

УДК 517.9

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОДНОГО ТИПА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ<sup>1</sup>****Г. А. Курина, Н. Т. Хоай**

Рассматривается линейно-квадратичная задача управления, в уравнении состояния которой при производной стоит квадрат малого параметра, а при квадратичной форме относительно управления в критерии качества и при управлении в уравнении состояния — первая степень этого параметра, при этом уравнение состояния относится к критическому случаю теории сингулярных возмущений. Построена асимптотика решения нулевого порядка при помощи так называемого метода прямой схемы, состоящего в непосредственной подстановке в условие задачи постулируемого асимптотического разложения решения и в определении задач для нахождения членов асимптотики.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача управления, сингулярные возмущения, критический случай, асимптотика решения.

**G. A. Kurina, N. T. Hoai. Zero-order asymptotics for the solution of one type of singularly perturbed linear–quadratic control problems in the critical case.**

We consider a linear–quadratic control problem in which there is the second power of a small parameter at the derivative of the state variable and the first power of the parameter both in the control term of the state equation and at the quadratic form of the control variable in the performance index; moreover, the state equation represents a critical case of singular perturbation theory. A zero-order asymptotic expansion of the solution is constructed using the so-called direct scheme method, in which a postulated asymptotic expansion of the solution is substituted directly into the problem statement and problems for finding the asymptotic terms are stated.

Keywords: linear–quadratic control problem, singular perturbations, critical case, asymptotics of solution.

MSC: 34H05, 34E15

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-127-142

**Введение**

При изучении сингулярно возмущенных задач (см., например, [1]), в том числе и задач управления [2], основное внимание уделяется системам с двухтемповыми переменными, медленными и быстрыми. Однако математические модели многих реальных процессов содержат разнотемповые быстрые переменные. В обзоре [3] приведено несколько десятков ссылок на публикации, посвященные изучению таких моделей.

Иногда разнотемповые быстрые переменные могут быть “скрытыми”, т. е. их наличие не видно из постановки задачи, а уравнения для них появляются в результате некоторых преобразований (например, задачи с “дешевыми” управлениями, цены которых имеют различный порядок малости, сингулярно возмущенные уравнения в специальном критическом случае и в случае кратных корней вырожденного уравнения). Обзор работ такого типа приведен в [3]. Упомянем некоторые из них.

При некоторых условиях в [4] (см. также [5]) построено асимптотическое решение начальной задачи, содержащее пограничные функции двух типов, для слабо нелинейного уравнения

<sup>1</sup>Работа первого автора поддержана Российским научным фондом (проект 21-11-00202), работа второго автора поддержана Вьетнамским национальным фондом развития науки и технологий (НАФО-СТЕД) (проект 101.02-2021.43).

вида

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad t \in [0, T],$$

в критическом случае, т. е. матрица  $A(t)$  является вырожденной. При этом асимптотика содержит пограничные функции двух типов от аргументов  $\tau_1 = t/\varepsilon$  и  $\tau_2 = t/\varepsilon^2$ :

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi_1 x(\tau_1, \varepsilon) + \Pi_2 x(\tau_2, \varepsilon).$$

Здесь и далее  $\varepsilon > 0$  означает малый параметр.

Для понимания алгоритма построения асимптотики решения этой задачи полезен предложенный в [6] проекторный подход, использующий ортогональные проекторы на  $\text{Ker } A(t)$  и  $\text{Ker } A(t)'$ , с помощью которых можно записать в явном виде соотношения для определения членов асимптотики любого порядка.

Обзор результатов, связанных с дополнительными асимптотическими слоями в асимптотике решений сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений типа А. Н. Тихонова в случае нарушения условия устойчивости, которое предполагалось в [1], приведен в [7].

При построении асимптотических решений задач оптимального управления используются два подхода. Один подход, наиболее распространенный, состоит в построении асимптотического решения задачи, вытекающей из условий оптимальности управления. Другой подход, называемый прямой схемой, заключается в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условие задачи и определении задач, решениями которых являются члены асимптотики. Для задач с двухтемповыми переменными применение прямой схемы представлено, например, в [8; 9]. Этот подход позволяет использовать пакеты программ решения задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики решения и устанавливать невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании новых членов асимптотики оптимального управления.

При помощи прямой схемы в [10] построена асимптотика решения нулевого порядка для линейно-квадратичной задачи управления слабоуправляемой системой вида

$$\frac{1}{2} \int_0^T (\langle x, W(t, \varepsilon)x \rangle + 2\langle x, g(t, \varepsilon) \rangle + \varepsilon^2 \langle u, R(t, \varepsilon)u \rangle) dt \rightarrow \min_u,$$

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + \varepsilon^2 B(t, \varepsilon)u + \varepsilon f(t, \varepsilon), \quad x(0, \varepsilon) = x^0,$$

в критическом случае (матрица  $A(t, 0)$  вырождена). Угловые скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  здесь и далее означают скалярное произведение.

В настоящей статье рассматривается модификация задачи из [10], а именно квадрат малого параметра при квадратичной форме относительно управления и при управлении в уравнении состояния заменяется на первую степень малого параметра. Алгоритм построения асимптотики при этом изменяется.

В первом разделе статьи приводится постановка задачи и формулируются главные условия построения асимптотики. Во втором разделе производится декомпозиция задачи следуя методу прямой схемы. Третий раздел посвящен построению асимптотики нулевого порядка для оптимальной траектории рассматриваемой задачи, при этом находятся некоторые члены асимптотики оптимального управления. Оставшиеся члены асимптотики нулевого порядка для оптимального управления определяются в четвертом разделе. В пятом разделе рассматривается иллюстративный пример.

Далее  $I$  будет означать единичную матрицу (оператор), штрих — транспонирование, а  $h_j(t)$  — коэффициент при  $\varepsilon^j$  в разложении функции  $h(t, \varepsilon)$  в ряд по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , т. е.  $h(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(t)$ .

### 1. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача

$$P_\varepsilon: J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (\langle x, W(t, \varepsilon)x \rangle + 2\langle x, g(t, \varepsilon) \rangle + \varepsilon \langle u, R(t, \varepsilon)u \rangle) dt \rightarrow \min_u, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + \varepsilon B(t, \varepsilon)u + \varepsilon f(t, \varepsilon), \quad (1.2)$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0, \quad (1.3)$$

где  $x = x(t, \varepsilon) \in X, \dim X = n, u = u(t, \varepsilon) \in U, \dim U = m$ , матрица  $A_0(t) = A(t, 0)$  вырождена, матрицы  $W(t, \varepsilon)$  и  $R(t, \varepsilon)$  симметрические, причем  $W_0(t) = W(t, 0)$  неотрицательно определенная, а  $R_0(t) = R(t, 0)$  положительно определенная. Все функции, входящие в (1.1), (1.2), являются достаточно гладкими по своим аргументам.

Предполагается, что собственные значения  $\lambda_i(t), i = \overline{1, n}$ , матрицы  $A_0(t), t \in [0, T]$ , удовлетворяют следующим условиям.

У с л о в и е 1.  $\lambda_i(t) = 0, i = \overline{1, k}$ .

У с л о в и е 2.  $Re \lambda_i(t) < 0, i = \overline{k+1, n}$ .

У с л о в и е 3. Собственные векторы матрицы  $A_0(t)$ , соответствующие нулевым собственным значениям, линейно независимы.

Из [11] следует, что можно построить собственные векторы, обладающие той же степенью гладкости, что и сама матрица  $A_0(t)$ . Именно такие собственные векторы и будут использоваться.

Остальные условия будут сформулированы ниже.

Асимптотическое решение задач быстрогодействия с ограничением на управление для сингулярно возмущенных линейных уравнений состояния частного вида в случае нарушения условия устойчивости из [1] рассматривалось в [12; 13].

Далее при помощи прямой схемы будет построено асимптотическое решение нулевого порядка для задачи (1.1)–(1.3), содержащее пограничные функции четырех типов.

### 2. Декомпозиция задачи

Аналогично [10] будем искать асимптотическое решение задачи (1.1)–(1.3) в следующем виде:

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t, \varepsilon) + \sum_{i=1}^2 (\Pi_i z(\tau_i, \varepsilon) + Q_i z(\sigma_i, \varepsilon)), \quad (2.1)$$

где  $z = (x', u)'$ ,  $\tau_i = t/\varepsilon^i, \sigma_i = (t - T)/\varepsilon^i, i = 1, 2$ ,

$$\bar{z}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{z}_j(t), \quad \Pi_i z(\tau_i, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{ij} z(\tau_i), \quad Q_i z(\sigma_i, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j Q_{ij} z(\sigma_i);$$

$\bar{z}_j(t)$  называются регулярными функциями,  $\Pi_{ij} z(\tau_i)$  и  $Q_{ij} z(\sigma_i)$  — пограничные функции экспоненциального типа в окрестностях точек  $t = 0$  и  $t = T$  соответственно, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\Pi_{ij} z(\tau_i)\| \leq c \exp(-\kappa \tau_i), \quad \tau_i \geq 0, \quad \|Q_{ij} z(\sigma_i)\| \leq c \exp(\kappa \sigma_i), \quad \sigma_i \leq 0, \quad (2.2)$$

с некоторыми положительными постоянными  $c$  и  $\varkappa$ , не зависящими от  $\tau_i$  и  $\sigma_i$ .

Подставим ряд (2.1) в (1.1) и представим стандартным образом подынтегральную функцию в (1.1) в виде асимптотической суммы членов, зависящих от  $t$ ,  $\tau_i$  и  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ . В интегралах от функций, зависящих от  $\tau_i$  и  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ , перейдем к интегралам по соответствующим промежуткам  $[0, +\infty)$  и  $(-\infty, 0]$ . Таким образом, минимизируемый функционал (1.1) запишем в виде

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j J_j. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.1) в (1.2) и представляя правую часть получившегося выражения в виде суммы функций, зависящих от  $t$ ,  $\tau_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ , затем приравнивая отдельно члены, зависящие от  $t$ ,  $\tau_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+2} \frac{d\bar{x}_j}{dt} &= A(t, \varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{x}_j + B(t, \varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} \bar{u}_j + \varepsilon f(t, \varepsilon), \\ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+2-i} \frac{d\Pi_{ij}x}{d\tau_i} &= A(\varepsilon^i \tau_i, \varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{ij}x + B(\varepsilon^i \tau_i, \varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} \Pi_{ij}u, \quad i = 1, 2, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+2-i} \frac{dQ_{ij}x}{d\sigma_i} &= A(T + \varepsilon^i \sigma_i, \varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j Q_{ij}x + B(T + \varepsilon^i \sigma_i, \varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} Q_{ij}u, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Раскладывая правые части последних трех равенств в ряд по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$  и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , находим соотношения для членов ряда (2.1).

Подобным образом, учитывая экспоненциальный характер (2.2) пограничных функций  $Q_{ij}$ , из (1.3) имеем

$$\bar{x}_j(0) + \Pi_{1j}x(0) + \Pi_{2j}x(0) = \begin{cases} x^0, & j = 0, \\ 0, & j > 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

### 3. Определение членов асимптотики нулевого порядка для оптимальной траектории

Из (2.4), (2.5) следует, что члены нулевого порядка асимптотики (2.1) удовлетворяют равенствам

$$0 = A_0(t)\bar{x}_0, \quad (3.1)$$

$$0 = A_0(0)\Pi_{10}x, \quad (3.2)$$

$$0 = A_0(T)Q_{10}x,$$

$$\frac{d\Pi_{20}x}{d\tau_2} = A_0(0)\Pi_{20}x, \quad \tau_2 \in [0, +\infty), \quad \Pi_{20}x(0) = x^0 - \bar{x}_0(0) - \Pi_{10}x(0), \quad (3.3)$$

$$\frac{dQ_{20}x}{d\sigma_2} = A_0(T)Q_{20}x, \quad \sigma_2 \in (-\infty, 0], \quad Q_{20}x(-\infty) = 0. \quad (3.4)$$

Будем использовать разложение пространства  $X$  в ортогональные суммы (см., например, [14, с. 38]):

$$X = \text{Ker } A_0(t) \oplus \text{Im } A_0(t)' = \text{Ker } A_0(t)' \oplus \text{Im } A_0(t).$$

Ортогональные проекторы пространства  $X$  на  $\text{Ker } A_0(t)$  и  $\text{Ker } A_0(t)'$  обозначим соответственно через  $P(t)$  и  $Q(t)$ . Оператор  $(I - Q(t))A_0(t)(I - P(t)) : \text{Im } A_0(t)' \rightarrow \text{Im } A_0(t)$  обратим. Обратный обозначим через  $A_0(t)^+$ .

Из (3.1), (3.2) следует, что

$$(I - P(t))\bar{x}_0(t) = 0, \quad (I - P(0))\Pi_{10}x(\tau_1) = 0, \quad (I - P(T))Q_{10}x(\sigma_1) = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.3) эквивалентно системе двух уравнений

$$\frac{d(I - P(0))\Pi_{20}x}{d\tau_2} = (I - P(0))A_0(0)(I - P(0))\Pi_{20}x, \quad (3.6)$$

$$\frac{dP(0)\Pi_{20}x}{d\tau_2} = P(0)A_0(0)(I - P(0))\Pi_{20}x. \quad (3.7)$$

Из (3.3) в силу (3.5) получаем начальное условие

$$(I - P(0))\Pi_{20}x(0) = (I - P(0))x^0. \quad (3.8)$$

Из условия 2 следует, что оператор  $(I - P(t))A_0(t)(I - P(t)) : \text{Im } A_0(t)' \rightarrow \text{Im } A_0(t)'$  при всех  $t \in [0, T]$  устойчивый. Поэтому из (3.6), (3.8) находим единственным образом  $(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2)$  — пограничную функцию экспоненциального типа в окрестности  $t = 0$ .

Тогда из (3.7) определяется  $P(0)\Pi_{20}x(\tau_2)$  — пограничная функция экспоненциального типа в окрестности  $t = 0$ , а именно

$$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) = \int_{+\infty}^{\tau_2} P(0)A_0(0)(I - P(0))\Pi_{20}x(s)ds. \quad (3.9)$$

В силу устойчивости  $(I - P(T))A_0(T)(I - P(T))$  из (3.4) получаем

$$Q_{20}x(\sigma_2) = 0. \quad (3.10)$$

Предположим, что выполняется

У с л о в и е 4.  $P(t)W_0(t) = 0, P(t)g_0(t) = 0, t \in [0, T]$ .

Из этого условия 4 и (3.5) получаем

$$W_0(t)\bar{x}_0(t) = 0, \quad W_0(0)\Pi_{10}x(\tau_1) = 0, \quad W_0(T)Q_{10}x(\sigma_1) = 0. \quad (3.11)$$

Значит,  $J_0 = \frac{1}{2} \int_0^T (\langle \bar{x}_0, W_0(t)\bar{x}_0 \rangle + 2\langle \bar{x}_0, g_0(t) \rangle) dt = 0$ .

Ввиду условия 4 и соотношений (3.11) коэффициент  $J_1$  из (2.3) имеет вид

$$J_1 = \int_0^T \left( \langle (I - P(t))\bar{x}_1, g_0(t) \rangle + \langle P(t)\bar{x}_0, \frac{1}{2}W_1(t)P(t)\bar{x}_0 + g_1(t) \rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{u}_0, R_0(t)\bar{u}_0 \rangle \right) dt.$$

Введем обозначение

$$M(t) = Q(t)A_1(t)P(t)$$

и предположим, что выполняется

У с л о в и е 5. Оператор  $(Q(t)P(t))^{-1}M(t) : \text{Ker } A_0(t) \rightarrow \text{Ker } A_0(t), t \in [0, T]$ , устойчив.

Из этого условия следует, что оператор  $M(t) : \text{Ker } A_0(t) \rightarrow \text{Ker } A_0(t)'$  обратим.

Приравнявая в первой системе из (2.4) коэффициенты при  $\varepsilon$  в разложении по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , с учетом (3.5) имеем

$$0 = A_0(t)(I - P(t))\bar{x}_1 + A_1(t)P(t)\bar{x}_0 + B_0(t)\bar{u}_0 + f_0(t).$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$0 = (I - Q(t))A_0(t)(I - P(t))\bar{x}_1 + (I - Q(t))(A_1(t)P(t)\bar{x}_0 + B_0(t)\bar{u}_0 + f_0(t)), \quad (3.12)$$

$$0 = M(t)P(t)\bar{x}_0 + Q(t)B_0(t)\bar{u}_0 + Q(t)f_0(t). \quad (3.13)$$

Предположим еще

У с л о в и е 6. Матрица  $P(t)W_1(t)P(t)$  положительно полуопределенная.

Рассмотрим задачу  $\bar{P}_0$  минимизации функционала  $J_1$  при ограничениях (3.12), (3.13). Эта задача принадлежит классу вариационных задач на условный экстремум (см., например, [15, с. 375]). Обозначая множители Лагранжа через  $-(I - Q(t))\bar{\varphi}_0(t)$  и  $-Q(t)\bar{\varphi}_0(t)$ , можем представить решение  $\bar{u}_0(t)$  в виде

$$\bar{u}_0 = R_0(t)^{-1}B_0(t)'((I - Q(t))\bar{\varphi}_0 + Q(t)\bar{\varphi}_0) = R_0(t)^{-1}B_0(t)'\bar{\varphi}_0, \quad (3.14)$$

где  $(I - Q(t))\bar{\varphi}_0(t)$  и  $Q(t)\bar{\varphi}_0(t)$  удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} 0 &= A_0(t)'(I - Q(t))\bar{\varphi}_0 - (I - P(t))g_0(t), \\ 0 &= -M(t)'Q(t)\bar{\varphi}_0 - P(t)A_1(t)'(I - Q(t))\bar{\varphi}_0 + P(t)W_1(t)P(t)\bar{x}_0 + P(t)g_1(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из первого уравнения в (3.15) получаем  $(I - Q(t))\bar{\varphi}_0(t) = A_0(t)^+'(I - P(t))g_0(t)$ .

В силу условия 6 из второго уравнения в (3.15) и уравнения (3.13) с учетом (3.14) имеем  $P(t)\bar{x}_0(t)$  и  $Q(t)\bar{\varphi}_0(t)$ . Значит, функция  $\bar{x}_0(t)$  найдена.

Теперь из (3.14) однозначно определяется функция  $\bar{u}_0(t)$ . Кроме этого, из (3.12) получаем

$$(I - P(t))\bar{x}_1(t) = -A_0(t)^+(I - Q(t))(A_1(t)P(t)\bar{x}_0 + B_0(t)\bar{u}_0 + f_0(t)). \quad (3.16)$$

Учитывая условие 4, легко установить тождество

$$P(t)\frac{dW_0}{dt}(t)P(t) = 0. \quad (3.17)$$

Обозначим через  $\tilde{J}_2$  выражение, полученное из  $J_2$  после отбрасывания известных слагаемых. Ввиду условия 4, а также равенств (3.5), (3.11), (3.17) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{J}_2 &= \int_0^T (\langle (I - P(t))\bar{x}_2(t), g_0(t) \rangle + \langle P(t)\bar{x}_1, W_1(t)P(t)\bar{x}_0 + g_1(t) \rangle + \langle \bar{u}_1, R_0(t)\bar{u}_0 \rangle) dt \\ &+ \int_0^{+\infty} \left( \langle (I - P(0))\Pi_{11}x, g_0(0) \rangle + \langle \Pi_{10}u, R_0(0)\bar{u}_0(0) \rangle + \langle P(0)\Pi_{10}x, W_1(0)P(0)\bar{x}_0(0) + g_1(0) \right. \\ &\left. + \frac{dg_0}{dt}(0)\tau_1 + \langle P(0)\Pi_{10}x, \frac{1}{2}W_1(0)P(0)\Pi_{10}x \rangle + \langle \Pi_{10}u, \frac{1}{2}R_0(0)\Pi_{10}u \rangle \right) d\tau_1 + \int_{-\infty}^0 Q_{10}(\sigma_1)d\sigma_1, \end{aligned}$$

где  $Q_{10}(\sigma_1)$  получается из подынтегральной функции во втором интеграле заменой символа  $\Pi$  на  $Q$ , значения  $t = 0$  на  $t = T$  и  $\tau_1$  на  $\sigma_1$ .

Приравнявая в первой системе из (2.4) коэффициенты при  $\varepsilon^2$  в разложении по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , получаем

$$\frac{d\bar{x}_0}{dt} = A_0(t)\bar{x}_2 + A_1(t)\bar{x}_1 + A_2(t)\bar{x}_0 + B_0(t)\bar{u}_1 + B_1(t)\bar{u}_0 + f_1(t). \quad (3.18)$$

Уравнение (3.18) перепишем в виде

$$0 = A_0(t)(I - P(t))\bar{x}_2 + A_1(t)P(t)\bar{x}_1 + B_0(t)\bar{u}_1 + \eta(t), \quad (3.19)$$

где  $\eta(t) = A_1(t)(I - P(t))\bar{x}_1 + A_2(t)\bar{x}_0 + B_1(t)\bar{u}_0 + f_1(t) - d\bar{x}_0(t)/dt$  — известная функция.

Применяя к равенству (3.19) оператор  $Q(t)$ , устанавливаем

$$0 = M(t)P(t)\bar{x}_1 + Q(t)B_0(t)\bar{u}_1 + Q(t)\eta(t). \quad (3.20)$$

Используя соотношения (3.15), (3.14), а также (3.19) и (3.20), получаем, что в  $\tilde{J}_2$  интеграл по отрезку  $[0, T]$  — известная величина.

Из второго уравнения системы (2.4) при  $i = 1$ , приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon$  в разложении по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , с учетом (3.5) выводим

$$\frac{dP(0)\Pi_{10}x}{d\tau_1} = A_0(0)(I - P(0))\Pi_{11}x + (A_1(0) + \frac{dA_0}{dt}(0)\tau_1)P(0)\Pi_{10}x + B_0(0)\Pi_{10}u. \quad (3.21)$$

Легко доказать тождество

$$Q(t)\frac{dA_0}{dt}(t)P(t) = 0. \quad (3.22)$$

Применяя к равенству (3.21) оператор  $Q(0)$ , с учетом (3.22) получаем

$$Q(0)\frac{dP(0)\Pi_{10}x}{d\tau_1} = M(0)P(0)\Pi_{10}x + Q(0)B_0(0)\Pi_{10}u, \quad \tau_1 \geq 0. \quad (3.23)$$

Из (2.5) найдем начальное условие

$$P(0)\Pi_{10}x(0) = P(0)(x^0 - \bar{x}_0(0) - \Pi_{20}x(0)). \quad (3.24)$$

В силу условия 4 справедливо тождество

$$\frac{dP(t)}{dt}g_0(t) = -P(t)\frac{dg_0(t)}{dt}.$$

Отсюда следует

$$\frac{d(I - P(t))g_0(t)}{dt} = \frac{dg_0(t)}{dt}.$$

Дифференцируя первое уравнение системы (3.15) по  $t$  и учитывая последнее равенство, имеем

$$\frac{dg_0(t)}{dt} = \frac{dA_0(t)'}{dt}(I - Q(t))\bar{\varphi}_0(t) + A_0(t)\frac{d(I - Q(t))\bar{\varphi}_0(t)}{dt}. \quad (3.25)$$

Используя (3.14) и соотношения (3.15), (3.25) при  $t = 0$ , а также уравнения (3.21), (3.23), выводим следующее выражение для интеграла по промежутку  $[0, +\infty)$  в  $\tilde{J}_2$ :

$$-\langle \bar{\varphi}_0(0), P(0)\Pi_{10}x(0) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\langle P(0)\Pi_{10}x, W_1(0)P(0)\Pi_{10}x \rangle + \langle \Pi_{10}u, R_0(0)\Pi_{10}u \rangle) d\tau_1.$$

Аналогичным образом можно получить выражение для интеграла в  $\tilde{J}_2$  по промежутку  $(-\infty, 0]$ .

С учетом найденных выражений для интегралов по промежуткам  $[0, +\infty)$ ,  $(-\infty, 0]$  и начального условия (3.24) получаем из  $\tilde{J}_2$  выражение, обозначаемое через  $\Pi_{10}J + Q_{10}J$ , где

$$\Pi_{10}J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\langle P(0)\Pi_{10}x, W_1(0)P(0)\Pi_{10}x \rangle + \langle \Pi_{10}u, R_0(0)\Pi_{10}u \rangle) d\tau_1, \quad (3.26)$$

$$Q_{10}J = \langle \bar{\varphi}_0(T), P(T)Q_{10}x(0) \rangle + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (\langle P(T)Q_{10}x, W_1(T)P(T)Q_{10}x \rangle + \langle Q_{10}u, R_0(T)Q_{10}u \rangle) d\sigma_1. \quad (3.27)$$

Рассмотрим задачу  $\Pi_{10}P$  минимизации функционала (3.26) на траекториях уравнения (3.23) с начальным условием (3.24). В силу принципа максимума Понтрягина [16] оптимальное управление можно представить в виде

$$\Pi_{10}u = R_0(0)^{-1}B_0(0)'Q(0)\Pi_{10}\varphi, \quad (3.28)$$

где  $Q(0)\Pi_{10}\varphi(\tau_1)$  — решение задачи

$$P(0)\frac{dQ(0)\Pi_{10}\varphi}{d\tau_1} = P(0)W_1(0)P(0)\Pi_{10}x - M(0)'Q(0)\Pi_{10}\varphi, \quad \tau_1 \geq 0, \quad (3.29)$$

$$Q(0)\Pi_{10}\varphi(+\infty) = 0.$$

Решая задачу (3.23), (3.24), (3.28), (3.29), единственным образом определяем оптимальное управление  $\Pi_{10}u(\tau_1)$  и оптимальную траекторию  $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1)$  для задачи  $\Pi_{10}P$ .

Таким образом, функция  $\Pi_{10}x(\tau_1)$  найдена. Более того, из (3.21) получается выражение для  $(I - P(0))\Pi_{11}x(\tau_1)$ :

$$(I - P(0))\Pi_{11}x$$

$$= A_0(0)^+(I - Q(0))\left(\frac{dP(0)\Pi_{10}x}{d\tau_1} - (A_1(0) + \frac{dA_0}{dt}(0)\tau_1)P(0)\Pi_{10}x - B_0(0)\Pi_{10}u\right). \quad (3.30)$$

Из третьего уравнения системы (2.4) при  $i = 1$ , приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon$  в разложении по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , с учетом (3.5) получаем

$$\frac{dP(T)Q_{10}x}{d\sigma_1} = A_0(T)(I - P(T))Q_{11}x + (A_1(T) + \frac{dA_0}{dt}(T)\sigma_1)P(T)Q_{10}x + B_0(T)Q_{10}u. \quad (3.31)$$

Применяя к этому уравнению оператор  $Q(T)$ , с учетом (3.22) имеем

$$Q(T)\frac{dP(T)Q_{10}x}{d\sigma_1} = M(T)P(T)Q_{10}x + Q(T)B_0(T)Q_{10}u, \quad \sigma_1 \leq 0. \quad (3.32)$$

Рассмотрим задачу  $Q_{10}P$  минимизации функционала (3.27) на траекториях системы (3.32) с условием

$$P(T)Q_{10}x(-\infty) = 0. \quad (3.33)$$

В силу принципа максимума Понтрягина [16] оптимальное управление для задачи  $Q_{10}P$  определяется соотношением

$$Q_{10}u = R_0(T)^{-1}B_0(T)'Q(T)Q_{10}\varphi, \quad (3.34)$$

где  $Q(T)Q_{10}\varphi(\sigma_1)$  — решение задачи

$$P(T)\frac{dQ(T)Q_{10}\varphi}{d\sigma_1} = P(T)W_1(T)P(T)Q_{10}x - M(T)'Q(T)Q_{10}\varphi, \quad \sigma_1 \leq 0, \quad (3.35)$$

$$P(T)Q(T)Q_{10}\varphi(0) = -P(T)\bar{\varphi}_0(T).$$

Решая задачу (3.32)–(3.35), единственным образом находим оптимальное управление  $Q_{10}u(\sigma_1)$  и оптимальную траекторию  $P(T)Q_{10}x(\sigma_1)$  для задачи  $Q_{10}P$ .

Таким образом, функция  $Q_{10}x(\sigma_1)$  найдена. Более того, из (3.31) получается функция  $(I - P(T))Q_{11}x(\sigma_1)$ :

$$(I - P(T))Q_{11}x$$

$$= A_0(T)^+(I - Q(T))\left(\frac{dP(T)Q_{10}x}{d\sigma_1} - (A_1(T) + \frac{dA_0}{dt}(T)\sigma_1)P(T)Q_{10}x - B_0(T)Q_{10}u\right). \quad (3.36)$$

Итак, найдено приближение нулевого порядка для оптимальной траектории задачи (1.1)–(1.3).

#### 4. Определение оставшихся членов асимптотики нулевого порядка для оптимального управления

Обозначим через  $\tilde{J}_3$  выражение, полученное из  $J_3$  после отбрасывания известных слагаемых. Учитывая условие 4, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{J}_3 = & \int_0^T \left( \langle (I - P(t))\bar{x}_3, g_0(t) \rangle + \langle \bar{u}_2, R_0(t)\bar{u}_0 \rangle + \langle P(t)\bar{x}_2, W_1(t)P(t)\bar{x}_0 + g_1(t) \rangle \right. \\ & + \langle (I - P(t))\bar{x}_2, W_0(t)(I - P(t))\bar{x}_1 + W_1(t)P(t)\bar{x}_0 + g_1(t) \rangle + \langle P(t)\bar{x}_1, \frac{1}{2}W_1(t)P(t)\bar{x}_1 \\ & \left. + W_1(t)(I - P(t))\bar{x}_1 + W_2(t)\bar{x}_0 + g_2(t) \rangle + \langle \bar{u}_1, \frac{1}{2}R_0(t)\bar{u}_1 + R_1(t)\bar{u}_0 \rangle \right) dt \\ & + \int_0^{+\infty} \left( \langle (I - P(0))\Pi_{12}x, g_0(0) \rangle + \langle \Pi_{11}u, R_0(0)\bar{u}_0(0) \rangle + \langle P(0)\Pi_{11}x, W_1(0)P(0)\bar{x}_0(0) + g_1(0) \right. \\ & \left. + \frac{dg_0}{dt}(0)\tau_1 \right) + \langle W_1(0)P(0)\bar{x}_1(0) + W_1(0)P(0)\Pi_{11}x, P(0)\Pi_{10}x \rangle + \langle \bar{u}_1(0) + \Pi_{11}u, R_0(0)\Pi_{10}u \rangle \rangle d\tau_1 \\ & + \int_{-\infty}^0 Q_{11}(\sigma_1)d\sigma_1 + \int_0^{+\infty} \left( \langle (I - P(0))\Pi_{21}x, g_0(0) \rangle + \langle \Pi_{20}u, R_0(0)\bar{u}_0(0) \rangle + \langle \Pi_{20}u, R_0(0)\Pi_{10}u(0) \rangle \right. \\ & \left. + \langle (I - P(0))\Pi_{21}x, W_0(0)(I - P(0))\Pi_{20}x \rangle + \frac{1}{2}\langle \Pi_{20}u, R_0(0)\Pi_{20}u \rangle \right) d\tau_2 + \int_{-\infty}^0 Q_{20}(\sigma_2)d\sigma_2. \end{aligned}$$

Здесь  $Q_{11}(\sigma_1)$  имеет вид подынтегральной функции во втором интеграле из  $\tilde{J}_3$  по  $\tau_1$  с заменой символа  $\Pi$  на  $Q$ , значения  $t = 0$  — на  $t = T$  и  $\tau_1$  — на  $\sigma_1$ , подобным образом получается  $Q_{20}(\sigma_2)$  из подынтегральной функции в четвертом интеграле из  $\tilde{J}_3$  по  $\tau_2$  с заменой символа  $\Pi$  на  $Q$ , значения  $t = 0$  — на  $t = T$  и  $\tau_2$  — на  $\sigma_2$ .

Приравнивая в первом уравнении системы (2.4) коэффициенты при  $\varepsilon^3$  в разложении по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , с учетом найденных членов асимптотики получаем

$$\frac{dP(t)\bar{x}_1}{dt} = A_0(t)(I - P(t))\bar{x}_3 + A_1(t)\bar{x}_2 + A_2(t)P(t)\bar{x}_1 + B_0(t)\bar{u}_2 + B_1(t)\bar{u}_1 + \eta_1(t), \quad (4.1)$$

где  $\eta_1(t) = A_3(t)\bar{x}_0 + B_2(t)\bar{u}_0 + f_2(t) + A_2(t)(I - P(t))\bar{x}_1 - \frac{d(I - P(t))\bar{x}_1}{dt}$  — известная функция.

Применяя к равенству (4.1) оператор  $Q(t)$ , имеем

$$\begin{aligned} Q(t)\frac{dP(t)\bar{x}_1}{dt} &= M(t)P(t)\bar{x}_2 + Q(t)B_0(t)\bar{u}_2 \\ &+ Q(t)(A_1(t)(I - P(t))\bar{x}_2 + A_2(t)P(t)\bar{x}_1 + B_1(t)\bar{u}_1 + \eta_1(t)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Используя (3.15), (3.14) и уравнения (4.1), (4.2), после отбрасывания известных слагаемых выводим следующее выражение для интеграла по отрезку  $[0, T]$  в  $\tilde{J}_3$ :

$$\begin{aligned} & \langle \bar{\varphi}_0(T), P(T)\bar{x}_1(T) \rangle - \langle \bar{\varphi}_0(0), P(0)\bar{x}_1(0) \rangle \\ & + \int_0^T \left( \langle (I - P(t))\bar{x}_2, \xi_1(t) \rangle + \left\langle P(t)\bar{x}_1, \frac{1}{2}W_1(t)P(t)\bar{x}_1 + \xi_2(t) \right\rangle + \left\langle \bar{u}_1, \frac{1}{2}R_0(t)\bar{u}_1 + \xi_3(t) \right\rangle \right) dt, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= W_0(t)(I - P(t))\bar{x}_1 + W_1(t)P(t)\bar{x}_0 + g_1(t) - A_1(t)'\bar{\varphi}_0, \\ \xi_2(t) &= W_1(t)(I - P(t))\bar{x}_1 + W_2(t)\bar{x}_0 + g_2(t) - \frac{d\bar{\varphi}_0}{dt}(t) - A_2(t)'\bar{\varphi}_0, \\ \xi_3(t) &= R_1(t)\bar{u}_0 - B_1(t)'\bar{\varphi}_0\end{aligned}$$

— известные функции.

Из второго уравнения системы (2.4) при  $i = 1$ , приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon^2$  в разложении по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , с учетом (3.30) получаем

$$\begin{aligned}\frac{dP(0)\Pi_{11}x}{d\tau_1} &= A_0(0)(I - P(0))\Pi_{12}x + \left( A_1(0) + \frac{dA_0}{dt}(0)\tau_1 \right) P(0)\Pi_{11}x \\ &\quad + B_0(0)\Pi_{11}u + \Pi_{10}\eta(\tau_1),\end{aligned}\quad (4.4)$$

где  $\Pi_{10}\eta(\tau_1)$  — известная функция.

Применяя к этому равенству оператор  $Q(0)$ , в силу (3.22) имеем

$$Q(0)\frac{dP(0)\Pi_{11}x}{d\tau_1} = M(0)P(0)\Pi_{11}x + Q(0)B_0(0)\Pi_{11}u + Q(0)\Pi_{10}\eta(\tau_1).\quad (4.5)$$

Используя (3.15), (3.14), (3.25) при  $t = 0$  и уравнения (4.4), (4.5), после отбрасывания известных слагаемых получаем следующее выражение для интеграла от суммы первых трех скалярных произведений в интеграле по промежутку  $[0, +\infty)$  по  $\tau_1$  в  $\tilde{J}_3$ :

$$-\langle P(0)\Pi_{11}x(0), \bar{\varphi}_0(0) \rangle.$$

Для интеграла от суммы двух последних скалярных произведений в интеграле по промежутку  $[0, +\infty)$  по  $\tau_1$  в  $\tilde{J}_3$ , используя уравнение в (3.29), соотношения (3.28), (3.20) при  $t = 0$  и уравнение (4.5), после отбрасывания известных слагаемых получаем

$$-\langle Q(0)\Pi_{10}\varphi(0), P(0)(\bar{x}_1(0) + \Pi_{11}x(0)) \rangle.$$

Таким образом, после отбрасывания известных слагаемых имеем следующее выражение для интеграла по промежутку  $[0, +\infty)$  по  $\tau_1$  в  $\tilde{J}_3$ :

$$-\langle Q(0)\Pi_{10}\varphi(0), P(0)(\bar{x}_1(0) + \Pi_{11}x(0)) \rangle - \langle \bar{\varphi}_0(0), P(0)\Pi_{11}x(0) \rangle.\quad (4.6)$$

Аналогичным образом, после отбрасывания известных слагаемых получаем следующее выражение для интеграла в  $\tilde{J}_3$  по промежутку  $(-\infty, 0]$  по  $\sigma_1$ :

$$\langle Q(T)Q_{10}\varphi(0), P(T)(\bar{x}_1(T) + Q_{11}x(0)) \rangle + \langle \bar{\varphi}_0(T), P(T)Q_{11}x(0) \rangle.\quad (4.7)$$

Из второго уравнения системы (2.4) при  $i = 2$ , приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon$  в разложении по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , имеем

$$\frac{d\Pi_{21}x}{d\tau_2} = A_0(0)\Pi_{21}x + B_0(0)\Pi_{20}u + A_1(0)\Pi_{20}x.\quad (4.8)$$

Последнее уравнение эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d(I - P(0))\Pi_{21}x}{d\tau_2} &= (I - P(0))A_0(0)(I - P(0))\Pi_{21}x \\ &\quad + (I - P(0))B_0(0)\Pi_{20}u + (I - P(0))A_1(0)\Pi_{20}x,\end{aligned}\quad (4.9)$$

$$\frac{dP(0)\Pi_{21}x}{d\tau_2} = P(0)A_0(0)(I - P(0))\Pi_{21}x + P(0)B_0(0)\Pi_{20}u + P(0)A_1(0)\Pi_{20}x.\quad (4.10)$$

Применим оператор  $Q(0)$  к (4.8):

$$Q(0) \frac{d\Pi_{21}x}{d\tau_2} = Q(0)B_0(0)\Pi_{20}u + Q(0)A_1(0)\Pi_{20}x. \quad (4.11)$$

Используя (3.15), (3.14) при  $t = 0$ , соотношение (3.28) — при  $\tau_1 = 0$ , уравнения (4.8) и (4.11), после отбрасывания известных слагаемых получаем для интеграла из  $\tilde{J}_3$  по промежутку  $[0, +\infty)$  по  $\tau_2$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} & -\langle \bar{\varphi}_0(0) + Q(0)\Pi_{10}\varphi(0), \Pi_{21}x(0) \rangle \\ & + \int_0^{+\infty} \left( \langle (I - P(0))\Pi_{21}x, W_0(0)(I - P(0))\Pi_{20}x \rangle + \frac{1}{2} \langle \Pi_{20}u, R_0(0)\Pi_{20}u \rangle \right) d\tau_2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Аналогичным образом для интеграла из  $\tilde{J}_3$  по промежутку  $(-\infty, 0]$  по  $\sigma_2$  с учетом (3.10) имеем

$$\langle \bar{\varphi}_0(T) + Q(T)Q_{10}\varphi(0), Q_{21}x(0) \rangle + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \langle Q_{20}u, R_0(T)Q_{20}u \rangle d\sigma_2. \quad (4.13)$$

Из (4.3), (4.6), (4.7), (4.12), (4.13), используя (2.5), начальные условия для  $Q(T)Q_{10}\varphi(\sigma_1)$  в задаче (3.35) и следующее из (2.5):

$$(I - P(0))\Pi_{21}x(0) = -(I - P(0))\bar{x}_1(0) - (I - P(0))\Pi_{11}x(0), \quad (4.14)$$

получаем из  $\tilde{J}_3$  после отбрасывания известных слагаемых выражение, обозначаемое  $\bar{J}_1 + \Pi_{20}J + Q_{20}J$ , где

$$\bar{J}_1 = \int_0^T \left( \langle (I - P(t))\bar{x}_2, \xi_1(t) \rangle + \langle P(t)\bar{x}_1, \frac{1}{2}W_1(t)P(t)\bar{x}_1 + \xi_2(t) \rangle + \langle \bar{u}_1, \frac{1}{2}R_0(t)\bar{u}_1 + \xi_3(t) \rangle \right) dt,$$

$$\Pi_{20}J = \int_0^{+\infty} \left( \langle (I - P(0))\Pi_{21}x, W_0(0)(I - P(0))\Pi_{20}x \rangle + \frac{1}{2} \langle \Pi_{20}u, R_0(0)\Pi_{20}u \rangle \right) d\tau_2, \quad (4.15)$$

$$Q_{20}J = \langle \bar{\varphi}_0(T) + Q(T)Q_{10}\varphi(0), (I - P(T))Q_{21}x(0) \rangle + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \langle Q_{20}u, R_0(T)Q_{20}u \rangle d\sigma_2. \quad (4.16)$$

Функции  $\Pi_{20}u(\tau_2)$ ,  $(I - P(0))\Pi_{21}x(\tau_2)$  являются решением линейно-квадратичной задачи  $\Pi_{20}P$  минимизации функционала (4.15) на траекториях (4.9) с начальным условием (4.14). В силу принципа максимума Понтрягина [16] оптимальное управление определяется соотношением

$$\Pi_{20}u = R_0(0)^{-1}B_0(0)'(I - P(0))\Pi_{20}\varphi, \quad (4.17)$$

где  $(I - P(0))\Pi_{20}\varphi(\tau_2)$  — решение задачи

$$\frac{d(I - P(0))\Pi_{20}\varphi}{d\tau_2} = (I - P(0))W_0(0)(I - P(0))\Pi_{20}x - (I - P(0))A_0(0)'(I - P(0))\Pi_{20}\varphi, \quad (4.18)$$

$$(I - P(0))\Pi_{20}\varphi(+\infty) = 0. \quad (4.19)$$

Решая задачу (4.9), (4.14), (4.17)–(4.19), определяем  $(I - P(0))\Pi_{21}x(\tau_2)$ ,  $(I - P(0))\Pi_{20}\varphi(\tau_2)$ ,  $\Pi_{20}u(\tau_2)$ .

Из (4.10) получаем функцию  $P(0)\Pi_{21}x(\tau_2)$ . Следовательно, найдена функция  $\Pi_{21}x(\tau_2)$ .

Из третьего уравнения системы (2.4) при  $i = 2$ , приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon$  в разложении по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , с учетом (3.10) получаем

$$\frac{dQ_{21}x}{d\sigma_2} = A_0(T)Q_{21}x + B_0(T)Q_{20}u.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе двух уравнений

$$\frac{d(I - P(T))Q_{21}x}{d\sigma_2} = (I - P(T))A_0(T)(I - P(T))Q_{21}x + (I - P(T))B_0(T)Q_{20}u, \quad (4.20)$$

$$\frac{dP(T)Q_{21}x}{d\sigma_2} = P(T)A_0(T)(I - P(T))Q_{21}x + P(T)B_0(T)Q_{20}u. \quad (4.21)$$

Функции  $Q_{20}u(\sigma_2)$ ,  $(I - P(T))Q_{21}x(\sigma_2)$  являются решением линейно-квадратичной задачи  $Q_{20}P$  минимизации функционала (4.16) на траекториях системы (4.20) с условием

$$(I - P(T))Q_{21}x(-\infty) = 0. \quad (4.22)$$

В силу принципа максимума Понтрягина оптимальное управление для задачи  $Q_{20}P$  определяется соотношением

$$Q_{20}u = R_0(T)^{-1}B_0(T)'(I - P(T))Q_{20}\varphi, \quad (4.23)$$

где  $(I - P(T))Q_{20}\varphi(\sigma_2)$  — решение задачи

$$\frac{d(I - P(T))Q_{20}\varphi}{d\sigma_2} = -(I - P(T))A_0(T)'(I - P(T))Q_{20}\varphi, \quad (4.24)$$

$$(I - P(T))Q_{20}\varphi(0) = -(I - P(T))(\bar{\varphi}_0(T) + Q(T)Q_{10}\varphi(0)). \quad (4.25)$$

Решая задачу (4.20), (4.22), (4.23)–(4.25), имеем  $Q_{20}u(\sigma_2)$  и  $(I - P(T))Q_{21}x(\sigma_2)$ .

Из (4.21) получаем функцию  $P(T)Q_{21}x(\sigma_2)$ . Следовательно, функция  $Q_{21}x(\sigma_2)$  найдена.

Таким образом, определена асимптотика нулевого порядка для оптимального управления.

Из вышеизложенного следует

**Теорема 1.** *При условиях 1–6 при помощи метода прямой схемы можно построить приближение нулевого порядка асимптотики вида (2.1) для решения задачи (1.1)–(1.3). □*

Последовательность нахождения членов асимптотики приведена в табл. 1.

**З а м е ч а н и е 1.** Наряду с определением членов асимптотики нулевого порядка для решения задачи (1.1)–(1.3) находятся члены асимптотики первого порядка  $(I - P(t))\bar{x}_1(t)$ ,  $(I - P(0))\Pi_{11}x(\tau_1)$ ,  $(I - P(T))Q_{11}x(\sigma_1)$ ,  $\Pi_{21}x(\tau_2)$ ,  $Q_{21}x(\sigma_2)$  (см. формулы (3.16), (3.30), (3.36), (4.9), (4.14), (4.10), (4.20), (4.22), (4.21)).

**З а м е ч а н и е 2.** Для определения  $\Pi_{20}u(\tau_2)$  и  $Q_{20}u(\sigma_2)$  достаточно решить только соответственно задачи (4.17)–(4.19) и (4.23)–(4.25).

Т а б л и ц а 1

Схема нахождения асимптотики нулевого порядка	
Члены асимптотики нулевого порядка	Формулы
$(I - P(t))\bar{x}_0(t)$ , $(I - P(0))\Pi_{10}x(\tau_1)$ , $(I - P(T))Q_{10}x(\sigma_1)$	(3.5)
$(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2)$	(3.6), (3.8)
$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2)$	(3.9)
$Q_{20}x(\sigma_2)$	(3.10)
$\bar{u}_0(t)$ , $P(t)\bar{x}_0(t)$	(3.13)–(3.15)
$\Pi_{10}u(\tau_1)$ , $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1)$	(3.23), (3.24), (3.28), (3.29)
$Q_{10}u(\sigma_1)$ , $P(T)Q_{10}x(\sigma_1)$	(3.32)–(3.35)
$\Pi_{20}u(\tau_2)$	(4.9), (4.14), (4.17)–(4.19)
$Q_{20}u(\sigma_2)$	(4.20), (4.22), (4.23)–(4.25)

### 5. Иллюстративный пример

Рассмотрим следующую задачу вида  $P_\varepsilon$ :

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^2 + 2t^2y + \varepsilon u^2) dt \rightarrow \min_u,$$

$$\varepsilon^2 \frac{dy}{dt} = -y - \varepsilon z + \varepsilon u,$$

$$\varepsilon^2 \frac{dz}{dt} = y + \varepsilon t,$$

$$y(0) = z(0) = 1.$$

$$\text{Здесь } x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad W(t, \varepsilon) = W_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(t, \varepsilon) = g_0(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R(t, \varepsilon) = R_0(t) = 1.$$

$$A(t, \varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t), \quad A_0(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t, \varepsilon) = B_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f(t, \varepsilon) = f_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1(t) = 0, \quad \lambda_2(t) = -1, \quad \text{Ker } A_0(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Ker } A_0(t)' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Im } A_0(t) = \left\{ \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Im } A_0(t)' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$Q(t)P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} : \text{Ker } A_0(t) \rightarrow \text{Ker } A_0(t)', \quad (Q(t)P(t))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} : \text{Ker } A_0(t)' \rightarrow \text{Ker } A_0(t),$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} : \text{Ker } A_0(t) \rightarrow \text{Ker } A_0(t)', \quad A_0(t)^+ = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{Im } A_0(t) \rightarrow \text{Im } A_0(t)'.$$

Легко видеть, что условия 1–6 выполняются.

Так как проекторы  $P(t)$  и  $Q(t)$  здесь постоянные, то будем обозначать их соответственно  $P$  и  $Q$ .

Ввиду (3.5), (3.10) имеем  $\bar{y}_0(t) = 0$ ,  $\Pi_{10}y(\tau_1) = 0$ ,  $Q_{10}y(\sigma_1) = 0$ ,  $Q_{20}y(\sigma_2) = Q_{20}z(\sigma_2) = 0$ .

Из (3.6), (3.8) следует  $\Pi_{20}y(\tau_2) = e^{-\tau_2}$ . Из (3.9) получаем  $\Pi_{20}z(\tau_2) = -e^{-\tau_2}$ .

Из первого уравнения в (3.15) находим  $(I - Q)\bar{\varphi}_0(t) = \begin{pmatrix} -t^2/2 \\ t^2/2 \end{pmatrix}$ . Из второго уравнения

в (3.15) имеем  $Q\bar{\varphi}_0(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^2/2 \end{pmatrix}$ . Из (3.14) следует  $\bar{u}_0(t) = 0$ . Из (3.13):  $\bar{z}_0(t) = t$ .

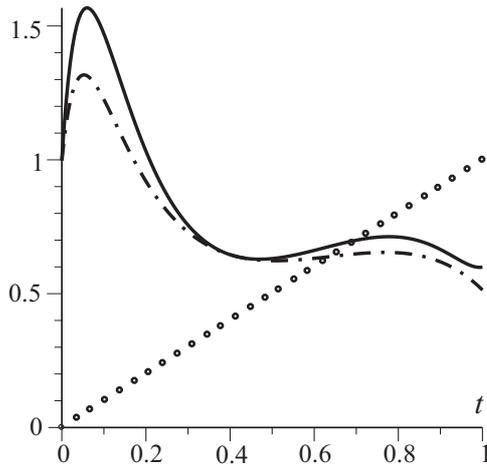
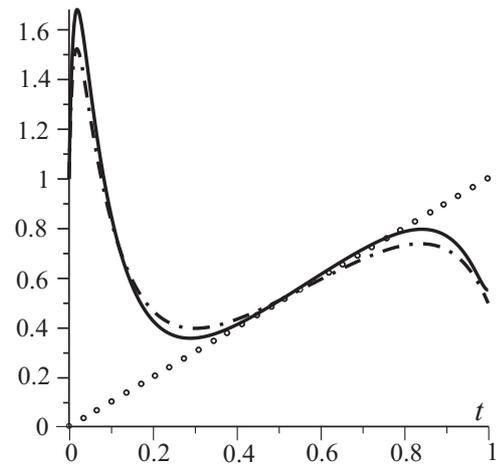
В результате решения задачи (3.23), (3.24), (3.28), (3.29) имеем

$$Q\Pi_{10}\varphi(\tau_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{10}u(\tau_1) = 0, \quad \Pi_{10}z(\tau_1) = 2e^{-\tau_1}.$$

Решая задачу (3.32)–(3.35), получаем

$$QQ_{10}\varphi(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -e^{\sigma_1} \\ -e^{\sigma_1} \end{pmatrix}, \quad Q_{10}u(\sigma_1) = -e^{\sigma_1}, \quad Q_{10}z(\sigma_1) = -e^{\sigma_1}/2.$$

Путем решения задачи (4.18), (4.19) находим  $(I - P)\Pi_{20}\varphi(\tau_2) = \begin{pmatrix} -e^{-\tau_2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Тогда из (4.17) следует  $\Pi_{20}u(\tau_2) = -e^{-\tau_2}/2$ .

Рис. 1.  $\varepsilon = 0.2$ Рис. 2.  $\varepsilon = 0.1$ 

Решая задачу (4.24), (4.25), получаем  $(I - P(T))Q_{20}\varphi(\sigma_2) = \begin{pmatrix} e^{\sigma_2} \\ 0 \end{pmatrix}$ . Далее из (4.23):  $Q_{20}u(\sigma_2) = e^{\sigma_2}$ .

Итак, найдены следующие приближения к  $y(t, \varepsilon)$ ,  $z(t, \varepsilon)$  и  $u(t, \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} \bar{y}_0(t) &= 0, & \bar{z}_0(t) &= t, & \bar{u}_0(t) &= 0, \\ \tilde{y}_0(t, \varepsilon) &= e^{-t/\varepsilon^2}, & \tilde{z}_0(t, \varepsilon) &= t + 2e^{-t/\varepsilon} - e^{(t-1)/\varepsilon}/2 - e^{-t/\varepsilon^2}, \\ \tilde{u}_0(t, \varepsilon) &= -e^{(t-1)/\varepsilon} - e^{-t/\varepsilon^2}/2 + e^{(t-1)/\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{x}_0(t, \varepsilon)$  означает асимптотическое приближение нулевого порядка к функции  $x(t, \varepsilon)$ , т. е.

$$\tilde{x}_0(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \sum_{i=1}^2 \Pi_{i0}x(\tau_i) + \sum_{i=1}^2 Q_{i0}x(\sigma_i).$$

Как указано в замечании 1, при определении асимптотического решения нулевого порядка посредством приведенного в статье алгоритма можно найти некоторые члены приближения первого порядка. В рассматриваемом примере это функции:  $\bar{y}_1(t)$ ,  $\Pi_{11}y(\tau_1)$ ,  $Q_{11}y(\sigma_1)$ ,  $\Pi_{21}y(\tau_2)$ ,  $\Pi_{21}z(\tau_2)$ ,  $Q_{21}y(\sigma_2)$ ,  $Q_{21}z(\sigma_2)$ .

Отметим, что представленный здесь иллюстративный пример и алгоритм нахождения членов асимптотики в общем отличаются от [10], но асимптотические приближения нулевого порядка для оптимального управления и оптимальной траектории  $y(t, \varepsilon)$  в этом примере совпадают с [10]. Приведем графики для траекторий  $z(t, \varepsilon)$ ,  $\bar{z}_0(t)$ ,  $\tilde{z}_0(t, \varepsilon)$  (рис. 1 и 2), где приближение нулевого порядка отличается от [10]. Сплошная линия представляет собой график точного решения  $z(t, \varepsilon)$ , линия, состоящая из кружков, — график  $\bar{z}_0(t)$ , штрих-пунктирная линия — график приближения нулевого порядка  $\tilde{z}_0(t, \varepsilon)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
2. Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012 // Int. J. Inf. Syst. Sci. 2014. Vol. 9, no. 1. P. 1–36.
3. Курина Г.А., Калашникова М.А. Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // Автоматика и телемеханика. 2022. № 11. С. 3–61. doi: 10.31857/S0005231022110010
4. Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Об одной задаче теории сингулярных возмущений // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 10. С. 1736–1747.

5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978. 106 с.
6. Курина Г.А., Хоай Н.Т. Проекторный подход к алгоритму Бутузова — Нефедова асимптотического решения одного класса сингулярно возмущенных задач в критическом случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 12. С. 2073–2084. doi: 10.31857/S0044466920120078
7. Данилин А.Р., Захаров С.В., Коврижных О.О., Леликова Е.Ф., Першин И.В., Хачай О.Ю. Екатеринбургское наследие Арлена Михайловича Ильина // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 42–66. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-42-66
8. Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г. Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // Автоматика и телемеханика. 1989. Т. 7. С. 71–82.
9. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Прямая схема построения асимптотики решения классических задач оптимального управления // Программные системы: Теоретические основы и приложения. М.: Наука, Физматлит, 1999. С. 44–55.
10. Kurina G., Nguyen T.H. Zero-order asymptotic solution of a class of singularly perturbed linear-quadratic problems with weak controls in a critical case // Optim. Control Appl. Meth. 2019. Vol. 40, no. 5. P. 859–879. doi: 10.1002/oca.2514
11. Sibuya Y. Some global properties of matrices of functions of one variable // Math. Ann. 1965. Vol. 161. P. 67–77.
12. Данилин А.Р., Коврижных О.О. Асимптотика оптимального времени перевода линейной управляемой системы с нулевыми вещественными частями собственных значений матрицы при быстрых переменных на неограниченное целевое множество. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 48–61. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-48-61
13. Данилин А.Р., Коврижных О.О. Асимптотика решения одной задачи быстродействия с неограниченным целевым множеством для линейной системы в критическом случае. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 1. С. 58–73. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73
14. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
15. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. Физматлит, 1965. 424 с.
16. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.

Поступила 25.01.2023

После доработки 15.02.2023

Принята к публикации 20.02.2023

Курина Галина Алексеевна

д-р физ.-мат. наук, профессор

Воронежский государственный университет

г. Воронеж;

Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”

Российской академии наук

г. Москва

e-mail: kurina@math.vsu.ru

Нгуен Тхи Хоай

канд. физ.-мат. наук

Научный университет Вьетнамского национального университета

г. Ханой

e-mail: nguyenthinhoai@hus.edu.vn

## REFERENCES

1. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asymptotic expansions of solutions to singularly perturbed equations*, Moscow, Nauka Publ., 1973, 272 p. (in Russian).
2. Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012. *Int. J. Inf. Syst. Sci.*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.

3. Kurina G.A., Kalashnikova M.A. Singularly perturbed problems with multi-tempo fast variables. *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 11, pp. 1679–1723. doi: 10.1134/S0005117922110017
4. Butuzov V.F., Nefedov N.N. On a problem in singular perturbation theory. *Differ. Uravn.* 1976, vol. 12, no. 10, pp. 1736–1747 (in Russian).
5. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Singularly perturbed equations in the critical case*. Madison: University of Wisconsin-Madison, 1980.
6. Kurina G.A., Hoai N.T. Projector approach to the Butuzov–Nefedov algorithm for asymptotic solution of a class of singularly perturbed problems in critical case. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 12, pp. 2007–2018. doi: 10.1134/S0965542520120076
7. Danilin A.R., Zakharov S.V., Kovrizhnykh O.O., Lelikova E.F., Pershin I.V., Khachay O.Yu. The Yekaterinburg heritage of Arlen Mikhailovich Il'in. *Trudy Inst. Math. Mech. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 42–66 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-42-66
8. Belokopytov S.V., Dmitriev M.G. Solution of classical optimal control problems with a boundary layer. *Autom. Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 7, pp. 907–917.
9. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Direct scheme of constructing asymptotics of classical optimal control problems solution. *Program systems: Theoretical foundations and applications*, Moscow: Nauka. Fizmatlit Publ., 1999, pp. 44–55 (in Russian).
10. Kurina G., Nguyen T.H. Zero-order asymptotic solution of a class of singularly perturbed linear-quadratic problems with weak controls in a critical case. *Optim. Control Appl. Meth.*, 2019, vol. 40, no. 5, pp. 859–879. doi: 10.1002/oca.2514
11. Sibuya Y. Some global properties of matrices of functions of one variable. *Math. Ann.*, 1965, vol. 161, pp. 67–77.
12. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Asymptotics of the optimal time of transferring a linear control system with zero real parts of the eigenvalues of the matrix at the fast variables to an unbounded target set. *Trudy Inst. Math. Mech. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 48–61 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-48-61
13. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Asymptotics of a solution to a time-optimal control problem with an unbounded target set for a linear system in the critical case. *Trudy Inst. Math. Mech. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 58–73 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73
14. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. Berlin, Heidelberg, 1966. Translated to Russian under the title *Teoriya vozmushchenii lineinykh operatorov*, Moscow, Mir Publ., 1972, 740 p.
15. Elsgolts L.E. *Differential equations and the calculus of variations*. University Press of the Pacific, 2003, 444 p. ISBN: 978-1410210678 . Original Russian text published in El'sgol'ts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie*. Moscow: Nauka Publ., 1965, 424 p.
16. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. NY, London, John Wiley & Sons, 1962, 360 p. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.

Received January 25, 2023

Revised February 15, 2023

Accepted February 20, 2023

**Funding Agency:** The research of the first author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 21-11-00202), and the research of the second author was supported by the Vietnam National Foundation for Science and Technology Development (NAFOSTED) (project no. 101.02-2021.43).

*Galina Alekseevna Kurina*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh, 394018 Russia; Federal Research Center “Informatics and Control”, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia, e-mail: kurina@math.vsu.ru .

*Nguyen Thi Hoai*, PhD. Phys.-Math., VNU, University of Science, Hanoi, Vietnam, e-mail: nguyenthinhoai@hus.edu.vn .

Cite this article as: G. A. Kurina, N. T. Hoai. Zero-order asymptotics for the solution of one type of singularly perturbed linear–quadratic control problems in the critical case, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 127–142 .