ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-9-16

ЮРИЙ НИКОЛАЕВИЧ СУББОТИН

(*Светлой памяти ученого*)

**Р. Р. Акопян, Н. Ю. Антонов, В. В. Арестов,
А. Г. Бабенко, Н. В. Байдакова, В. И. Бердышев, В. В. Васин,
С. И. Новиков, Н. Л. Пацко, А. Г. Ченцов, Н. И. Черных, В. Т. Шевалдин**

15 августа 2021 г. ушел из жизни наш коллега и добрый товарищ, член-корреспондент РАН, профессор Юрий Николаевич Субботин — выдающийся специалист в области теории аппроксимации, теории экстремальных задач, всплесков и общепризнанный авторитет мирового уровня в теории и в практических приложениях сплайнов и всплесков, создатель Уральской школы по теории сплайнов.

Ю. Н. Субботин родился в г. Ивделе Свердловской области. Родители Юрия Николаевича родом из Архангельской губернии, в тридцатые годы прошлого столетия семья переехала в Свердловскую область. Мать Наталия Семеновна была медсестрой, отец Николай Михайлович работал в золотодобывающей артели. Когда он ушел на фронт, Юрию, старшему из трех сыновей, было 5 лет. В 1944 г. отец Юрия Николаевича погиб в бою за город Белая Церковь.

Талант к математике у Юрия Николаевича проявился еще в детстве, одноклассники называли его Архимедом. В 1954 г. он поступил учиться на физико-математический факультет Уральского государственного университета им. А. М. Горького. Юрию Николаевичу повезло с первым научным руководителем — профессор Александр Александрович Меленцов предложил студенту третьего курса интересные темы курсовой и дипломной работы. В это время в Свердловск приехал Сергей Борисович Стечкин и начал набирать способных выпускников в аспирантуру. Одним из них по рекомендации А. А. Меленцова стал Юрий Николаевич Субботин. Сергей Борисович сразу предложил ему нестандартную работу: проверить, насколько окончательны некоторые теоремы, сформулированные в учебниках по теории функций. В результате молодой математик более глубоко освоил функциональный анализ, научился строить контрпримеры, что впоследствии помогло ему при решении глубоких научных проблем. С 1961 по 1964 гг. Субботин работал на кафедре теории функций ассистентом.

С 1964 г. Юрий Николаевич — сотрудник Свердловского отделения математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (ныне ИММ УрО РАН). В 1974 г. он возглавил отдел теории приближения функций и проработал в этой должности несколько десятилетий. В 1991 г. Ю. Н. Субботин получил звание профессора, а в 2000 г. был избран член-корреспондентом РАН.

Первые научные работы Юрия Николаевича были посвящены задачам экстремальной интерполяции с наименьшим значением нормы производной произвольно заданного порядка n на классах интерполируемых последовательностей с ограничением на норму их конечных разностей. В 1960 г. приехавший в Свердловск профессор Н. Н. Яненко в беседе с С. Б. Стечкиным сформулировал вопрос, возникший у него в связи с применением теории разностных методов для решения краевых задач математической физики. Пусть заданы значения $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ некоторой бесконечной в обе стороны последовательности действительных чисел y и пусть n-е конечные разности $\Delta^n y_k$ этой последовательности ограничены сверху по модулю некоторой константой (например, единицей). Существует ли n раз дифференцируемая на числовой оси функция, принимающая в точках равномерной сетки (например, с шагом, равным 1) значения $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$? Если ответ на этот вопрос положительный, то чему равна наименьшая равномерная норма у n-х производных таких функций? Эту задачу (в экстремальной постановке) на одном из семинаров Сергей Борисович и предложил своему аспиранту. Более точно, требуется найти (или эффективно оценить сверху) величину

$$A_n = \sup\inf \|f^{(n)}\|_{L_\infty},$$

где нижняя грань берется по всем функциям $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, интерполирующим последовательность $\{y_k\}$, у которых $(n-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна, а верхняя грань — по всем последовательностям $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ таким, что $|\Delta^n y_k| \le 1$.

В тот момент уже были известны близкая по постановке интерполяционная задача Фавара (1940) и некоторые исследования американских математиков по теории сплайнов (они были в основном закрытыми). Субботин, видимо, не знал о работах Фавара и американцев и изучил только близкие работы советских математиков В. С. Рябенького, А. Ф. Филиппова и С. Л. Соболева.

На исследование задачи Яненко — Стечкина у Юрия Николаевича ушло несколько лет. Наконец, в 1965 г. Ю. Н. Субботин нашел точное решение этой задачи в терминах норм совершенных полиномиальных сплайнов с равномерными узлами (они выражаются через полиномы Бернулли). Он доказал, что экстремальной последовательностью является та, для которой $\Delta^n y_k = (-1)^k$ $(k\in\mathbb{Z})$ (это была одна из гипотез Сергея Борисовича Стечкина), а экстремальной функцией — интерполяционный полиномиальный сплайн степени n минимального дефекта с узлами “склейки” в точках исходной равномерной сетки, если число n нечетно, или в серединах между двумя соседними точками сетки, если число n четно. В своей первой работе 1965 г. Ю. Н. Субботин впервые построил сплайны четной степени с “правильными” узлами “склейки”, которые с тех пор успешно применяются в вычислительной математике. Кроме того, впервые в отечественной литературе на русском языке появился термин “сплайн”. Это был прорыв, пионерская работа, породившая целое направление в численных методах решения уравнений и в экстремальных задачах. Необходимо отметить, что для решения поставленной задачи он предложил два совершенно новых метода (один для оценки сверху величины A_n, а другой — для оценки снизу). Если метод для оценки снизу позволял правильно выбирать узлы “склейки”, то метод оценки сверху (теория бесконечно-разностных уравнений с применением полиномов Эйлера — Фробениуса и их обобщений) существенно опирался на далекие, на первый взгляд, от этой тематики результаты М. Г. Крейна по решению разностных и интегральных уравнений (впоследствии Ю. Н. Субботин передоказал эти результаты М. Г. Крейна своим, более простым, методом, используя теорию вычетов).

Позже Юрий Николаевич решил задачу экстремальной интерполяции Яненко — Стечкина на оси $\mathbb{R}$ и для L_p-норм при $1 \le p < \infty$ (1967), а также для интерполяции в среднем, при которой $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ представляют собой усредненные значения интерполируемой функции в случае, когда длины интервалов усреднения не превышают шага сетки (1974). Все эти результаты получили достойное признание зарубежных математиков (прежде всего, основателя теории сплайнов И. Шенберга, а также К. де Бора, Л. Шумейкера и др.), были доложены на престижных международных конференциях и составили основное содержание его кандидатской (1967) и докторской (1974) диссертаций.

В ходе этих исследований Ю. Н. Субботин подробно изучил аппроксимативные свойства полиномиальных сплайнов: им были доказаны теоремы существования интерполяционных и интерполяционных в среднем сплайнов с учетом взаимного расположения узлов сплайна и точек интерполяции, получены оценки погрешности аппроксимации различных классов дифференцируемых функций, а также в периодическом случае найдены точные оценки снизу колмогоровских поперечников некоторых соболевских классов функций в равномерной и интегральной метриках (в последней задаче он существенно развил исследования С. М. Никольского, Н. П. Корнейчука и В. М. Тихомирова). Особо отметим, что, используя собственные разработки по экстремальной интерполяции и ω-сплайны с равномерными узлами, Юрий Николаевич для периодических функций нашел точную оценку снизу для нечетного поперечника класса r раз дифференцируемых функций, у которых модуль непрерывности r-й производной не превосходит заданного выпуклого модуля непрерывности. В то время подобными задачами занимались в основном украинские математики во главе с будущим академиком НАН Украины Николаем Павловичем Корнейчуком, при этом применялись оригинальные методы Корнейчука, использующие Σ-перестановки функций. Субботин предложил новый линейный метод исследования нормы старшей производной сплайнов (с помощью установленных им неравенств типа Бернштейна для сплайнов и их обобщений) с последующим применением теоремы В. М. Тихомирова о поперечнике сферы. Результаты Ю. Н. Субботина по поперечникам цитируются практически во всех отечественных книгах по теории приближения функций.

В 1972 г. вышла в свет первая монография по теории сплайнов на русском языке — книга Дж. Алберга, Э. Нильсона и Дж. Уолша "Теория сплайнов и ее приложения". Перевод с английского был выполнен Ю. Н. Субботиным под редакцией С. Б. Стечкина, ими же было написано дополнение к этой книге. После появления русского издания этой монографии термин "сплайн" окончательно утвердился в математической литературе на русском языке. Начиная с 60-х гг. прошлого века сплайны завоевывают все большую популярность в вычислительной практике как средство приближенного представления функций, кривых и поверхностей, а также в качестве аппарата сглаживания экспериментальных данных. Успешному развитию и применению сплайнов в различных исследованиях способствовало издание в 1976 г. книги С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина "Сплайны в вычислительной математике", в которой основное внимание было уделено специфике сплайнов с точки зрения их приложений в численном анализе. В стране появляется сразу несколько школ по практическому применению сплайнов в различных областях науки и техники (одна из наиболее успешных — новосибирская группа исследователей во главе с Ю. С. Завьяловым). Создаются мощное программное обеспечение и пакеты программ аппроксимации сплайнами. Монография "Сплайны в вычислительной математике" до сих пор пользуется большей популярностью (в научной литературе на нее около 700 ссылок), в 2021 г. вышло новое издание этой книги. В 1979 г. Ю. Н. Субботин совместно с В. И. Бердышевым опубликовал книгу "Численные методы приближения функций" (там, в частности, были представлены программные результаты сотрудников лаборатории численных методов отдела теории приближения функций).

Исследования Ю. Н. Субботина в теории сплайнов были продолжены его учениками и коллегами. В частности, в исходной формулировке задачи экстремальной интерполяции n-я производная была заменена линейным дифференциальным оператором L порядка n, изучены аппроксимативные свойства L-сплайнов (на оси, отрезке и на периоде) и рассмотрены близкие постановки задач экстремальной интерполяции для функций нескольких переменных. Эта тематика интенсивно развивается в отделе теории приближения функций и в настоящее время для неравномерных сеток при замене конечных разностей на разделенные. Существенный вклад в эти направления внесли В. Т. Шевалдин и С. И. Новиков — ученики Ю. Н. Субботина. В 90-е гг. прошлого века Юрий Николаевич снова вернулся к исходной задаче Яненко — Стечкина, рассмотрев похожую задачу на полуоси в случае обычной интерполяции и для перекрывающихся интервалов усреднения при интерполяции в среднем.

Следует сказать об одном известном результате Н. Л. Зматракова — одного из первых учеников Юрия Николаевича. А именно, Зматраковым в середине 1970-х гг. были найдены необходимые и достаточные условия на отношения соседних шагов сетки, при выполнении которых интерполяционные процессы Лагранжа для кубических и параболических сплайнов сходятся для любой непрерывной функции при максимальном шаге сетки, стремящемся к нулю. Отметим, что этой задачей занимались как советские, так и американские математики, однако окончательное решение удалось найти Н. Л. Зматракову.

В 1980-е гг. Ю. Н. Субботин стал читать лекции по теории сплайнов в общественном университете. И здесь будущий академик И. И. Еремин обратил его внимание на недостаточную изученность многомерных сплайнов для решения практических задач. Юрий Николаевич обращается к проблемам кусочно-полиномиальной многомерной аппроксимации и интерполяции, актуальным с точки зрения их использования в методе конечных элементов для решения краевых задач. Согласно известным в то время результатам по методу конечных элементов скорость сходимости метода на некоторой области определяется ошибкой аппроксимации решения краевой задачи при переходе к подпространству конечных элементов. Однако на практике решить задачу нахождения этой ошибки часто оказывается невозможно, и для оценки скорости сходимости метода часто используют не проекцию решения на подпространство конечных элементов, а интерполяционную кусочно-полиномиальную функцию, из-за чего приходится получать оценки погрешности локальной аппроксимации на каждом отдельно взятом конечном элементе из триангуляции исходной области (на плоскости это треугольники). При этом выбор интерполяционных условий определяет базисные функции, участвующие в построении подпространства конечных элементов, на котором осуществляется поиск приближенного решения краевой задачи. На плоскости в качестве определяющих характеристик скорости сходимости метода конечных элементов ранее использовались диаметр треугольника и его наименьший угол (Дж. Синг, И. Бабушка, А. Азиз и др.). Последняя величина стояла в знаменателях дробей — констант в оценках сверху величин аппроксимации функций и их производных. Юрию Николаевичу Субботину удалось получить более точные оценки приближения функций и их производных на треугольниках интерполяционными многочленами Лагранжа, а также многочленами Эрмита и Биркгофа, в терминах диаметра треугольника и синуса его наибольшего угла. Полученные оценки являются неулучшаемыми с точностью до входящих в них постоянных множителей, не зависящих от интерполируемой функции и триангуляции области. Тонкие многомерные исследования в этом направлении продолжили другие сотрудники отдела приближения функций, и наибольших успехов здесь добились ученицы Ю. Н. Субботина Н. В. Латыпова и Н. В. Байдакова. Байдакова в 2018 г. по данной тематике успешно защитила докторскую диссертацию.

С. Б. Стечкин, приезжая в Екатеринбург в начале 1990-х гг., настойчиво требовал, чтобы отдел больше занимался многомерной тематикой и новой, только что возникшей, теорией всплесков. Эта область лежит на пересечении чистой математики, вычислительных методов, теории сигналов, сжатия и обработки информации. Если сплайн представляет собой линейную комбинацию сдвигов одной фиксированной функции (B-сплайна), то в представлении всплеска в такой линейной комбинации участвуют еще и сжатия, и растяжения исходной функции. Поскольку возможностей в приближенном представлении функций становится больше, базисы всплесков имеют ряд преимуществ по сравнению с другими базисами, используемыми в качестве аппарата аппроксимации. При построении всплесков возникает также свойство локализации, что дает возможность строить новые, более эффективные адаптивные алгоритмы аппроксимации функций, кривых и поверхностей. К этой важной области современной математики Юрий Николаевич, следуя совету своего учителя С. Б. Стечкина, обратился в середине 1990-х гг. вместе с Николаем Ивановичем Черных (их связывали многолетняя дружба и множество других совместных исследований). Здесь “дружный тандем” получил ряд результатов мирового уровня, написав около полутора десятков статей. Самый существенный результат — построены всплески, которые являются одновременно ортогональными и интерполяционными (давние друзья порознь придумали их в одну и ту же ночь; формулы для всплесков оказались при этом близкими, но различными). Кроме того, они исследовали гармонические всплески (в кольце и в круге); всплески, ортогональные относительно специально выбранного скалярного произведения; периодические всплески, построенные на основе сдвигов одной функции, и другие интересные конструкции кратно-масштабного анализа. Еще задолго до бурного развития теории всплесков Ю. Н. Субботин в 70-е годы прошлого века, интуитивно предвидя появление новой перспективной теории, построил системы сплайнов на сгущающихся сетках — базисы пространств непрерывных функций (в те же годы базисы таких функций были независимо построены С. В. Бочкаревым и З. Чисельским). По современной терминологии это были wavelet-mothers. Для построения полноценного кратно-масштабного анализа таким образом ему оставалось сделать только один шаг — применить к обеим частям полученных формул преобразование Фурье (т. е. сделать обратную прогонку), но даже и без применения преобразования Фурье Юрий Николаевич в работе 1972 г. построил wavelet-fathers (!). Кроме того, в нескольких работах Ю. Н. Субботина и Н. И. Черных рассматривались вопросы использования теории всплесков при решении классических задач математической физики.

С 2006 г. Ю. Н. Субботин и Н. И. Черных совместно с В. П. Верещагиным, физиком-теоретиком из Российского государственного профессионально-педагогического университета, стали заниматься построением классов векторных полей с различными вихревыми свойствами, в частности, продольно-вихревых, линии поля которых совпадают с их вихревыми линиями, и поперечно-вихревых, у которых линии поля ортогональны вихревым линиям. Ими был предложен метод построения векторных полей с определенными свойствами с помощью преобразований, изменяющих величину вектора поля в каждой точке, форму линий поля и их взаимное расположение. Важные приложения этого метода связаны с решением дифференциальных уравнений Эйлера движения сплошной среды, поскольку взаимные свойства векторного поля и поля его ротора выражаются дифференциальными уравнениями в частных производных, которые зачастую являются нелинейными. Три профессора, стоя у доски в кабинете Ю. Н. Субботина, развивали совершенно новую теорию поля. Их бурную, вдохновенную деятельность прервал только внезапный уход из жизни Владимира Пантелеевича Верещагина в 2015 г.

В 1993 г. Ю. Н. Субботин на классе функций с ограниченной почти всюду второй производной, заданных на отрезке на равномерной сетке, построил неинтерполяционный метод локальной аппроксимации, использующий параболические сплайны с дополнительными узлами, сохраняющий локально геометрические свойства (знак, положительность и монотонность) исходных данных — значений приближаемой функции в узлах равномерной сетки, сдвинутой на полшага относительно сетки узлов сплайна. В периодическом случае этот метод оказался оптимальным в смысле поперечников по Колмогорову и по Коновалову (поперечники по Коновалову еще называют относительными поперечниками; в дополнение к определению колмогоровского поперечника здесь добавлено ограничение на норму промежуточной производной у аппроксимирующих функций) для класса дважды дифференцируемых функций W^2_∞ в равномерной метрике (т. е. было найдено еще одно, третье по счету, оптимальное подпространство в смысле поперечника по Колмогорову). Эта статья породила целый цикл (полтора десятка) последующих работ Ю. Н. Субботина и С. А. Теляковского по относительным поперечникам более общих классов функций и константам Лебега интерполяционных сплайнов и тригонометрических полиномов и стала основой монографии В. Т. Шевалдина “Аппроксимация локальными сплайнами” (2014). После этого Юрий Николаевич вместе с С. А. Теляковским и впоследствии с Н. И. Черных обратился к задачам аппроксимации кривизны плоских кривых сплайнами и тригонометрическими полиномами и получил первые в мировой науке результаты в решении новых, трудных и существенно нелинейных проблем.

Здесь представлены, конечно, не все задачи, которыми занимался Юрий Николаевич в течение своей жизни, а выделены только большие циклы работ по направлениям, наиболее важным в теории приближения функций. Коротко отметим, что у него были еще несколько совместных с коллегами статей по приближениям классов функций другими классами более гладких функций, по аппроксимации сплайнами с нефиксированными узлами и другие работы.

Много сил и времени Юрий Николаевич посвятил не только руководству отделом теории приближения функций в ИММ УрО РАН (отдел с большими традициями всегда считался одним из самых дружных в Институте), но также и научно-организационной (руководил диссертационным советом и вместе с Н. И. Черных — научным семинаром отдела) и преподавательской деятельности. Более сорока лет он работал на кафедре математического анализа и теории функций математико-механического факультета Уральского государственного университета им. А. М. Горького (в должности профессора с 1975 г.), где был одним из ведущих лекторов. Он читал общий курс теории функций комплексной переменной, специальные курсы “Теория интерполирования”, “Аппроксимационные методы математического моделирования”, “Приближение функций”, “Метод конечных и граничных элементов”, “Сплайны и всплески”. Лекции Ю. Н. Субботина отличались высоким научным уровнем и новизной, включали фундаментальные классические теоремы и новые достижения математики. Ю. Н. Субботин подготовил 11 кандидатов наук, двое из которых (В. Т. Шевалдин и Н. В. Байдакова) защитили докторские диссертации. Вокруг него всегда была молодежь, начинавшая свою научную деятельность. Участие Юрия Николаевича в работе научных семинаров, школ и конференций, в рецензировании научных работ и диссертаций всегда было гарантией справедливой оценки качества рассматриваемых и обсуждаемых научных результатов.

Ю. Н. Субботин был очень талантливым математиком, его результаты отличались оригинальностью и глубиной. Его идеи до сих пор являются актуальными и их продолжают развивать в России и за рубежом. В год своего 80-летия он стал лауреатом екатеринбургского городского социокультурного проекта “Признание – 2016”. В 2019 г. ему была присуждена золотая медаль Института математики Сибирского Отделения РАН “За выдающий вклад в математику”.

Юрий Николаевич был по-настоящему предан науке, стране и родному краю. Он был “человеком леса”, знатоком уральской природы, рыбаком и ягодником. Спортсмен-конькобежец, лыжник, шахматист, неоднократный чемпион и призер различных соревнований. Его всегда отличали неизменная доброжелательность, скромность, отзывчивость, широкая эрудиция и разносторонность интересов. Юрия Николаевича любили все, кто был рядом с ним.

Прожита большая и светлая жизнь уральского ученого-самородка, Архимеда из глубинки и подлинного патриота нашей страны. Именно таким мы навсегда его и запомним.

Поступила 9.09.2022
Принята к публикации 9.09.2022

Акопян Роман Размикович
д-р. физ.-мат. наук, доцент
заведущий отделом
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru

Антонов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
заместитель директора
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
заведущий отделом
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Байдакова Наталия Васильевна
д-р физ.-мат. наук
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: baidakova@imm.uran.ru

Бердышев Виталий Иванович
академик РАН, научный руководитель
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН
главный научный сотрудник
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Пацко Надежда Леонидовна
канд. физ.-мат. наук
математик 1 кат.
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: patsko@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН
главный научный сотрудник
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

English

R. R. Akopyan, N. Yu. Antonov, V. V. Arestov, A. G. Babenko, N. V. Baidakova, V. I. Berdyshev, V. V. Vasin, S. I. Novikov, N. L. Patsko, A. G. Chentsov, N. I. Chernykh, V. T. Shevaldin. Yurii Nikolaevich Subbotin.

Roman Razmikovich Akopyan, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: RRAkopyan@mephi.ru .

Nikolay Yur'evich Antonov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru .

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru .

Aleksandr Grigor'evich Babenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: babenko@imm.uran.ru .

Natalia Vasil'evna Baidakova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: baidakova@imm.uran.ru .

Vitalii Ivanovich Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: bvi@imm.uran.ru .

Vladimir Vasil'evich Vasin, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: vasin@imm.uran.ru .

Sergey Igorevich Novikov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru .

Nadezhda Leonidovna Patsko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: patsko@imm.uran.ru .

Alexander Georgievich Chentsov, Dr Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Nikolai Ivanovich Chernykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: chernykh@imm.uran.ru .

Valerii Trifonovich Shevaldin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

Received September 9, 2022
Accepted September 9, 2022

Cite this article as: R. R. Akopyan, N. Yu. Antonov, V. V. Arestov, A. G. Babenko [et al.]. Yurii Nikolaevich Subbotin. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 9–16 .