ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.51

О ПОЧТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ДВОЙНЫХ РЯДАХ ФУРЬЕ[1]

М. Г. Григорян

Первые примеры универсальных тригонометрических рядов в классе измеримых функций построены Д. Е. Меньшовым. Из теоремы А. Н. Колмогорова (ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится по мере) следует, что не существует интегрируемой функции, ряд Фурье которой по тригонометрической системе является универсальным в классе всех измеримых функций. Автором построена функция $U \in L^1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$, такая, что после выбора подходящих знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для ее коэффициентов Фурье, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \big(a_k(U) \cos kx + b_k(U) \sin kx\big)$ является универсальным в классе всех измеримых функций. Первые примеры универсальных функций были построены Д. Биркгофом в рамках комплексного анализа, при этом целые функции представлялись в любом круге равномерно сходящимися сдвигами универсальной функции, и Ю. Марцинкевичем — в рамках действительного анализа, при этом любая измеримая функция представлялась как предел почти всюду некоторой последовательности разностных отношений универсальной функции. В данной работе построена интегрируемая функция двух переменных $u(x, y)$ такая, что после выбора подходящих знаков $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ для ее коэффициентов Фурье $\widehat{u}_{k,s}$ ряд $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)}$ по двойной тригонометрической системе $\{e^{ikx}, e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ является универсальным в классе $L^p(\mathbb{T}^2)$, $p \in (0, 1)$, и, следовательно, в классе всех измеримых функций. Точнее, установлено, что как прямоугольные $S_{n,m}(x, y) = \sum_{|k|\le n} \sum_{|s|\le m} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)}$, так и сферические $S_R(x, y) = \sum_{k^2+s^2 \le R^2} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)}$ частные суммы ряда $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)}$ являются плотными в $L^p(\mathbb{T}^2)$. С. В. Конягин недавно доказал, что не существует функции $u \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $d \ge 2$, прямоугольные частные суммы кратного тригонометрического ряда Фурье которой являются плотными в $L^p(\mathbb{T}^d)$, $p \in (0, 1)$. Отсюда следует, что сформулированный в этом абзаце результат автора является в определенном смысле окончательным.

Ключевые слова: универсальная функция, универсальный ряд, кратный ряд Фурье по тригонометрической системе.

M. G. Grigoryan. On almost universal double Fourier series.

The first examples of universal trigonometric series in the class of measurable functions were constructed by D. E. Men'shov. As follows from Kolmogorov's theorem (the Fourier series of each integrable function in the trigonometric system converges in measure), there is no integrable function whose Fourier series in the trigonometric system is universal in the class of all measurable functions. The author has constructed a function $U \in L^1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$, such that, after an appropriate choice of the signs $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=-\infty}^{\infty}$ for its Fourier coefficients, the series $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \big(a_k(U) \cos kx + b_k(U) \sin kx\big)$ is universal in the class of all measurable functions. The first examples of universal functions were constructed by G. Birkhoff in the framework of complex analysis, where entire functions were represented in any circle by uniformly convergent shifts of the universal function, and by Yu. Martsinkevich in the framework of real analysis, where any measurable function was represented as an almost everywhere limit of some sequence of difference relations of the universal function. In this paper we construct an integrable function $u(x, y)$ of two variables such that, after an appropriate choice of the signs $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ for its Fourier coefficients $\widehat{u}_{k,s}$, the series $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)}$ in the double trigonometric system $\{e^{ikx}, e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ is universal in the class $L^p(\mathbb{T}^2)$, $p \in (0, 1)$, and hence in the class of all measurable functions. More precisely, it is established that both rectangular partial sums $S_{n,m}(x, y) = \sum_{|k|\le n} \sum_{|s|\le m} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)}$ and spherical partial sums $S_R(x, y) = \sum_{k^2+s^2 \le R^2} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)}$ of the series $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)}$ are dense in $L^p(\mathbb{T}^2)$. Recently S. V. Konyagin has proved that there is no function $u \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $d \ge 2$, such that the rectangular partial sums of its multiple trigonometric Fourier series are dense in $L^p(\mathbb{T}^2)$, $p \in (0, 1)$). This means that the author's result formulated here is, in a sense, final.

Keywords: universal function, universal series, multiple Fourier series in a trigonometric system.

MSC: 42C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-91-102

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения в рамках научного проекта № 21AG−1A066.

Введение: обозначения, определения, исторические справки и формулировка основного результата

В данной статье рассматриваются классы вещественнозначных функций. Здесь используется следующие обозначения:

$L^p[a,b],\ p>0,$ — класс тех измеримых на отрезке $[a,b]$ функций, для которых $\int_a^b |f(x)|^p dx<\infty$;

$L^0[a,b]$ — класс всех почти везде конечных измеримых на $[a,b]$ функций;

$M[a,b]$ — совокупность (не обязательно конечных) измеримых на $[a,b]$ функций;

$C[a,b]$ — класс непрерывных на $[a,b]$ функций;

$S_m(U;x;\Phi)=\sum_{k=0}^m c_k(U)\varphi_k(x)$, $m\in\mathbb{N}$, где $c_k(U):=\int_a^b U(x)\varphi_k(x)dx$ — коэффициенты Фурье функции $U\in L^1[a,b]$ по заданной на $[a,b]$ ортонормированной системе $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$;

$\#(\Omega)$ — количество точек конечного множества Ω.

$\Lambda=\Lambda(U):=\operatorname{spec}(U)=\{k\colon c_k(U)\neq 0\}$ — спектр функции $U\in L^1[a,b]$.

Последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty\subset L^p[a,b]$ сходится в $L^p[a,b]$ к $f\in L^p[a,b]$, если $\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b |f_k(x)-f(x)|^p dx=0$. Под сходимостью в $L^0[a,b]$ будем подразумевать сходимость почти всюду.

Определение 1. Пусть $\Omega\subset\Lambda\subseteq\mathbb{N}$. Верхней асимптотической плотностью подмножества Ω относительно множества Λ называется величина $\rho(\Omega)_\Lambda:=\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\#(\Omega\cap(0,n))}{\#(\Lambda\cap(0,n))}$.

Пусть S — одно из пространств $L^p[a,b],\ p\in[0,1)$, или $M[a,b]$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $U\in L^1[a,b]$ для класса S относительно системы $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ называется:

а) *универсальной* (в обычном смысле), если ряд Фурье функции U по этой системе является универсальным в S, т. е. если для каждой функции $f\in S$ существует подпоследовательность возрастающих натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что подпоследовательность частных сумм $\{S_{n_k}(U,\Phi)\}_{k=1}^\infty$ ряда Фурье функции U сходится к f в S;

б) *условно универсальной*, если после выбора подходящих знаков $\{\delta_k=\pm1\}_{k=0}^\infty$ для ее коэффициентов Фурье ряд $\sum_{k=1}^\infty \delta_k c_k(U)\varphi_k$ является универсальным в S;

в) *почти универсальной*, если для коэффициентов Фурье функции U существует последовательность знаков $\{\delta_k=\pm1\}_{k=0}^\infty$ с $\rho(\Omega(U))_{\Lambda(U)}=1$, где $\Omega(U)=\{k\in\Lambda(U):\delta_k=1\}$, такая, что частные суммы ряда $\sum_{k=0}^\infty \delta_k c_k(U)\varphi_k$ являются плотными в S;

г) *универсальной в смысле знаков*, если для каждой функции $f\in S$ существует последовательность знаков $\{\delta_k=\pm1\}_{k=0}^\infty$, для которой ряд $\sum_{k=0}^\infty \delta_k c_k(U)\varphi_k$ сходится к f в S;

д) *универсальной в смысле перестановок*, если ряд Фурье функции U по этой системе является универсальным в S в смысле перестановок, т. е. для каждой функции $f\in S$ члены ряда $\sum_{k=0}^\infty c_k(U)\varphi_k$ можно переставить так, что полученный ряд $\sum_{k=1}^\infty c_{\sigma(k)}(U)\varphi_{\sigma(k)}$ сходится к функции f в S.

В дальнейшем $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$, а $L^p(\mathbb{T})$, $L^0(\mathbb{T})$, $M(\mathbb{T})$, $C(\mathbb{T})$ — соответствующие классы 2π-периодических функций. Для классов $L^p[a,b]^2,\ p\in[0,1)$, и $M[a,b]^2$ относительно двойной ортонормированной системы $\{\varphi_k(x)\varphi_l(y)\}_{k,l=1}^\infty$ разные типы универсальности интегрируемой функции двух переменных определяются аналогично.

Существование функций и рядов, универсальных в том или ином смысле в различных классах функций, изучали многие математики, и публикации по этой тематике регулярно появляются в печати.

Первые примеры универсальных функций были построены Д. Биркгофом [1] в рамках комплексного анализа, при этом целые функции представлялись в любом круге равномерно сходящимися сдвигами универсальной функции, и Ю. Марцинкевичем [2] — в рамках действительного анализа, при этом любая измеримая функция представлялась как предел почти всюду некоторой последовательности разностных отношений универсальной функции (см. также [3–8]).

В работе Д. Е. Меньшова [9] в классе всех измеримых функций впервые построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды (в смысле сходимости почти всюду) и получен следующий фундаментальный результат: *существует тригонометрический ряд* $a_0/2+\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ *со свойством*: *для любой измеримой* 2π*-периодической функции* g *существует возрастающая подпоследовательность натуральных чисел* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *такая, что подпоследовательность частных сумм* $a_0/2\ +\sum_{k=1}^{n_j}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=S_{n_j}(x)$ *сходится почти всюду на* $\mathbb{T}$ *к* g, *при* $j\to\infty$.

Ряды $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$ по любой ортонормированной полной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in[0,1]$, универсальные в обычном смысле в классе всех измеримых функций (в смысле сходимости почти всюду), были построены А. А. Талаляном [10].

Из теоремы А. Н. Колмогорова [11] (ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится по мере) следует, что не существует интегрируемой функции, ряд Фурье которой по тригонометрической системе (а также по системе Уолша) является универсальным в классе всех измеримых функций. В [12] автором построена функция $U\in L^1(\mathbb{T})$ такая, что после выбора подходящих знаков $\{\delta_k=\pm1\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для ее коэффициентов Фурье, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k\big(a_k(U)\cos kx+b_k(U)\sin kx\big)$ является универсальным в классе всех измеримых функций.

Следует отметить, что существование универсальных функций зависит от типа универсальности, от системы, от смысла сходимости и от пространства S.

Как было отмечено выше, Д. Е. Меньшов [9] установил, что в классе $M(\mathbb{T})$ существуют универсальные тригонометрические ряды, но не существует функции $U\in L^1(\mathbb{T})$, универсальной для класса $M(\mathbb{T})$. Однако для класса $M(\mathbb{T})$ существует *условно универсальная* функция относительно тригонометрической системы.

Ситуация такая же и в случае пространств $L^p(\mathbb{T})$, $p\in(0,1)$, относительно тригонометрической системы: из теоремы А. Н. Колмогорова [11] (ряд Фурье каждой интегрируемой функции сходится по мере в $L^p(\mathbb{T})$, $p\in(0,1)$) следует, что не существует функции $U\in L^1(\mathbb{T})$, универсальной для класса $L^p(\mathbb{T})$, $p\in(0,1)$. В работе [13] построена *условно универсальная* функция для класса $L^p(\mathbb{T})$ при $p\in(0,1)$. В этой же работе построена также функция $U\in L^1(\mathbb{T})$, универсальная для класса $L^p(\mathbb{T})$ при $p\in(0,1)$ *в смысле знаков.*

Отметим, что любую измеримую почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в условно универсальную функцию для класса $L^p(\mathbb{T})$, $p\in(0,1)$, относительно тригонометрической системы (см. [14]). Кроме того, не существует функции $U\in L^1[0,1]$, которая была бы универсальной в смысле знаков для класса $L^0[0,1]$ относительно системы функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, построенной Б. С. Кашиным в [15] (им была построена полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная равномерно ограниченная система функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что из сходимости почти всюду на $[0,1]$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_kf_k(x)$ вытекает $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<\infty$). Заметим также, что каковы бы ни были число $p\geq1$ и полная равномерно ограниченная система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, не существует функции $U\in L^1[0,1]$, которая была бы условно универсальной (соответственно универсальной *в смысле знаков* или *в смысле перестановок*) для класса $L^p[0,1]$ относительно системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В работах [16; 17] построена функция $U\in L^1[0,1]$, универсальная *в смысле знаков* относительно системы Уолша как для класса $L^p[0,1]$ при $p\in(0,1)$, так и для класса $L^0[0,1]$ (см. также [18–20]).

В связи с указанными выше результатами возникают следующие вопросы, ответы на которые нам неизвестны.

В о п р о с 1. Существует ли функция $U \in L^1(\mathbb{T})$, универсальная для класса $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (0,1)$, или $M(\mathbb{T})$ относительно тригонометрической системы *в смысле перестановок*?

В о п р о с 2. Существует ли функция $U \in L^1(\mathbb{T})$, универсальная для класса $L^0(\mathbb{T})$ относительно тригонометрической системы *в смысле знаков*?

В о п р о с 3. Существует ли ортонормированная система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, относительно которой для класса $L^p[0,1]$ при некотором $p \in [0,1)$ (либо для класса $M[0,1]$) можно построить универсальную (*в обычном смысле*) функцию?

В этой статье изучается существование функций, которые *почти универсальны* для класса $L^p(\mathbb{T}^2)$, $p \in (0,1)$, *относительно двойной тригонометрической системы* $\{e^{ikx}, e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$, где

$$L^p(\mathbb{T}^2) = \left\{ f\colon \iint\limits_{\mathbb{T}^2} |f(t,\tau)|^p dt d\tau < \infty \right\}, \quad \mathbb{T}^2 := \mathbb{T} \times \mathbb{T}.$$

Прямоугольные и сферические частные суммы ряда Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ по двойной тригонометрической системе определяются соответственно следующим образом:

$$S_{n,m}(f;(x,y)) = \sum_{|k|\le n} \sum_{|s|\le m} \widehat{f}_{k,s} e^{i(kx+sy)}; \quad S_R(f;(x,y)) = \sum_{k^2+s^2\le R^2} \widehat{f}_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \qquad (0.1)$$

где

$$\widehat{f}_{k,s} := \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{T}^2} f(t,\tau) e^{-i(kt+s\tau)} dt d\tau \qquad (0.2)$$

— коэффициенты Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ по двойной тригонометрической системе $\{e^{ikx}, e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что функция $u \in L^1(\mathbb{T}^2)$ для класса $L^p(\mathbb{T}^2)$ относительно двойной тригонометрической системы $\{e^{ikx}, e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ называется:

а) *универсальной* по прямоугольникам (соответственно по кругам), если прямоугольные, соответственно круговые, частные суммы ряда Фурье функции $u(x,y)$ по двойной системе $\{e^{ikx}, e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ плотны в $L^p(\mathbb{T}^2)$;

б) *условно универсальной* по прямоугольникам (соответственно по кругам), если существует последовательность знаков $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ такая, что прямоугольные (соответственно круговые) частные суммы ряда $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{ikx} e^{isy}$ являются плотными в $L^p(\mathbb{T}^2)$;

в) *почти универсальной* по прямоугольникам (соответственно по кругам), если существует последовательность знаков $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ с $\rho^2(\Omega)_\Lambda = 1$ такая, что прямоугольные (соответственно круговые) частные суммы ряда $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,l} \widehat{u}_{k,s} e^{ikx} e^{isy}$ являются плотными в $L^p(\mathbb{T}^2)$, где $\Omega = \Omega(u) = \{(k,s) \in \Lambda = \Lambda(u) = \operatorname{spec}(u)\colon \delta_{k,s} = 1\}$,

$$\rho^2(\Omega)_\Lambda := \limsup_{m\to\infty, n\to\infty} \frac{\#(\Omega \cap ((-n,n)\times(-m,m)))}{\#(\Lambda \cap ((-n,n)\times(-m,m)))}. \qquad (0.3)$$

Аналогично можно дать приведенные выше обозначения и определения и в многомерном ($d \ge 2$) случае.

Р. Д. Гецадзе [21] доказал, что аналог выше упомянутой теоремы А. Н. Колмогорова [11] не имеет места для двойной тригонометрической системы, а именно: квадратные частные суммы интегрируемой функции могут не сходиться по мере. С. В. Конягин в [22] показал, что функцию можно выбрать так, что любая подпоследовательность квадратных частных сумм почти всюду не ограничена; кроме того, он также установил[2], что в двумерном случае не существует функции, универсальной для пространства $L^p(\mathbb{T}^2)$, $p \in (0,1)$, относительно тригонометрической системы (см. также [23]). Точнее верна

[2]С. В. Конягин. О сходимости по Прингсхейму частных сумм многомерных рядов Фурье // 21-я Междунар. Сарат. зим. шк. “Современные проблемы теории функций и их приложения”. Пленарная лекция. 2022.

Теорема 1 (С. В. Конягин). *Не существует функции $u \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $d \geq 2$, универсальной по прямоугольникам для класса $L^p(\mathbb{T}^d)$, $p \in (0,1)$, относительно кратной тригонометрической системы.*

Этот результат является следствием следующего более сильного утверждения.

Теорема 2 (С. В. Конягин). *Пусть подпоследовательность частных сумм по Прингсхейму функции $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ сходится на некотором множестве $E \subset \mathbb{T}^d$ положительной меры к конечной функции g. Тогда $g = f$ почти всюду на E.*

В этой статье доказывается, что существует функция $u \in L^1(\mathbb{T}^2)$ — условно универсальная для класса $L^p(\mathbb{T}^2)$, $p \in (0,1)$, относительно двойной тригонометрической системы. Более того, справедливо утверждение

Теорема 3. *Существует функция $u \in L^1(\mathbb{T}^d)$ почти универсальная как по прямоугольникам, так и по сферам для класса $L^p(\mathbb{T}^d)$, $p \in (0,1)$, относительно кратной тригонометрической системы.*

Отметим, что из теоремы 1 следует окончательность в определенном смысле теоремы 3. Автор выражает благодарность С. В. Конягину за внимание к работе и полезные замечания.

1. Вспомогательные результаты

Следующая лемма доказана в работе [13, лемма 4.2].

Лемма 1. *Для любых чисел n, $m \in \mathbb{N}$, $n < m$, ε_0, η_0, $p \in (0,1)$, $\gamma_0 \neq 0$ и интервала $\Delta_0 \subset \mathbb{T}$ существуют тригонометрические полиномы*

$$H(x) = \sum_{n \leq |k| < m} c_k e^{ikx}, \quad Q(x) = \sum_{n \leq |k| < m} \delta_k c_k e^{ikx}, \quad \delta_k = \pm 1,$$

удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |Q(x) - \gamma_0 \chi_{\Delta_0}(x)|^p dx < \varepsilon_0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} |H(x)| dx < \eta_0,$$

где $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E.

Лемма 2. *Для любых чисел $\gamma \neq 0$, ε, η, $p \in (0,1)$, $N_0, N \in \mathbb{N}$, $1 < N_0 < N$, и для любого квадрата $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset \mathbb{T}^2$, $\Delta \neq \mathbb{T}^2$, существуют полиномы по двойной тригонометрической системе вида*

$$H(x,y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |s| < N} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad Q(x,y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |s| < N} \delta_{k,s} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad \delta_{k,s} = \pm 1,$$

обладающие свойствами

$$\iint\limits_{\mathbb{T}^2} |Q(x,y) - \gamma \chi_\Delta(x,y)|^p dxdy < \varepsilon, \quad \iint\limits_{\mathbb{T}^2} |H(x,y)| dxdy < \eta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в формулировке леммы 1

$$\gamma_0 = \gamma, \quad \Delta_0 = \Delta_1, \quad n = N_0, \quad m = N, \quad \eta_0 = \sqrt{\eta}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{4|\Delta_2|},$$

определим полиномы

$$H_1(x)=\sum_{N_0\le|k|<N}a_ke^{ikx},\quad Q_1(x)=\sum_{N_0\le|k|<N}\beta_ka_ke^{ikx},\quad \beta_k=\pm1, \tag{1.1}$$

удовлетворяющие условиям

$$\int_{-\pi}^{\pi}|Q_1(x)-\gamma\chi_{\Delta_1}(x)|^p dx<\frac{\varepsilon}{2|\Delta_2|}, \tag{1.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|H_1(x)|dx<\sqrt{\eta}. \tag{1.3}$$

Далее, полагая в формулировке леммы 1

$$\gamma_0=1,\quad \Delta_0=\Delta_2,\quad n=N_0,\ \ m=N,\quad \eta_0=\sqrt{\eta},\quad \varepsilon_0=\varepsilon\biggl(2\int_{-\pi}^{\pi}|Q_1(x)|^p\,dx\biggr)^{-1},$$

определим полиномы

$$H_2(y)=\sum_{N_0\le|k|<N}b_se^{isy},\quad Q_2(y)=\sum_{N_0\le|s|<N}\epsilon_sb_se^{isy},\quad \epsilon_s=\pm1, \tag{1.4}$$

такие, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}|Q_2(y)-\chi_{\Delta_2}(y)|^p dy<\varepsilon\biggl(2\int_{-\pi}^{\pi}|Q_1(x)|^p\,dx\biggr)^{-1}, \tag{1.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|H_2(y)|dy<\sqrt{\eta}. \tag{1.6}$$

Теперь определим (см. (1.1) и (1.4)) полиномы $H(x,y)$ и $Q(x,y)$ и числа $c_{k,s}$, $\delta_{k,s}$ следующим образом:

$$H(x,y)=H_1(x)H_2(y),\quad Q(x,y)=Q_1(x)Q_2(y), \tag{1.7}$$

$$c_{k,s}=a_kb_s,\quad N_0\le|k|,\quad |s|<N, \tag{1.8}$$

$$\delta_{k,s}=\beta_k\epsilon_s,\quad N_0\le|k|,\quad |s|<N. \tag{1.9}$$

Из (1.1), (1.3) и (1.6)–(1.9) вытекает справедливость равенств

$$H(x,y)=\sum_{N_0\le|n|,|s|<N}c_{k,s}e^{i(kx+sy)}=\sum_{N_0\le|k|\le N}\ \sum_{N_0\le|s|\le N}c_{k,s}e^{i(kx+sy)},$$

$$Q(x,y)=\sum_{N_0\le|n|,|s|<N}\delta_{k,s}c_{k,s}e^{i(kx+sy)},\quad \delta_{k,s}=\pm1,\quad N_0\le|k|,\quad |s|<N,$$

и оценки

$$\iint_{\mathbb{T}^2}|H(x,y)|dxdy=\int_{-\pi}^{\pi}|H_1(x)|dx\int_{-\pi}^{\pi}|H_2(y)|dy<\eta.$$

В силу (1.2), (1.5) и (1.7) имеем

$$\iint_{\mathbb{T}^2}|Q(x,y)-\gamma\chi_{\Delta}(x,y)|^p dxdy=\iint_{\mathbb{T}^2}|Q_1(x)Q_2(y)-\gamma\chi_{\Delta_1}(x)\chi_{\Delta_2}(y)|^p dxdy$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |Q_2(y)-\chi_{\Delta_2}(y)|^p\,dy \int_{-\pi}^{\pi} |Q_1(x)|^p dx + \int_{-\pi}^{\pi} |Q_1(x)-\gamma\chi_{\Delta_1}(x)|^p dx \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_{\Delta_2}(y)|^p dy < \varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть даны числа $N_0 \in \mathbb{N}$, ε, η, $p \in (0,1)$ и функция $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$. Тогда существуют полиномы по двойной тригонометрической системе*

$$H(x,y) = \sum_{N_0 \leq |k|,|s| < N} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad Q(x,y) = \sum_{N_0 \leq |k|,|s| < N} \delta_{k,s} c_{k,s} e^{i(kx+sy)},$$

где $\delta_{k,s} = \pm 1$, $N_0 \leq |k|,\ |s| \leq N$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\iint_{\mathbb{T}^2} |H(x,y)| dx < \eta, \quad \iint_{\mathbb{T}^2} |f(x,y) - Q(x,y)|^p dxdy < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\psi(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x,y) \tag{1.10}$$

(Δ_ν, $\nu = 1,2,\ldots,\nu_0$, — квадраты постоянства функции $\psi(x,y)$) такую, что

$$\iint_{\mathbb{T}^2} |f(x,y) - \psi(x,y)|^p dxdy < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.11}$$

Последовательным применением леммы 2 определяем полиномы

$$H_\nu(x,y) = \sum_{N_{\nu-1} \leq |k|,|s| < N_\nu} c_{k,s}^{(\nu)} e^{i(kx+sy)}, \quad \nu = 1,2,\ldots,\nu_0, \tag{1.12}$$

$$Q_\nu(x,y) = \sum_{N_{\nu-1} \leq |k|,|s| < N_\nu} \delta_{k,s}^{(\nu)} c_{k,s}^{(\nu)} e^{i(kx+sy)}, \quad \delta_{k,s}^{(\nu)} = \pm 1, \quad \nu = 1,2,\ldots,\nu_0, \tag{1.13}$$

удовлетворяющие условиям

$$\iint_{\mathbb{T}^2} |H_\nu(x,y)| dxdy \leq \frac{\eta}{\nu_0}, \quad \nu = 1,2,\ldots,\nu_0, \tag{1.14}$$

$$\iint_{\mathbb{T}^2} |Q_\nu(x,y) - \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x,y)|^p dxdy < \frac{\varepsilon}{2\nu_0}, \quad \nu = 1,2,\ldots,\nu_0. \tag{1.15}$$

С помощью (1.12) и (1.13) определим полиномы

$$H(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} H_\nu(x,y), \quad Q(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x,y), \tag{1.16}$$

где

$$c_{k,s} = \begin{cases} c_{k,s}^{(\nu)}, & N_{\nu-1} \leq |k|,\ |s| < N_\nu,\ 1 \leq \nu \leq \nu_0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}; \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\delta_{k,s} = \begin{cases} \delta_{k,s}^{(\nu)}, & N_{\nu-1} \leq |k|,\ |s| < N_\nu,\ 1 \leq \nu \leq \nu_0, \\ 1, & \text{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{1.18}$$

В силу (1.12)–(1.14) и (1.16)–(1.18) имеем

$$H(x,y)=\sum_{N_0\le|k|,|s|<N} c_{k,s}e^{i(kx+sy)},\quad Q(x,y)=\sum_{N_0\le|k|,|s|<N}\delta_{k,s}c_{k,s}e^{i(kx+sy)},$$

$$\delta_{k,s}=\pm1,\quad N_0\le|k|,\quad |s|<N,\quad N=N_{\nu_0},$$

и

$$\iint_{\mathbb{T}^2}|H(x,y)|dxdy=\iint_{\mathbb{T}^2}H(x,y)|dxdy\le\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\iint_{\mathbb{T}^2}|H_\nu(x,y)|dxdy\le\eta.$$

Из условий (1.10), (1.11), (1.15) и (1.16) следует оценка

$$\iint_{\mathbb{T}^2}|f(x,y)-Q(x,y)|^p dxdy\le\iint_{\mathbb{T}^2}|f(x,y)-\psi(x,y)|^p dxdy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\iint_{\mathbb{T}^2}|Q_\nu(x,y)-\gamma_\nu\chi_{\Delta_\nu}(x,y)|^p dxdy<\varepsilon.$$

Лемма 3 доказана.

2. Доказательство теоремы 3

Приведем доказательство теоремы 3 в двумерном случае. В многомерном случае утверждение теоремы 3 доказывается аналогично.

Пусть $p\in(0,1)$ и

$$F=\{f_n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}\tag{2.1}$$

— последовательность всех полиномов по двойной тригонометрической системе с рациональными коэффициентами. Последовательно применяя лемму 2, находим последовательности полиномов

$$H_n(x,y)=\sum_{M_n\le|k|,|s|<M_n'}c_{k,s}^{(n)}e^{i(kx+sy)},\tag{2.2}$$

$$Q_n(x,y)=\sum_{M_n\le|k|,|s|<M_n'}\delta_{k,s}^{(n)}\ c_{k,s}^{(n)}e^{i(kx+sy)},\tag{2.3}$$

$$M_1=1,\quad M_n<M_n'<M_{n+1}=(2^n+1)M_n',\quad n=1,2,\dots,\tag{2.4}$$

которые для всех $n\in\mathbb{N}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\delta_{k,s}^{(n)}=\pm1,\quad (|k|,|s|)\in\big[M_n,M_n'\big)^2:=\big[M_n,M_n'\big)\times\big[M_n,M_n'\big),\tag{2.5}$$

$$\iint_{\mathbb{T}^2}|H_n(x,y)|dxdy<2^{-2n},\tag{2.6}$$

$$\iint_{\mathbb{T}^2}\Big|f_n(x,y)-\sum_{k=1}^{n}\big(Q_j(x,y)+H_j^*(x,y)\big)\Big|^p dxdy<\frac{1}{2^n},\tag{2.7}$$

где

$$H_n^*(x,y)=\Big(2^{3(n+1)}\big(M_n'\big)^2\Big)^{-1}\sum_{M_n'\le|k|,|s|<M_{n+1}}e^{i(kx+sy)}=\sum_{M_n'\le|k|,|s|<M_{n+1}}c_{k,s}^{(n)}e^{i(kx+sy)},$$

$$c_{k,s}^{(n)}=\Big(2^{3(n+1)}\big(M_n'\big)^2\Big)^{-1},\quad (|k|,|s|)\in\big[M_n',M_{n+1}\big)^2.\tag{2.8}$$

Ясно, что (см. (2.6) и (2.8))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\iint\limits_{\mathbb{T}^2}|H_n(x,y)+H_n^*(x,y)|\,dxdy\right)<\infty. \tag{2.9}$$

Определим функцию $u(x,y)$ следующим образом:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(H_n(x,y)+H_n^*(x,y))=\sum_{k,s=-\infty}^{\infty}c_{k,s}e^{i(kx+sy)}, \tag{2.10}$$

где

$$c_{k,s}=\begin{cases}c_{k,s}^{(n)}, & (|k|,|s|)\in\big[M_n,M_n'\big)^2\cup\big[M_n',M_{n+1},\big)^2,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{2.11}$$

Отсюда и из (2.8)–(2.11) получим

$$u\in L^1(\mathbb{T}^2),\qquad \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\mathbb{T}^2}\Bigg|\sum_{0\le|k|,|s|<M_{n+1}}c_{k,s}e^{i(kx+sy)}-u(x,y)\Bigg|dx\,dy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\mathbb{T}^2}\Bigg|\sum_{m=n+1}^{\infty}(H_m(x,y)+H_m^*(x,y))\Bigg|dx\,dy=0,$$

следовательно (см. (2.11)),

$$c_{k,s}=\widehat{u}_{k,s},\quad (k,s)\in\mathbb{Z}^2, \tag{2.12}$$

и

$$\Lambda=\Lambda(u)=\operatorname{spec}(u)\subseteq\Big\{(k,s)\colon(|k|,|s|)\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(\big[M_n,M_n'\big)^2\cup\ [M_n',M_{n+1},)^2\Big)\Big\}. \tag{2.13}$$

Положим (см. (2.5))

$$\delta_{k,s}=\begin{cases}1, & (|k|,|s|)\in\big(\mathbb{Z}^2\setminus\Lambda(u)\big)\bigcup\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\big[M_n',M_{n+1}\big)^2\Big)\right),\\ \delta_{k,s}^{(n)}, & M_n\le|k|,\ |s|<M_n',\ n=1,2,\dots,\end{cases} \tag{2.14}$$

$$\Omega=\ \Omega(u)=\big\{(k,s)\in\Lambda(u)=\operatorname{spec}(u),\ \ \delta_{k,s}=1\big\}. \tag{2.15}$$

Принимая во внимание неравенство (см. (2.4), (2.6), (2.13) и (2.15))

$$\frac{\#(\Omega\cap((-M_{n+1},M_{n+1})\times(-M_{n+1},M_{n+1})))}{\#(\Lambda\cap((-M_{n+1},M_{n+1})\times(-M_{n+1},M_{n+1})))}\ge\frac{\big(M_{n+1}-M_n'\big)^2}{\big(M_{n+1}\big)^2}=\Big(1-\frac{1}{2^n+1}\Big)^2,$$

в силу (0.3) и (2.13) имеем

$$\rho^2(\Omega)_\Lambda=\lim_{m\to\infty,n\to\infty}\sup\frac{\#(\Omega\cap((-n,n)\times(-m,m)))}{\#(\Lambda\cap((-n,n)\times(-m,m)))}=1. \tag{2.16}$$

Теперь докажем, что ряд

$$\sum_{k,s=-\infty}^{\infty}\delta_{k,s}\widehat{u}_{k,s}e^{i(kx+sy)} \tag{2.17}$$

универсален в пространстве $L^p(\mathbb{T}^2)$ как по прямоугольникам, так и по сферам (т. е. функция $u(x,y)$ почти универсальна для класса $L^p(\mathbb{T}^2)$, $p\in(0,1)$, как по прямоугольникам, так и по сферам относительно двойной тригонометрической системы).

Пусть $f(x,y)$ — произвольная функция из $L^p(\mathbb{T}^2)$. Из последовательности (2.1) можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_q}(x,y)\}_{q=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lim_{q\to\infty}\iint_{\mathbb{T}^2}\left|f_{n_q}(x,y)-f(x,y)\right|^p dx\,dy=0. \tag{2.18}$$

Обозначая через $N_q=M_{n_q+1}-1$, из (2.3) и (2.11)–(2.15) для всех $n,m\ge N_q$, $q\ge 1$, имеем

$$\sum_{|k|\le N_q}\sum_{|s|\le m}\delta_{k,s}\widehat{u}_{k,s}e^{i(kx+sy)}=\sum_{|k|\le n}\sum_{|s|\le N_q}\delta_{k,s}\widehat{u}_{k,s}e^{i(kx+sy)}$$

$$=\sum_{k^2+s^2\le R_q^2=2(N_q)^2}\delta_{k,s}\widehat{u}_{k,s}e^{i(kx+sy)}=\sum_{|k|,|s|\le N_q}\delta_{k,s}\widehat{u}_{k,s}e^{i(kx+sy)}. \tag{2.19}$$

В силу (2.2), (2.3), (2.8), (2.11), (2.14), (2.15) и (2.18) имеем

$$\iint_{\mathbb{T}^2}\left|\sum_{|k|,|s|\le N_q}\delta_{k,s}\widehat{u}_{k,s}e^{i(kx+sy)}-f(x,y)\right|^p dx\,dy\le\iint_{\mathbb{T}^2}\left|f_{n_q}(x,y)-f(x,y)\right|^p dx\,dy$$

$$+\iint_{\mathbb{T}^2}\left|f_{n_q}(x,y)-\sum_{j=1}^{n_q}\left(Q_j(x,y)+H_j^*(x,y)\right)\right|^p dx\,dy\to 0 \ \text{ при } \ q\to\infty. \tag{2.20}$$

Учитывая соотношения (0.1)–(0.3), (2.16), (2.17), (2.19) и (2.20) получаем, что функция $u(x,y)$ почти универсальна для класса $L^p(\mathbb{T}^2)$, $p\in(0,1)$, как по прямоугольникам, так и по кругам относительно двойной тригонометрической системы.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Birkhoff G. D.** Démonstration d'un théoréme élémentaire sur les fonctions entiéres // C. R. Acad. Sci. Paris. 1929. Vol. 189. P. 473–475.
2. **Marcinkiewicz J.** Sur les nombres derives // Fund. Math. 1935. Vol. 24. P. 305–308.
3. **MacLane G.R.** Sequences of derivatives and normal families // J. Anal. Math. 1952. Vol. 2, no. 1. P. 72–87. doi: 10.1007/BF02786968 .
4. **Кротов В.Г.** О гладкости универсальных функций Марцинкевича и универсальных тригонометрических рядах // Изв. вузов. Математика. 1991. Т. 35, № 8. P. 26–31.
5. **Grosse-Erdmann K.G.** Holomorphe Monster und Universelle Funktionen // Mitt. Math., Semin. G. 1987. Vol. 176. P. 1–84.
6. **Luh W.** Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets // Analysis. 1986. Vol. 6, no. 2-3. P. 191–207. doi: 10.1524/anly.1986.6.23.191 .
7. **Muller J.** Cntinus functions with universaliy divergent Fourier series on small subsets of the circle // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. 2010. Vol. 348, iss. 21-22. P. 1155–1158. doi: 10.1016/j.crma.2010.10.026 .
8. **Bayart F., Grosse-Erdmann K.-G., Nestoridis V., Papadimitropoulos C.** Abstract theory of universal series and applications // Proc. Lond. Math. Soc. 2008. Vol. 96, no. 2. P. 417–463. doi: 10.1112/plms/pdm043 .
9. **Меньшов Д.Е.** О частичных суммах тригонометрических рядов // Мат. сб. 1947. Т. 20 (62), № 2. P. 197–238.
10. **Талалян А.А.** О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1957. Т. 10, № 3. P. 17–34.
11. **Kolmogorov A.**Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier // Fund. Math. 1925. Vol. 7. P. 24–29. doi: 10.4064/fm-7-1-24-29 .
12. **Grigoryan M.G.** Functions, universal with respect to the classical systems // Adv. Oper. Theory. 2020. Vol. 5, no. 4. P. 1414–1433. doi: 10.1007/s43036-020-00051-z .

13. **Григорян М.Г., Галоян Л.Н.** Функции, универсальные относительно тригонометрической системы // Изв. РАН. Сер. математическая. 2021. Т. 85, № 2. P. 73–94. doi: 10.4213/im8964 .
14. **Григорян М.Г.** Об универсальных рядах Фурье // Мат. заметки. 2020. Т. 108, № 2. С. 296–299. doi: 10.4213/mzm12720 .
15. **Кашин Б.С.** Об одной полной ортонормированной системе // Мат. сб. 1976. Т. 99 (141), № 3. С. 356–365.
16. **Grigoryan M.G. , Sargsyan A.A.** On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$ // J. Func. Anal. 2016. Vol. 270, no. 8. P. 3111–3133. doi: 10.1016/j.jfa.2016.02.021 .
17. **Григорян М.Г.** О существовании и структуре универсальных функций // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 496. С. 30–33. doi: 10.31857/S2686954321010057 .
18. **Grigoryan M.G.** On the universal and strong (L^1, L^∞)-property related to Fourier–Walsh series // Banach J. Math. Anal. 2017. Vol. 11, no. 3. P. 698–712. doi: 10.1215/17358787-2017-0012 .
19. **Grigoryan M.G., Galoyan L.N.** On the universal functions // J. Approx. Theory. 2018. Vol. 225, no. 191. P. 191–208. doi: 10.1016/j.jat.2017.08.003 .
20. **Григорян М.Г.** Функции с универсальными рядами Фурье — Уолша // Мат. сб. 2020. Т. 211, № 6. С. 107–131. doi: 10.4213/sm9302 .
21. **Гецадзе Р.Д** О расходимости по мере кратных рядов Фурье// Сообщ. АН ГССР. 1986. Т. 122, № 2. С. 269–271.
22. **Конягин С.В.** О расходимости по мере кратных рядов Фурье // Мат. заметки. 1988. Т. 44, № 2. С. 196–201.
23. **Конягин С.В.** О сходимости подпоследовательности частных сумм тригонометрического ряда Фурье по Прингсхейму // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 4. С. 121–127. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-121-127 .

Поступила 18.05.2022
После доработки 27.08.2022
Принята к публикации 3.09.2022

Григорян Мартин Геворгович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Ереванский государственный университет
г. Ереван
e-mail: gmarting@ysu.am

REFERENCES

1. Birkhoff G.D. Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1929, vol. 189, pp. 473–475.
2. Marcinkiewicz J. Sur les nombres derives. *Fund. Math.*, 1935, vol. 24, pp. 305–308.
3. MacLane G.R. Sequences of derivatives and normal families. *J. Anal. Math.*, 1952, vol. 2, no. 1, pp. 72–87. doi: 10.1007/BF02786968 .
4. Krotov V.G. On the smoothness of universal Marcinkiewicz functions and universal trigonometric series. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1991, vol. 35, no. 8, pp. 24–28.
5. Grosse-Erdmann K.G. Holomorphe Monster und universelle Funktionen. In: *Mitt. Math., Semin. Giessen*, 1987, vol. 176, pp. 1–84.
6. Luh W. Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets. *Analysis*, 1986, vol. 6, no. 2-3, pp. 191–207. doi: 10.1524/anly.1986.6.23.191 .
7. Mueller J. Continuous functions with universally divergent Fourier series on small subsets of the circle. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2010, vol. 348, pp. 1155–1158. doi: 10.1016/j.crma.2010.10.026 .
8. Bayart F., Grosse-Erdmann K.-G., Nestoridis V., Papadimitropoulos C. Abstract theory of universal series and applications. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2008, vol. 96, no. 2, pp. 417–463. doi: 10.1112/plms/pdm043 .
9. Menchoff D. On partial sums of trigonometric series. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 1947, vol. 20 (62), no. 2, pp. 197–238 (in Russian).

10. Talalyan A.A. On the convergence almost everywhere of subsequences of partial sums of general orthogonal series. *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1957, vol. 10, no. 3, pp. 17–34 (in Russian).
11. Kolmogorov A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier. *Fund. Math.*, 1925, vol. 7, pp. 24–29. doi: 10.4064/fm-7-1-24-29 .
12. Grigoryan M.G. Functions, universal with respect to the classical systems. *Adv. Oper. Theory*, 2020, vol. 5, no. 4, pp. 1414–1433. doi: 10.1007/s43036-020-00051-z .
13. Grigoryan M., Galoyan L. Functions universal with respect to the trigonometric system. *Izv. Math.*, 2021, vol. 85, pp. 241–261. doi: 10.1070/IM8964 .
14. Grigoryan M.G. Universal Fourier series. *Math. Notes*, 2020, vol. 108, no. 2, pp. 282–285. doi: 10.1134/S0001434620070299 .
15. Kashin B.S. On a complete orthonormal system. *Sb. Math.*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 315–324. doi: 10.1070/SM1976v028n03ABEH001654 .
16. Grigoryan M.G., Sargsyan A.A. On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$. *J. Funct. Anal.*, 2016, vol. 270, no. 8, pp. 3111–3133. doi: 10.1016/j.jfa.2016.02.021 .
17. Grigoryan M.G. On the existence and structure of universal functions. *Dokl. Math.*, 2021, vol. 103, no. 1, pp. 23–25. doi: 10.1134/S1064562421010051 .
18. Grigoryan M.G. On the universal and strong (L^1, L^∞)-property related to Fourier–Walsh series. *Banach J. Math. Anal.*, 2017, vol. 11, no. 3, pp. 698–712. doi: 10.1215/17358787-2017-0012 .
19. Grigoryan M.G., Galoyan L.N. On the universal functions. *J. Approx. Theory*, 2018, vol. 225, no. 191, pp. 191–208. doi: 10.1016/j.jat.2017.08.003 .
20. Grigoryan M.G. Functions with universal Fourier–Walsh series. *Sb. Math.*, 2020, vol. 211, no. 6, pp. 850–874. doi: 10.1070/SM9302 .
21. Getsadze R.D. On the divergence in measure of multiple Fourier series. *Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR*, 1986, vol. 122, no. 2, pp. 269–272 (in Russian).
22. Konyagin S.V. Divergence in measure of multiple Fourier series. *Math. Notes*, 1988, vol. 44, no. 2, pp. 589–592. doi: 10.1007/BF01159253 .
23. Konyagin S.V. On the Pringsheim convergence of a subsequence of partial sums of trigonometric Fourier series. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 121–127 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-121-127 .

Received May 18, 2022
Revised August 27, 2022
Accepted September 3, 2022

Funding Agency: This study was supported by the Science Committee of the Republic of Armenia (project no. 21AG-1A066).

Martin Gevorg Grigoryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Yerevan State University, Yerevan, 0025 Armenia, e-mail: gmarting@ysu.am .

Cite this article as: M. G. Grigoryan. On almost universal double Fourier series. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 91–102.