, $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ и $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ являются монотипными полугруппами (первые литеры Mo в обозначении этих полугрупп указывают на слово моно, а литера t на слово тип).

Совокупность полугрупп $\mathrm{Motend}(A, G)$, $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$ и $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ (для всех смешанных типов γ) группоида G будем обозначать символом $\mathcal{P}(G)$.

Вычислительные эксперименты показывают существование группоида G такого, что существуют монотипные полугруппы эндоморфизмов, которые не содержатся в монотипных полугруппах эндоморфизмов из множества $\mathcal{P}(G)$ (см. пример 1, п. д)).

Непустые мультитипные полугруппы эндоморфизмов существуют. В самом деле, достаточно взять пару эндоморфизмов различных типов и породить ими полугруппу.

7. Примеры

В данном разделе применяются компьютерные вычисления, реализованные с помощью программ, разработанных автором на языке программирования "Python" (версия 3.9). Для их написания было достаточно стандартных средств языка. Алгоритмы данных программ основывались на переборе. В начале находились множества $L^{(1)}(y)$ и $L^{(2)}(y)$ для каждого $y \in G$ (с помощью перебора); затем базовые множества эндоморфизмов – как пересечения элементов из

$$\{L^{(1)}(y) \mid y \in G\} \cup \{L^{(2)}(y) \mid y \in G\}.$$

Аналогично находились полугруппы $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$. При таком подходе группоид задавался своими левыми сдвигами и алгоритмы работают для любого конечного группоида достаточно малого порядка. Последнее позволило подобрать группоид с непустыми базовыми множествами эндоморфизмов первого, второго и смешанного типа (см. пример 1). Главным недостатком такого подхода является объем вычислений.

П р и м е р 1. Рассмотрим конкретный группоид G порядка 4, который имеет пустые и не пустые базовые множества эндоморфизмов (в зависимости от типа базового множества), а также непустые полугруппы $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ и $\mathrm{Motend}(A, G)$. Далее элементы группоида будем обозначать через $G = \{1, 2, 3, 4\}$. Со всяким преобразованием $\alpha \in I(G)$ будем связывать обозначение:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = (\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \alpha(4)).$$

Умножение в группоиде G определим с помощью таблицы Кэли:

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	2	2	3	4
4	2	2	3	4

Выпишем левые сдвиги: $h_1 = (1, 2, 3, 4)$, $h_2 = (1, 2, 3, 4)$, $h_3 = (2, 2, 3, 4)$, $h_4 = (2, 2, 3, 4)$.

Всякий тип $\gamma \in \mathrm{Bte(G)}$ в данном случае индуцирует кортеж $(\gamma(1), \gamma(2), \gamma(3), \gamma(4))$; этот кортеж также будем называть типом и используем обозначение $D(\gamma) = D(\gamma(1), \gamma(2), \gamma(3), \gamma(4))$. В частности, $D(A) = D(1, 1, 1, 1)$ и $D(\Omega) = D(2, 2, 2, 2)$.

При помощи компьютерных вычислений получаем равенства:

$$D(A) = \{(1, 2, 3, 3), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 2, 4, 4), (2, 2, 3, 3), (2, 2, 3, 4), (2, 2, 4, 3), (2, 2, 4, 4)\};$$

$$D(1, 1, 1, 2) = \{(2, 2, 3, 2), (2, 2, 4, 2)\}; \qquad D(1, 1, 2, 1) = \{(2, 2, 2, 3), (2, 2, 2, 4)\};$$

$$D(1, 1, 2, 2) = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 2), (2, 2, 2, 1), (2, 2, 2, 2)\};$$

$$D(2, 2, 1, 1) = \{(3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 4), (3, 3, 4, 3), (3, 3, 4, 4), (4, 4, 3, 3), (4, 4, 3, 4), (4, 4, 4, 3), (4, 4, 4, 4)\};$$

$$D(2, 2, 1, 2) = \{(3, 3, 3, 2), (3, 3, 4, 2), (4, 4, 3, 2), (4, 4, 4, 2)\};$$

$$D(2, 2, 2, 1) = \{(3, 3, 2, 3), (3, 3, 2, 4), (4, 4, 2, 3), (4, 4, 2, 4)\};$$

$$D(\Omega) = \{(3, 3, 2, 2), (4, 4, 2, 2)\}.$$

Остальные базовые множества эндоморфизмов здесь пусты.

Используя компьютерные вычисления, получаем:

$$\mathrm{Motend}(A, G) = \big\{(1, 2, 3, 3), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 2, 4, 4), (2, 2, 3, 3), (2, 2, 3, 4), (2, 2, 4, 3), (2, 2, 4, 4)\big\};$$

$$\mathrm{Motend}((1, 1, 2, 2), G) = \big\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 2), (2, 2, 2, 1), (2, 2, 2, 2)\big\};$$

$$\mathrm{Motend}((2, 2, 1, 1), G) = \big\{(3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 4), (3, 3, 4, 3), (3, 3, 4, 4), (4, 4, 3, 3), (4, 4, 3, 4), (4, 4, 4, 3), (4, 4, 4, 4)\big\};$$

В данном случае имеют место равенства

$$D(A) = \mathrm{Motend}(A, G), D(1, 1, 2, 2) = \mathrm{Motend}((1, 1, 2, 2), G), D(2, 2, 1, 1) = \mathrm{Motend}((2, 2, 1, 1), G).$$

При этом полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$, $\mathrm{Motend}((2,2,2,1), G)$, $\mathrm{Motend}((1,1,1,2), G)$, $\mathrm{Motend}((1,1,2,1), G)$, $\mathrm{Motend}((2,2,1,2), G)$ вырождаются в пустое множество (в этом легко убедиться непосредственной проверкой, используя определение этих полугрупп).

Таким образом, пример 1 демонстрирует справедливость следующих утверждений:

а) базовые множества могут быть пустыми и непустыми;

б) существуют полугруппы $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ (причем они могут даже совпадать с базовыми множествами, в которых они покоятся);

в) непустое базовое множество эндоморфизмов типа γ может не содержать соответствующую полугруппу $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$;

г) как несложно увидеть, базовое множество $D(1,1,1,2)$ не замкнуто относительно композиции (достаточно отметить, что $(2,2,4,2)\cdot(2,2,4,2)=(2,2,2,2)$);

д) в базовом множестве $D(1,1,1,2)$ можно выделить одноэлементную полугруппу $\{(2,2,3,2)\}$, данная полугруппа не содержится в полугруппе $\mathrm{Motend}((1,1,1,2), G)$.

П р и м е р 2. Рассмотрим циклическую группу C_5 порядка 5, заданную таблицей Кэли:

$*$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	1
3	3	4	5	1	2
4	4	5	1	2	3
5	5	1	2	3	4

Запишем левые сдвиги: $h_1=(1,2,3,4,5)$, $h_2=(2,3,4,5,1)$, $h_3=(3,4,5,1,2)$, $h_4=(4,5,1,2,3)$, $h_5=(5,1,2,3,4)$.

Вычисления показывают, что не пустыми базовыми множествами эндоморфизмов являются $D(1,1,1,1,1)=D(A)$ и $D(1,2,2,2,2)$. Справедливы равенства

$$D(A)=\{(1,2,3,4,5)\}, D(1,2,2,2,2)=\big\{(1,1,1,1,1),(1,3,5,2,4),(1,4,2,5,3),(1,5,4,3,2)\big\}.$$

Ясно, что $\mathrm{Motend}(A, G)=\{(1,2,3,4,5)\}$. Можно показать, что $\mathrm{Motend}(\gamma, G)=\{(1,1,1,1,1)\}$, когда $\gamma=(1,2,2,2,2)$. Действительно, проведем вычисления:

$$M_1=\{1\},\quad O_1=\{\alpha\in I(G)\mid \alpha(1)=1\},\quad C(h_1)=I(G),\quad Q:=O_1\cap C(h_1)=O_1.$$

Далее, имеем

$$\overline{M}_2=\{1,3,4,5\},\quad \overline{M}_3=\{1,2,4,5\},\quad \overline{M}_4=\{1,2,3,5\},\quad \overline{M}_5=\{1,2,3,4\};$$

$$O'_i=\{\alpha\in I(G)\mid \alpha(\{1,2,3,4,5\}\setminus\{i\})\subseteq\{1,2,3,4,5\}\setminus\{i\}\},\quad i=2,3,4,5.$$

Отсюда видно, что пересечение множеств O'_i $(i=2,3,4,5)$ равно $\{(1,1,1,1,1)\}$. Поскольку h_1 — тождественное преобразование, то преобразование $(1,1,1,1,1)$ лежит в $L^{(2)}(h_i)$ для любого элемента $i\in\{2,3,4,5\}$ и находится во множестве Q. По определению полугруппы $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$ получаем $\mathrm{Motend}(\gamma, G)=\{(1,1,1,1,1)\}$.

В следующем примере продемонстрируем нахождение базового множества эндоморфизмов первого типа без использования компьютерных вычислений.

П р и м е р 3. Пусть G — некоторое множество, в котором содержится пара различных элементов a и b. Полагаем, $G=U_a\cup U_b$, где U_a и U_b — непересекающиеся подмножества в G, причем $a\in U_a$ и $b\in U_b$. Определим группоид $G=(G,*)$ так, что для всяких $x\in U_a$ и $y\in U_b$ выполняются соотношения: $h_x\equiv a$, $h_y\equiv b$. Исходя из этого, все левые сдвиги данного группоида — константанты.

Вычислим множества $L^{(1)}(x)$ для всех $x \in U_a$. По определению вычисляемого множества получаем, что $\alpha \in I(G)$ лежит в $L^{(1)}(x)$ тогда и только тогда, когда имеют место соотношения:

$$h_x = h_{\alpha(x)}, \quad \alpha \cdot h_x = h_{\alpha(x)} \cdot \alpha.$$

Поэтому выводим равенства $h_{\alpha(x)} = h_x \equiv a$, следовательно, $\alpha(x) \in U_a$ для любого $x \in U_a$. Для произвольного $z \in G$ верны тождества $(\alpha \cdot h_x)(z) = \alpha(a)$, $\quad (h_{\alpha(x)} \cdot \alpha)(z) = a$, которые дают условие $\alpha(a) = a$. Таким образом, для всякого $x \in U_a$ справедливо

$$L^{(1)}(x) = \{\alpha \in I(G) \mid [\alpha(a) = a] \wedge [\alpha(x) \in U_a]\}. \tag{7.1}$$

Аналогично получаем, что для любого $y \in U_b$ верно равенство

$$L^{(1)}(y) = \{\alpha \in I(G) \mid [\alpha(b) = b] \wedge [\alpha(y) \in U_b]\}. \tag{7.2}$$

В частности, с помощью приведенных выше рассуждений можно вычислить централизаторы

$$C(h_x) = \{\alpha \in I(G) \mid \alpha(a) = a\} \;\; (x \in U_a); \;\; C(h_y) = \{\alpha \in I(G) \mid \alpha(b) = b\} \;\; (y \in U_b). \tag{7.3}$$

Найдем $D(A)$. Из равенств (7.1) и (7.2) вытекает соотношение

$$D(A) = \big\{\alpha \in I(G) \mid [\alpha(a) = a] \wedge [\alpha(b) = b] \wedge [\alpha(U_a) \subseteq U_a] \wedge [\alpha(U_b) \subseteq U_b]\big\}.$$

Вычислим множества M_g и O_g. Для всяких $x \in U_a$ и $y \in U_b$ справедливы формулы

$$M_x = U_a, \quad M_y = U_b, \quad O_x = \{\alpha \in I(G) \mid \alpha(U_a) \subseteq U_a\}, \quad O_y = \{\alpha \in I(G) \mid \alpha(U_b) \subseteq U_b\}.$$

Эти соотношения и равенства (7.3) дают цепочку равенств

$$\mathrm{Motend}(A, G) = \bigcap_{g \in G} (O_g \cap C(h_g)) = \Big(\bigcap_{x \in U_a} (O_x \cap C(h_x))\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{y \in U_b} (O_y \cap C(h_y))\Big)$$

$$= \big\{\alpha \in I(G) \mid [\alpha(a) = a] \wedge [\alpha(b) = b] \wedge [\alpha(U_a) \subseteq U_a] \wedge [\alpha(U_b) \subseteq U_b]\big\} = D(A).$$

Таким образом, в данном случае $\mathrm{Motend}(A, G) = D(A)$. Условия, которыми определяется базовое множество эндоморфизмов первого типа, достаточно простые.

Заключение

Теорема 1 дает поэлементное описание моноида всех эндоморфизмов произвольного группоида с точностью до вычисления всех базовых множеств эндоморфизмов (последнее — нетривиальная задача для конкретного группоида). Таким образом, эта теорема индуцирует метод исследования проблемы поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов каждого конкретного группоида. Для конечных группоидов см. замечание 2.

Теоремы 3–5 и связанные с ними понятия могут быть полезны при изучении структуры (внутреннего устройства) моноида всех эндоморфизмов некоторого фиксированного группоида. Введенная биполярная классификация эндоморфизмов произвольного группоида может быть применена в различных теоретических исследованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Litavrin A. V.** Endomorphisms of Some Groupoids of Order $k + k^2$ // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2020. Vol. 32. P. 64–78. doi: 10.26516/1997-7670.2020.32.64
2. **Litavrin A. V.** On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2022. Vol. 39. P. 111–126. doi: 10.26516/1997-7670.2022.39.111
3. **Левчук В. М.** Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 211–224.
4. **Ильиных А. П.** Классификация конечных группоидов с 2 транзитивной группой автоморфизмов // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 6. С. 51–78. doi.org/10.1070/SM1995v082n01ABEH003557
5. **Ильиных А. П.** Группоиды порядка $q(q \pm 1)/2$, $q = 2^r$, имеющие группу автоморфизмов, изоморфную $SL(2, q)$ // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1336–1341. doi.org/10.1007/BF02106838
6. **Тимофеенко Г. В., Глухов М. М.** Группа автоморфизмов конечно-определенных квазигрупп // Мат. заметки. 1985. Т. 37 , № 5. С. 617–626.
7. **Табаров А. Х.** Гомоморфизмы и эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп // Дискрет. математика. 2007. Т. 19, № 2. С. 67–73. doi.org/10.4213/dm21
8. **Жучок Ю. В.** Полугруппы эндоморфизмов некоторых свободных произведений // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 3. С. 51–60.
9. **Бунина Е. И., Сосов К.** Эндоморфизмы полугрупп неотрицательных обратимых матриц порядка два над коммутативными упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. математика. 2021. Т. 23, № 4. С. 39–53
10. **Немиро В. В.** Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными ассоциативными кольцами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 5. С. 3–8.

Поступила 12.09.2022
После доработки 20.12.2022
Принята к публикации 26.12.2022

Литаврин Андрей Викторович
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики № 2
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета
г. Красноярск
e-mail: anm11@rambler.ru

REFERENCES

1. Litavrin A. V. Endomorphisms of Some Groupoids of Order $k+k^2$. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2020, vol. 32, pp. 64–78. doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.64
2. Litavrin A. V. On Endomorphisms of the Additive Monoid of Subnets of a Two-layer Neural Network. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2022, vol. 39, pp. 111–126. doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.111
3. Levchuk V.M. Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups. *Algebra and Logic,* 1990, vol. 29, no. 3, pp. 211–224. doi:10.1007/BF01979936
4. Il'inykh A.P. Classification of finite groupoids with 2-transitive automorphism group. *Sb. Math,* 1995, vol. 82, no. 1, pp. 175–197. doi.org/10.1070/SM1995v082n01ABEH003557
5. Il'inykh A.P. Groupoids of order $q(q \pm 1)/2, q = 2^r$, with automorphism group isomorphic to $SL(2, q)$. *Siberian Math. J.,* 1995, vol. 36, no. 6, pp. 1159–1163. doi:10.1007/BF02106838
6. Glukhov M. M., Timofeenko G. V. Groups of automorphisms of finitely presented quasigroups. *Math. Notes,* 1985, vol. 37, no. 5, pp. 337–342. doi:10.1007/BF01157961
7. Tabarov A. Kh. Homomorphisms and endomorphisms of linear and alinear quasigroups. *Discrete Math. Appl.,* 2007. Vol. 17, No. 3, P. 253–260. doi:10.1515/dma.2007.021
8. Zhuchok Yu. V. Endomorphism semigroups of some free products. *J. Math. Sci.,* 2012, vol. 187, no. 2, pp. 146–152. doi:10.1007/s10958-012-1057-z

9. Bunina E.I., Sosov K. Endomorphisms of semigroups of nonnegative invertible matrices of order two over commutative ordered rings // *Fundam. and appl. maths.,* 2021, vol. 23, no. 4, pp. 39–53 (in Russian).
10. Nemiro V.V. Endomorphisms of semigroups of invertible nonnegative matrices over ordered associative rings. *Moscow Univ. Math. Bull.,* 2020, vol. 75, no 5, pp. 181–187. doi:10.3103/S0027132220050058

Received September 12, 2022
Revised December 20, 2022
Accepted December 26, 2022

Funding Agency: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2022-876).

Andrey Viktorovich Litavrin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: anm11@rambler.ru .

Cite this article as: A. V. Litavrin. On an element-by-element description of the monoid of all endomorphisms of an arbitrary groupoid and one classification of endomorphisms of a groupoid. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 143–159 .