ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.518.36

ОБОБЩЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ФЛУКТУАЦИИ[1]

С. С. Волосивец, А. Н. Мингачев

В статье изучаются ряды из одномерных и двумерных коэффициентов Фурье по мультипликативным системам χ (с образующей ограниченной последовательностью $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$) с весами, удовлетворяющими условиям типа Гоголадзе — Месхиа. Установлены достаточные условия сходимости таких рядов для функций из различных классов обобщенной ограниченной флуктуации.

Ключевые слова: абсолютная сходимость, мультипликативная система, двойной ряд, обобщенная ограниченная флуктуация.

S. S. Volosivets, A. N. Mingachev. Generalized absolute convergence of Fourier series with respect to multiplicative systems of functions of generalized bounded fluctuation.

The series of one-dimensional and two-dimensional Fourier coefficients with respect to multiplicative systems χ (with a bounded generating sequence $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$) with weights satisfying Gogoladze–Meskhia type conditions are studied. Sufficient conditions for the convergence of such series are established for functions from different classes of generalized bounded fluctuation.

Keywords: absolute convergence, multiplicative system, double series, generalized bounded fluctuation.

MSC: 42C10
DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-78-90

1. Введение

В теории тригонометрических рядов важное место занимает вопрос об абсолютной сходимости этих рядов. Пусть 2π-периодическая интегрируемая на периоде функция $f(x)$ ($f \in L^1_{2\pi}$) имеет ряд Фурье $a_0(f)/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx)$. А. Зигмундом [1] была установлена

Теорема A. *Пусть $f \in L^1_{2\pi}$ является функцией ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$ и $|f(x)-f(y)| \le C|x-y|^{\alpha}$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$, где $\alpha > 0$ (т. е. $f \in Lip(\alpha)$). Тогда сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)| + |b_n(f)|). \tag{1}$$

Также А. Зигмундом было отмечено, что условие $|f(x) - f(y)| \le C \ln^{-2-\eta}(2 + 1/|x-y|)$ для $\eta > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \ne y$, вместе с ограниченностью вариации также достаточно для сходимости ряда (1). Р. Салем [2] указал, что вместо условия $f \in Lip(\alpha)$ в теореме A можно взять условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\omega^{1/2}(f, 1/n) < \infty, \tag{2}$$

где $\omega(f, \delta)$ — равномерный модуль непрерывности, и что обоснование этого факта повторяет рассуждение А. Зигмунда [1].

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект FSRR-2020-0006).

Пусть $1 \le p < \infty$. Назовем ограниченную измеримую 2π-периодическую функцию $f(x)$ функцией ограниченной p-вариации, если найдется $M > 0$ такое, что для любого разбиения $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ отрезка $[0, 2\pi]$ верно неравенство $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \le M^p$ (будем писать в этом случае $f \in V_p$). Для измеримой 2π-периодической функции f такой, что $|f|^p \in L^1_{2\pi}$, введем интегральный модуль непрерывности

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 \le h \le \delta} \left(\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad \delta \in [0, 2\pi].$$

М. Изуми и Ш. Изуми [3] установили, что верна

Теорема B. *Пусть* $1 < r < \infty$, $1/r + 1/s = 1$ *и* $1 \le p < 2r$. *Если* $f \in V_p$ *и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/(2s)-1} (\omega_{p+(2-p)s}(f, \pi/n))^{1-p/2r},$$

то ряд (1) *также сходится.*

Кроме сходимости ряда (1) изучалась также сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)|^\beta + |b_n(f)|^\beta), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha (|a_n(f)|^\beta + |b_n(f)|^\beta), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (|a_n(f)|^\beta + |b_n(f)|^\beta),$$

где $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям Гоголадзе — Месхиа (см. ниже). Условия обобщенной абсолютной сходимости тригонометрических рядов или рядов по другим ортонормированным системам являются либо развитием результата А. Зигмунда либо аналогом и обобщением результата М. Изуми и Ш. Изуми. В качестве результата первого типа для системы Уолша, являющейся частным случаем мультипликативных систем, изучаемых в данной работе, можно указать теорему 3 из [4]. Важным утверждением второго типа является результат М. Шрамма и Д. Ватермана для тригонометрических рядов, заменивших условие ограниченности r-вариации на условие ограниченности $\Phi - \Lambda$-вариации, где $\Phi(x)$ — выпуклая N-функция (см. ниже), а $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ удовлетворяет условию $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = \infty$.

К сожалению, исследования неулучшаемости подобных условий являются довольно сложными. Так, Р. Салем доказал, что если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} [\omega(f, n^{-1})]^{1/2+\delta} = \infty$, $\delta > 0$, то результат Зигмунда перестает быть верным. В полной мере неулучшаемость условия (2) установил С. В. Бочкарев [6]. Авторам неизвестны подобные исследования, касающиеся теоремы B.

Для мультипликативных систем первый результат типа теоремы B для функций ограниченной r-вариации доказан в [7, теорема 3]. Мы приведем далее в качестве следствий некоторые более ранние и менее общие результаты. Перейдем к необходимым определениям.

Пусть $\mathbf{P} = \{\mathbf{p_j}\}_{\mathbf{j=1}}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такова, что $2 \le p_j$ при всех $j \in \mathbb{N}$, $\sup_j p_j < \infty$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. Определим последовательность $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ следующим образом: $m_0 = 1$, $m_n = m_{n-1} p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда любое число $x \in [0, 1)$ представимо в виде

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{3}$$

Разложение (3) однозначно, если при $x = s/m_n$, $0 < s < m_n$, $s \in \mathbb{Z}$, брать $x_j = [x m_j] \pmod{p_j}$. В этом случае получается конечное число ненулевых x_j. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \quad k_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{4}$$

Для чисел $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ с разложениями (3), (4) положим по определению

$$\chi_k(x) = \exp\Big(2\pi i\Big(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\Big)\Big).$$

Система функций $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется *мультипликативной системой.* Известно, что она ортонормирована и полна в $L^1[0,1)$ (см. [8, гл. 1, § 1.5]). Легко видеть, что при $0 \le n < m_k$ функция $\chi_n(x)$ постоянна на $I_j^k = [(j-1)/m_k, j/m_k)$, $1 \le j \le m_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, а при $n \ge m_k$ верно, что $\int_{I_j^k} \chi_n(x)\,dx = 0$. Для $f \in L^1[0,1)$ зададим коэффициенты Фурье равенством

$$\widehat{f}(j) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_j(t)}\,dt, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть $x, y \in [0,1)$ имеют разложение (3) и $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $z_j \in \mathbb{Z}_j$. Если равенство $z_j = p_j - 1$ неверно для бесконечного числа $j \in \mathbb{Z}_+$, то полагаем $x \oplus y = z$, где $z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j/m_j$. Известно, что при фиксированном y величина $x \oplus y$ определена для всех x, кроме счетного числа, и что интеграл Лебега инвариантен относительно введенного обобщенного сдвига

$$\int_0^1 f(x \oplus y)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad f \in L^1[0,1), \quad y \in [0,1)$$

(см. [8, §§ 1.5,2.1]). Отметим, что элемент $x \oplus s/m_n$ определен при всех $x \in [0,1)$, $s \in [0, m_n) \cap \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Известно также, что $\chi_j(x \oplus y) = \chi_j(x)\chi_j(y)$ в случае, когда $j \in \mathbb{Z}_+$ и сумма $x \oplus y$ определена. В частности,

$$\chi_j(x \oplus 1/m_{k+1}) = \chi_j(x)\chi_j(1/m_{k+1}), \quad x \in [0,1), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

Как обычно, пространство $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$. Для $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, введем дискретный модуль непрерывности

$$\omega_k(f)_p = \sup\{\|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_p \colon h \in I_1^k = [0, 1/m_k)\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть $osc(f, I_j^k) = \sup\{|f(x) - f(y)| \colon x, y \in I_j^k\}$. Рассмотрим выпуклую строго возрастающую на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ функцию $\Phi(x)$, такую что

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{x\to+0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty.$$

Тогда $\Phi(x)$ называется *N-функцией* (см. [9, § 1]). Пусть $\Phi(x)$ является N-функцией или $\Phi(x) = x$, $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, такая что $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = +\infty$, где $\Lambda_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1}$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим

$$æ_n(f, \Lambda, \Phi) = \sup_{\{\alpha_i\}} \sum_{i=1}^{m_n} \frac{\Phi(osc(f, I_{\alpha_i}^n))}{\lambda_i},$$

где $\{\alpha_i\} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_n}$ — перестановка множества $\{1, 2, \ldots, m_n\}$. Если $f(x)$ измерима на $[0,1)$ и значение $V_{\Lambda,\Phi}(f, [0,1)) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} æ_n(f, \Lambda, \Phi)$ конечно, то $f(x)$ называется *функцией ограниченной Λ–Φ-флуктуации на* $[0,1)$ (обозначение $f \in \Lambda\mathcal{F}l_\Phi[0,1)$). Легко показать, что $f \in \Lambda Fl_\Phi[0,1)$ ограничена (см. [10]). Понятие функции обобщенной ограниченной флуктуации при $\lambda_i \equiv 1$ и $\Phi(x) = x$, $\Phi(x) = x^p$, $1 < p < \infty$, и в более общем случае N-функции Φ было предложено

К. Онневиром и Д. Ватерманом [11]. Оно применялось к проблемам равномерной и абсолютной сходимости рядов по системам характеров компактных групп Н. Я. Виленкина. Понятие функций ограниченной Λ–Φ-вариации для периодических функций было введено М. Шраммом и Д. Ватерманом [5], тогда как определение $f \in \Lambda Fl_\Phi[0,1)$ предложено Б. Л. Гходадрой [10].

Далее ниже через C (возможно, с индексами) обозначим некоторые положительные константы.

Пусть $\alpha \geq 1$. Будем говорить, что последовательность $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^\infty$ принадлежит классу $A(\alpha) = A(\mathbf{P}, \alpha)$, если $\gamma_k > 0$ при всех k и

$$\Big(\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \gamma_k^\alpha\Big)^{1/\alpha} \leq C m_n^{(1-\alpha)/\alpha} \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} \gamma_k =: C m_n^{(1-\alpha)/\alpha} \Gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При $n = 0$ предполагаем, что аналогичное неравенство верно для $\Gamma_0 = \gamma_0$. Данное определение введено в работе Л. Гоголадзе и Р. Месхиа [12] при $m_n = 2^n$. Отметим, что $A(\alpha_1) \subset A(\alpha_2)$ при $\alpha_1 > \alpha_2$.

Система $\{\chi_i(x)\chi_j(y)\}_{i,j=0}^\infty$ также ортонормирована и полна в $L^1[0,1)^2$, что позволяет определить для $f \in L^1[0,1)^2$ коэффициенты Фурье

$$\widehat{f}(i,j) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\overline{\chi_i(x)\chi_j(y)}\, dx\, dy, \quad i,j \in \mathbb{Z}_+.$$

Через $L^p[0,1)^2$ обозначим множество измеримых на $[0,1)^2$ функций, для которых норма $\|f\|_p = \Big(\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|^p\, dx\, dy\Big)^{1/p}$ конечна. Пусть $\Delta_{uv} f(x,y) = f(x \oplus u, y \oplus v) - f(x \oplus u, y) - f(x, y \oplus v) + f(x,y)$. Ясно, что из условия $f \in L^p[0,1)^2$ следует, что $\|\Delta_{uv} f(\cdot,\cdot)\|_p \to 0$ при $\min(u,v) \to 0$. Поэтому мы можем ввести дискретный модуль непрерывности функции $f \in L^p[0,1)^2$, $1 \leq p < \infty$, в виде двойной последовательности

$$\omega_{kl}(f)_p = \sup\{\|\Delta_{uv} f(\cdot,\cdot)\|_p \colon u \in I_1^k, v \in I_1^l\}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad k,l \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть $f(x,y)$ измерима и ограничена на $[0,1)^2$, $k,l \in \mathbb{Z}_+$, $i \in [1,m_k] \cap \mathbb{Z}$, $j \in [1,m_l] \cap \mathbb{Z}$, $I_{ij}^{kl} = I_i^k \times I_j^l$. Тогда

$$osc(f, I_{ij}^{kl}) = \sup\big\{|f(x,y) - f(u,y) - f(x,v) + f(u,v)| \colon x,u \in I_i^k, y,v \in I_j^l\big\}.$$

Пусть Φ является N-функцией или $\Phi(x) = x$ и $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$, $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ — две неубывающие последовательности положительных чисел, такие что $\Lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1}$ и $\Psi_n = \sum_{i=1}^n \psi_i^{-1}$ стремятся к бесконечности при $n \to \infty$. Рассмотрим

$$æ_{kl}(f, \Phi, \Lambda, \Psi) = \sup \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{m_l} \frac{\Phi(osc(f, I_{\alpha_i,\beta_j}^{kl}))}{\lambda_i \psi_j},$$

где точная верхняя грань берется по всем перестановкам $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m_k}$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^{m_l}$ множеств индексов $\{1,2,\ldots,m_k\}$ и $\{1,2,\ldots,m_l\}$. Если $V_{\Lambda,\Psi,\Phi}(f) = \sup\{æ_{kl}(f,p,\Lambda,\Psi) \colon k,l \in \mathbb{Z}_+\} < \infty$, то f является функцией ограниченной (Λ,Ψ)–Φ-флуктуации (обозначение $f \in (\Lambda,\Psi)\mathcal{F}l_\Phi[0,1)^2$). Это определение аналогично определению функций ограниченной (Λ,Ψ)–Φ-вариации, данному Б. Л. Гходадрой (см. [13]).

Наконец, рассмотрим понятие *обобщенной ограниченной флуктуации смешанного типа*. Пусть Φ_1, Φ_2 являются N-функциями, $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$, $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ — такие же последовательности, как и выше. Для измеримой и ограниченной на $[0,1)^2$ функции f рассмотрим

$$æ_{kl}(f, \Phi_1, \Phi_2, \Lambda, \Psi) = \sup \sum_{j=1}^{m_l} \psi_j^{-1} \Phi_2\Big[\sum_{i=1}^{m_k} \frac{\Phi_1(osc(f, I_{\alpha_i,\beta_j}^{kl})}{\lambda_i}\Big],$$

где точная верхняя грань берется по всем перестановкам $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m_k}$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^{m_l}$ множеств индексов $\{1,2,\ldots,m_k\}$ и $\{1,2,\ldots,m_l\}$. Если

$$V_{\Lambda,\Psi,\Phi_1,\Phi_2}(f)=\sup\{æ_{kl}(f,\Phi_1,\Phi_2,\Lambda,\Psi)\colon k,l\in\mathbb{Z}_+\}<\infty,$$

то f принадлежит пространству $(\Lambda,\Psi)\mathcal{F}l_{\Phi_1,\Phi_2}[0,1)^2$. Это определение является аналогом определения функций (Φ,Ψ)–(Λ^1,Λ^2)-ограниченной вариации, данного К. Н. Даржи и Р. Г. Вьясом [14].

Пусть $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ — двойная последовательность положительных чисел, $\alpha\ge 1$. Если для любых $k,l\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}\gamma_{ij}^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\le C(m_km_l)^{(1-\alpha)/\alpha}\sum_{i=m_{k-1}}^{m_k-1}\sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1}\gamma_{ij}=:C(m_km_l)^{(1-\alpha)/\alpha}\Gamma_{kl},$$

то $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ принадлежит классу $A^*(\alpha,2)=A^*(\alpha,2,\mathbf{P})$. Это определение предложено Ф. Морицем и А. Верешем [15] в случае $m_k=2^k$.

Целью нашей работы является изучение сходимости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k|\hat{f}(k)|^{\beta} \tag{6}$$

и

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\gamma_{ij}|\hat{f}(i,j)|^{\beta}, \tag{7}$$

где f принадлежит одному из введенных выше классов обобщенной ограниченной флуктуации на $[0,1)$ или на $[0,1)^2$, а $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ или $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ удовлетворяют одному из условий типа Гоголадзе — Месхиа. Мы получим обобщения аналогов теоремы B для простых и кратных рядов по мультипликативным системам. Отметим, что аналог теоремы A в одномерном случае при $p_i\equiv 2$, т. е. для системы Уолша, см. в [8, гл. 2, теорема 2.7.10], а в многомерном случае — в [16]. Упомянем также работу Ю. В. Малыхина, С. А. Теляковского и Н. Н. Холщевниковой [17], где рассматривалась задача исследования суммы модулей блоков ряда Фурье — Уолша, что является естественным обобщением задачи об абсолютной сходимости такого ряда (когда блоки состоят из одного элемента).

2. Одномерный случай

Теорема 1. *Пусть $\Phi(x)$ является N-функцией и удовлетворяет Δ_2-условию $\Phi(2t)\le C\Phi(t)$, $t\ge 0$, или $\Phi(x)=x$, а $\Lambda=\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\lim_{n\to\infty}\Lambda_n=+\infty$, где $\Lambda_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}$. Пусть также*

$$1<r<\infty,\quad 1\le p<2r,\quad 1/r+1/s=1,$$

$$0<\beta<2,\quad \gamma\in A(2/(2-\beta)),\quad \Phi_1(x)=\Phi(x^p),\quad f\in\Lambda\mathcal{F}l_{\Phi_1}[0,1)$$

и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}m_n^{-\beta/2}\Gamma_n\Omega_n^{\beta/(2r)}(f), \tag{8}$$

где $\Omega_n(f)=\Phi^{-1}(\omega_n^{2r-p}(f)_{p+(2-p)s}/\Lambda_{m_n})$. Тогда сходится ряд (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения выпуклости и равенства $\Phi(0) = 0$ вытекает неравенство
$$\Phi(\alpha x) = \Phi(\alpha x + (1-\alpha)0) \le \alpha\Phi(x), \quad \alpha \in [0,1]. \tag{9}$$
Ясно, что из сходимости ряда (8) вытекает сходимость такого же ряда для $f_1 = f/C$, где $C \ge 1$. С другой стороны, сходимость ряда (6) для f равносильна сходимости такого же ряда для f_1. Как уже отмечалось, функция $f \in \Lambda\mathcal{F}l_\Phi[0,1)$ ограничена (см. [10]), поэтому можно добиться неравенства $|f_1(x)| \le 1/2$, $x \in [0,1)$, при достаточно большом $C \ge 1$. Для простоты считаем, что $|f(x)| \le 1/2$ на $[0,1)$. Согласно [9, § 1, разд. 6] композиция N-функций есть снова N-функция, поэтому $\Phi(t^p)$ является N-функцией при $p \ge 1$ и удовлетворяет Δ_2-условию, если Φ удовлетворяет этим двум условиям.

В силу ограниченности последовательности $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^\infty$ для $j \in [m_k, m_{k+1})$ справедливо неравенство $|\chi_j(1/m_{k+1}) - 1| \ge C_1 > 0$ (см. подробности в [7]), в силу (5) функция $f(x \oplus 1/m_{k+1}) - f(x)$ имеет ряд Фурье
$$\sum_{j=0}^\infty (\chi_j(1/m_{k+1}) - 1)\widehat{f}(j)\chi_j(x),$$
а в силу инвариантности интеграла Лебега относительно обобщенного сдвига для
$$f_{l,k}(x) = f(x \oplus (l-1)/m_k \oplus 1/m_{k+1}) - f(x \oplus (l-1)/m_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad l = 1,2,\dots,m_k,$$
имеем равенство $\|f_{l,k}\|_2 = \|f(\cdot \oplus 1/m_{k+1}) - f(\cdot)\|_2$ для $f \in L^2[0,1)$. В результате в силу равенства Парсеваля получаем
$$R_k := \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} |\widehat{f}(j)|^2 \le C_1^{-2} \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} |\widehat{f}(j)|^2 |\chi_j(1/m_{k+1}) - 1|^2$$
$$\le C_1^{-2} \sum_{j=0}^\infty |\widehat{f}(j)|^2 |\chi_j(1/m_{k+1}) - 1|^2 = C_1^{-2}\|f_{l,k}\|_2^2, \quad l = 1,2,\dots,m_k.$$
Пусть $r > 1$ и $1/r + 1/s = 1$. Записывая $2 = (p + (2-p)s)/s + p/r$ и применяя неравенство Гёльдера с показателями s и r, находим
$$\|f_{l,k}\|_2^2 = \int_0^1 |f_{l,k}(x)|^2\,dx \le \left(\int_0^1 |f_{l,k}(x)|^{p+(2-p)s\,dx}\right)^{1/s} \left(\int_0^1 |f_{l,k}(x)|^p\,dx\right)^{1/r}$$
$$\le (\omega_k(f)_{p+(2-p)s})^{(p+(2-p)s)/s} \left(\int_0^1 |f_{l,k}(x)|^p\,dx\right)^{1/r}.$$
Отметим, что $p/s + (2-p)s/s = p/s + 2 - p = (2r-p)/r$, поэтому
$$R_k^r \le C_2\|f_{l,k}\|^{2r} \le C_2\omega_k^{2r-p}(f)_{p+(2-p)s} \int_0^1 |f_{l,k}(x)|^p\,dx. \tag{10}$$
При фиксированном $x \in [0,1)$ элементы $x \oplus (l-1)/m_k \oplus 1/m_{k+1}$ и $x \oplus (l-1)/m_k$ принадлежат одному множеству вида $I_{l_1}^k$ и $|f_{l,k}(x)| \le osc(f, I_{l_1}^k)$. При этом разным l соответствуют разные l_1. Кроме того, мы считаем, что $|f(x)| \le 1/2$, значит, верно неравенство $B_k := \omega_k^{2r-p}(f)_{p+(2-p)s} \le 1$. В силу (10), (9), Δ_2-условия на Φ и интегрального неравенства Йенсена имеем
$$\Phi(R_k^r) \le C_3\Phi\left(B_k \int_0^1 |f_{l,k}(x)|^p\,dx\right) \le C_3B_k\Phi\left(\int_0^1 |f_{l,k}(x)|^p\,dx\right) \le C_3B_k \int_0^1 \Phi_1(|f_{l,k}(x)|)\,dx.$$

Умножая последнее неравенство на λ_l^{-1} и суммируя полученные неравенства по $l = 1, 2, \ldots, m_k$, находим, что

$$\Lambda_{m_k}\Phi(R_k^r) \le C_3 B_k \int\limits_0^1 \sum_{l=1}^{m_k} \frac{\Phi_1(|f_{l,k}(x)|)}{\lambda_l}\, dx \le C_3 B_k V_{\Lambda,\Phi_1}(f, [0,1)).$$

Для любой N-функции Φ выполнено Δ_2-условие на функцию Φ^{-1} (см. [9, формула (1.20)]). Поэтому

$$R_k^r \le \Phi^{-1}\Big(C_3 V_{\Lambda,\Phi_1}(f,[0,1))\frac{B_k}{\Lambda_{m_k}}\Big) \le C_4\Phi^{-1}\Big(\frac{B_k}{\Lambda_{m_k}}\Big), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Применяя неравенство Гёльдера и условие $\gamma \in A(2/(2-\beta))$, мы имеем

$$\sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} \gamma_j |\widehat{f}(j)|^\beta \le \Big(\sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} |\widehat{f}(j)|^2\Big)^{\beta/2} \Big(\sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} \gamma_j^{2/(2-\beta)}\Big)^{1-\beta/2}$$

$$\le R_k^{\beta/2} C_5 m_k^{-\beta/2}\Gamma_k \le C_6\Big(\Phi^{-1}(B_k/\Lambda_{m_k})\Big)^{\beta/2r} m_k^{-\beta/2}\Gamma_k. \tag{11}$$

Суммируя (11) по $k \in \mathbb{Z}_+$, доказываем утверждение теоремы. □

В случае $\Phi(u) = u^p$, $1 \le p < \infty$, будем писать $f \in \Lambda\mathcal{F}l^{(p)}[0,1)$ вместо $f \in \Lambda\mathcal{F}l_\Phi[0,1)$. Если вдобавок $\lambda_k \equiv 1$, то пишем $f \in \mathcal{F}l^{(p)}[0,1)$ вместо $f \in \Lambda\mathcal{F}l^{(p)}[0,1)$.

Следствие 1. *Пусть $1 < r < \infty$, $1 \le p < 2r$, $1/r + 1/s = 1$, $0 < \beta < 2$, $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^\infty \in A(2/(2-\beta))$, $f \in \Lambda\mathcal{F}l^{(p)}[0,1)$ и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-\beta/2}\Gamma_n(\Lambda_{m_n}^{-1}\omega_n^{2r-p}(f)_{p+(2-p)s)}))^{\beta/(2r)}.$$

Тогда ряд (6) *также сходится.*

Следствие 1 установлено М. А. Кузнецовой [19, теорема 2]. Для доказательства надо положить $\Phi(x) = x$ и воспользоваться теоремой 1.

Следствие 2. *Пусть $1 < r < \infty$, $1 \le p < 2r$, $1/r + 1/s = 1$, $0 < \beta < 2$, $f \in \mathcal{F}l^{(p)}[0,1)$ и $\gamma \in A(2/(2-\beta))$. Если сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{-\beta/2-\beta/2p}(\omega_k(f)_{p+(2-p)s})^{\beta-\beta r/2p}\,\Gamma_k,$$

то сходится ряд (6).

Следствие 2 установлено Б. И. Голубовым и первым из автором в [7, теорема 3]. Для доказательства надо положить $\Lambda_{m_k} = m_k$ в неравенстве следствия 1.

3. Двумерный случай

Теорема 2. *Пусть $\Phi(x)$ — выпуклая N-функция, удовлетворяющая Δ_2-условию на $\mathbb{R}_+$, $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ и $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ — две неубывающие последовательности положительных чисел, такие что $\lim_{n\to\infty}\Lambda_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}\Psi_n = +\infty$, где $\Lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1}$ и $\Psi_n = \sum_{i=1}^n \psi_i^{-1}$. Если*

$$1 < r < \infty, \quad 1 \le p < 2r, \quad 1/r + 1/s = 1, \quad 0 < \beta < 2,$$

$$\Phi_1(x) = \Phi(x^p), \quad f \in (\Lambda,\Psi)\mathcal{F}l_{\Phi_1}[0,1)^2, \quad \gamma \in A^*(2/(2-\beta), 2)$$

и сходится ряд

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}(m_i m_j)^{-\beta/2}\Gamma_{ij}\Omega_{ij}^{\beta/(2r)},$$

где $\Omega_{ij}=\Phi^{-1}(\Lambda_{m_i}^{-1}\Psi_{m_j}^{-1}\omega_{ij}(f)_{p+(2-p)s})$, *то ряд* (7) *тоже сходится.*

Доказательство. Так как для $f_1(x,y)=Cf(x,y)$, $f\in L^1[0,1)^2$, верно, что $|\widehat{f}_1(k,l)|=|C||\widehat{f}(k,l)|$, $k,l\in\mathbb{Z}_+$, то достаточно доказать теорему 2 для такой функции, что $|f(x,y)|\le 1/4$ при $x,y\in[0,1)$. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}f_{k,l}(x,y)&=f(x_{k,M}\oplus m_{M+1}^{-1},y_{l,Q}\oplus m_{Q+1}^{-1})-f(x_{k,M},y_{l,Q}\oplus m_{Q+1}^{-1})\\&-f(x_{k,M}\oplus m_{M+1}^{-1},y_{l,Q})+f(x_{k,M},y_{l,Q}),\end{aligned}\tag{12}$$

где $x_{k,M}=x\oplus(k-1)m_M^{-1}$ и $y_{l,Q}=y\oplus(l-1)m_Q^{-1}$, $k=1,2,\dots,m_M$, $l=1,2,\dots,m_Q$, $M,Q\in\mathbb{Z}_+$. Если $x,y\in[0,1)$ фиксированы, то $x_{k,M}\oplus m_{M+1}^{-1}$ и $x_{k,M}$ принадлежат некоторому множеству $I_{k_1}^M$, а $y_{l,Q}\oplus m_{Q+1}^{-1}$ и $y_{l,Q}$ принадлежат некоторому множеству $I_{l_1}^Q$ и $|f_{k,l}(x,y)|\le osc(f,I_{k_1,l_1}^{MQ})$. При этом разным парам (k,l) соответствуют разные пары (k_1,l_1). Ясно, что $|f_{k,l}(x,y)|\le 1$. Рассмотрим

$$R_{M,Q}=\sum_{i=m_M}^{m_{M+1}-1}\sum_{j=m_Q}^{m_{Q+1}-1}|\widehat{f}(i,j)|^2.$$

Тогда аналогично доказательству теоремы 1 справедливо неравенство $R_{M,Q}\le C_1\|f_{k,l}\|_2^2$, и в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}\|f_{k,l}\|_2^2&\le\Bigg(\int\limits_{[0,1)^2}|f_{k,l}(x,y)|^{p+(2-p)s}\,dx\,dy\Bigg)^{1/s}\Bigg(\int\limits_{[0,1)^2}|f_{k,l}(x,y)|^{p}\,dx\,dy\Bigg)^{1/r}\\&\le(\omega_{M,Q}(f)_{p+(2-p)s})^{(2r-p)/r}\Bigg(\int\limits_{[0,1)^2}|f_{k,l}(x,y)|^{p}\,dx\,dy\Bigg)^{1/r}.\end{aligned}$$

В итоге получаем

$$R_{M,Q}^r\le C_1^r\|f_{k,l}\|_2^{2r}\le C_1^r\omega_{M,Q}^{2r-p}(f)_{p+(2-p)s}\int\limits_{[0,1)^2}|f_{k,l}(x,y)|^p\,dx\,dy,\tag{13}$$

поскольку $|f_{k,l}(x,y)|\le 1$ на $[0,1)^2$. Заметим, что величина $B_{MQ}:=\omega_{M,Q}^{2r-p}(f)_{p+(2-p)s}$ не превосходит 1. В силу неравенства Йенсена и (13) находим, что

$$\Phi(R_{M,Q}^r)\le C_2\Phi\Bigg(B_{MQ}\int\limits_{[0,1)^2}|f_{k,l}(x,y)|^p\,dx\,dy\Bigg)\le C_2B_{MQ}\int\limits_{[0,1)^2}\Phi_1(|f_{k,l}(x,y)|)\,dx\,dy.\tag{14}$$

Здесь $\Phi(C_1^r x)\le C_2\Phi(x)$ и C_2 существует в силу Δ_2-условия. Умножая неравенства (14) на $\lambda_k^{-1}\psi_l^{-1}$ и суммируя полученные неравенства по $k=1,2,\dots,m_M$, $l=1,2,\dots,m_Q$, мы получаем

$$\Lambda_{m_M}\Psi_{m_Q}\Phi(R_{MQ}^r)\le C_2B_{MQ}\int\limits_{[0,1)^2}\sum_{k=1}^{m_M}\sum_{l=1}^{m_Q}\frac{\Phi_1(|f_{k,l}(x,y)|)}{\lambda_k\psi_l}\,dx\,dy\le C_2B_{MQ}V_{\Lambda,\Psi,\Phi_1}(f,[0,1)^2).$$

Как показано при доказательстве теоремы 1 $\Phi^{-1}(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию $\Phi^{-1}(2x)\le C_3\Phi^{-1}(x)$, $x\ge 0$. Поэтому

$$R_{MQ}^r\le\Phi^{-1}\Big(C_2V_{\Lambda,\Psi,\Phi_1}(f,[0,1)^2)\frac{B_{MQ}}{\Lambda_{m_M}\Psi_{m_Q}}\Big)\le C_4(f)\Phi^{-1}\Big(\frac{B_{MQ}}{\Lambda_{m_M}\Psi_{m_Q}}\Big).$$

Применяя неравенство Гёльдера и условие $\gamma\in A^*(2/(2-\beta),2)$, имеем

$$\sum_{i=m_M}^{m_{M+1}-1}\sum_{j=m_Q}^{m_{Q+1}-1}\gamma_{ij}|\widehat{f}(i,j)|^\beta\le R_{MQ}^{\beta/2}\Big(\sum_{i=m_M}^{m_{M+1}-1}\sum_{j=m_Q}^{m_{Q+1}-1}\gamma_{ij}^{2/(2-\beta)}\Big)^{1-\beta/2}\le$$

$$\le C_5(m_Mm_Q)^{-\beta/2}\Gamma_{MQ}\Big(\Phi^{-1}\Big(\frac{B_{MQ}}{\Lambda_{m_M}\Psi_{m_Q}}\Big)\Big)^{\beta/(2r)} \qquad (15)$$

Здесь использован тот факт, что для $\alpha=2/(2-\beta)$ верно равенство $(1-\alpha)/\alpha=-\beta/2$. Суммируя соотношение (15) по $M,Q\in\mathbb{Z}_+$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Следствие 3. *Пусть Φ, Λ, Ψ, p, r, s, β, γ и функция f удовлетворяют условиям теоремы 2, а функции*

$$f_1(x)=\int_0^1 f(x,y)\,dy \quad \text{и} \quad f_2(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dxy$$

принадлежат соответственно $\Lambda\mathcal{F}l_{\Phi_1}[0,1)$ и $\Psi\mathcal{F}l_{\Phi_1}[0,1)$, причем сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^\infty\Gamma_n m_n^{-\beta_2}(\Omega_n^{(1)}(f_1))^{\beta/2r} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^\infty\Gamma_n m_n^{-\beta_2}(\Omega_n^{(2)}(f_2))^{\beta/2r},$$

где

$$\Omega_n^{(1)}(f_1)=\Phi^{-1}\Big(\frac{\omega_n^{2r-p}(f_1)_{p+(2-p)s}}{\Lambda_{m_n}}\Big),\quad \Omega_n^{(2)}(f_2)=\Phi^{-1}\Big(\frac{\omega_n^{2r-p}(f_2)_{p+(2-p)s}}{\Psi_{m_n}}\Big).$$

Если $\{\gamma_{i0}\}_{i=1}^\infty$ и $\{\gamma_{0j}\}_{j=1}^\infty$ удовлетворяют условию $A(2/(2-\beta))$, то сходится ряд

$$\sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty\gamma_{ij}|\widehat{f}(i,j)|^\beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства следствия отметим, что

$$\widehat{f}(i,0)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\overline{\chi_i(x)}\,dy\,dx=\int_0^1 f_1(x)\overline{\chi_i(x)}\,dx=\widehat{f_1}(i),\quad i\in\mathbb{Z}_+,$$

и аналогично $\widehat{f}(0,j)=\widehat{f_2}(j)$, $j\in\mathbb{Z}_+$. Из теоремы 2 вытекает сходимость ряда (7), а из теоремы 1 и условий следствия мы выводим сходимость рядов $\sum_{i=1}^\infty\gamma_{i0}|\widehat{f}(i,0)|^\beta$ и $\sum_{j=1}^\infty\gamma_{0j}|\widehat{f}(0,j)|^\beta$. $\square$

Снова при $\Phi(u)=u^p$, $1<p<\infty$, пишем $f\in(\Lambda,\Psi)\mathcal{F}l^{(p)}[0,1)^2$ вместо $f\in(\Lambda,\Psi)\mathcal{F}l_\Phi[0,1)^2$.

Следствие 4. *Пусть $r,s>1$, $1/r+1/s=1$, $1\le p<2r$, $f\in(\Lambda,\Psi)\mathcal{F}l^{(p)}[0,1)^2$, $0<\beta<2$, $\gamma=\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^\infty\in A^*(2/(2-\beta),2)$. Если сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^\infty\sum_{l=0}^\infty\Big(\frac{(\omega_{kl}(f)_{(2-p)s+p})^{2r-p}}{\Lambda_{m_k}\Psi_{m_l}}\Big)^{\beta/2r}(m_km_l)^{-\beta/2}\Gamma_{kl}^*,$$

то ряд (7) также сходится.

Следствие 4 получено первым из авторов и М. А. Кузнецовой [18, теорема 6]. Оно выводится из теоремы 2 при $\Phi(x)=x$.

Теорема 3. *Пусть* Φ_1, Φ_2 *— выпуклые* N*-функции, удовлетворяющие* Δ_2*-условию,* $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ *и* $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— неубывающие последовательности положительных чисел такие, что* $\lim_{n\to\infty}\Lambda_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}\Psi_n = +\infty$. *Если*

$$1 < r < \infty, \quad 1 \le p < 2r, \quad \Phi_1^*(x) = \Phi_1(x^p), \quad 1/r + 1/s = 1,$$

$$0 < \beta < 2, \quad f \in (\Lambda, \Psi)\mathcal{F}l_{\Phi_1^*,\Phi_2^*}[0,1)^2, \quad \gamma \in A^*(2/(2-\beta), 2)$$

и сходится ряд

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}(m_i m_j)^{-\beta/2}\Gamma_{ij}\Omega_{ij}^{\beta/(2r)},$$

где $\Omega_{ij} = \Phi_1^{-1}(\Lambda_{m_i}^{-1}\Phi_2^{-1}(\Psi_{m_j}^{-1}\omega_{ij}^{2r-p}(f)_{p+(2-p)s}))$, *то ряд* (7) *тоже сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова имеем неравенство (13) и считаем, что выполнены неравенства $|f(x,y)| \le 1/4$, $B_{MQ} \le 1$, где $B_{MQ} = \omega_{MQ}^{2r-p}(f)_{p+(2-p)s}$. В силу неравенства Йенсена и соотношения (9) находим, что

$$\Phi_1(R_{MQ}^r) \le C_1\Phi_1\biggl(B_{MQ}\int\limits_{[0,1)^2}|f_{k,l}(x,y)|^p\,dx\,dy\biggr) \le C_1 B_{MQ}\int\limits_{[0,1)^2}\Phi_1^*(|f_{k,l}(x,y)|)\,dx\,dy, \tag{16}$$

где функция $f_{k,l}(x,y)$ определена в (12). Умножая неравенства (16) на λ_k^{-1} и суммируя полученные неравенства по $k = 1, 2, \ldots, m_M$, получаем

$$\Lambda_{m_M}\Phi_1(R_{MQ}^r) \le C_1 B_{MQ}\int\limits_{[0,1)^2}\sum_{k=1}^{m_M}\frac{\Phi_1(|f_{k,l}(x,y)|^p)}{\lambda_k}\,dx\,dy.$$

С помощью неравенства Йенсена и формулы (9) имеем

$$\Phi_2(\Lambda_{m_M}\Phi_1(R_{MQ}^r)) \le C_2 B_{MQ}\Phi_2\biggl(\int\limits_{[0,1)^2}\sum_{k=1}^{m_M}\frac{\Phi_1^*(|f_{k,l}(x,y)|)}{\lambda_k}\,dx\,dy\biggr)$$

$$\le C_2 B_{MQ}\int\limits_{[0,1)^2}\Phi_2\Bigl(\sum_{k=1}^{m_M}\frac{\Phi_1^*(|f_{k,l}(x,y)|)}{\lambda_k}\Bigr)\,dx\,dy. \tag{17}$$

Наконец,

$$\Psi_{m_Q}\Phi_2(\Lambda_{m_M}\Phi_1(R_{MQ}^r)) \le C_2 B_{MQ}\int\limits_{[0,1)^2}\sum_{l=1}^{m_Q}\psi_l^{-1}\Phi_2\Bigl(\sum_{k=1}^{m_M}\frac{\Phi_1^*(|f_{k,l}(x,y)|)}{\lambda_k}\Bigr)\,dx\,dy \le C_3 B_{MQ},$$

где $C_3 = C_2 V_{\Lambda,\Psi,\Phi_1^*,\Phi_2}(f,[0,1)^2)$. Из оценок выше выводим неравенства

$$\Lambda_{m_M}\Phi_1(R_{MQ}^r) \le C_4\Phi_2^{-1}(\Psi_{m_Q}^{-1}B_{MQ})$$

и

$$R_{MQ}^r \le C_5\Phi_1^{-1}(\Lambda_{m_M}^{-1}\Phi_2^{-1}(B_{MQ}/\Psi_{m_Q})),$$

поскольку Φ_1^{-1} и Φ_2^{-1} удовлетворяют Δ_2-условию. Далее аналогично доказательству теоремы 2 с помощью неравенства Гёльдера и условия $\gamma \in A^*(2/(2-\beta), 2)$ имеем

$$\sum_{i=m_M}^{m_{M+1}-1}\sum_{j=m_Q}^{m_{Q+1}-1}\gamma_{ij}|\widehat{f}(i,j)|^\beta \le R_{MQ}^{\beta/2}\Bigl(\sum_{i=m_M}^{m_{M+1}-1}\sum_{j=m_Q}^{m_{Q+1}-1}\gamma_{ij}^{2/(2-\beta)}\Bigr)^{1-\beta/2}$$

$$\le C_6(m_M m_Q)^{-\beta/2}\Gamma_{MQ}(\Phi_1^{-1}(\Lambda_{m_M}^{-1}\Phi_2^{-1}(B_{MQ}/\Psi_{m_Q})))^{\beta/(2r)}. \tag{18}$$

Суммируя неравенства (18) по $M, Q \in \mathbb{Z}_+$, получаем утверждение теоремы 3. $\square$

Методом доказательства теоремы 3 можно установить следующий результат.

Следствие 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и сходится ряд*

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}(m_i m_j)^{-\beta/2}\Gamma_{ij}(\Omega^*_{ij})^{\beta/(2r)},$$

где $\Omega^*_{ij}=\Phi_1^{-1}(\Lambda_{m_i}^{-1}\Phi_2^{-1}(\Psi_{m_j}^{-1})\omega_{ij}^{2r-p}(f)_{p+(2-p)s})$. *Тогда сходится ряд* (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова используем обозначение $B_{MQ}=\omega_{MQ}^{2r-p}(f)_{p+(2-p)s}$. Вместо неравенства (17) можно записать при $B_{MQ}>0$

$$\Phi_2\Big(\frac{\Lambda_{m_M}}{B_{MQ}}\Phi_1(B^r_{MQ})\Big)\le C_1\Phi_2\Big(\int\limits_{[0,1)^2}\sum_{k=1}^{m_M}\frac{\Phi_1^*(|f_{k,l}(x,y)|)}{\lambda_k}\,dx\,dy\Big)$$

$$\le C_1\int\limits_{[0,1)^2}\Phi_2\Big(\sum_{k=1}^{m_M}\frac{\Phi_1^*(|f_{k,l}(x,y)|)}{\lambda_k}\Big)\,dx\,dy.$$

Умножая последнее неравенство на ψ_l^{-1} и суммируя по $l=1,2,\dots,m_Q$, получаем

$$\Psi_{m_Q}\Phi_2\Big(\frac{\Lambda_{m_M}}{B_{MQ}}\Phi_1(B^r_{MQ})\Big)$$

$$\le C_2\int\limits_{[0,1)^2}\sum_{l=1}^{m_Q}\psi_l^{-1}\Phi_2\Big(\sum_{k=1}^{m_M}\frac{\Phi_1^*(|f_{k,l}(x,y)|)}{\lambda_k}\Big)\,dx\,dy\le C_2V_{\Lambda,\Psi,\Phi_1^*,\Phi_2}(f,[0,1)^2)=C_3. \qquad (19)$$

Из (19) с помощью Δ_2-условия для функций Φ_1^{-1} и Φ_2^{-1} выводятся неравенства

$$\frac{\Lambda_{m_M}}{B_{MQ}}\Phi_1(R^r_{MQ})\le\Phi_2^{-1}\Big(\frac{C_3}{\Psi_{m_Q}}\Big)\le C_4\Phi_2^{-1}\Big(\frac{1}{\Psi_{m_Q}}\Big)$$

и $R^r_{MQ}\le C_5\Phi^{-1}(\Lambda_{m_M}^{-1}B_{MQ}\Phi_2^{-1}(\Psi_{m_Q}^{-1}))$. Ясно, что последнее неравенство верно также в случае $B_{MQ}=0$. Далее аналогично доказательству теорем 2 и 3 получаем результат следствия 3. □

Авторы выражают признательность рецензенту за замечания, которые помогли уточнить формулировки результатов и улучшить их представление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zygmund A.** Remarque sur la convergence absolute des séries de Fourier // J.London Math. Soc. 1928. Vol. 3, no. 1. P. 194–196. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-3.3.194
2. **Salem R.** On a theorem of Zygmund // Duke Math. J. 1943. Vol. 10, no. 1. P. 23–31.
3. **Izumi M., Izumi S.** On absolute convergence of Fourier series // Ark. Mat. 1967. Vol. 7, no. 12. P. 177–184.
4. **Móricz F.** Absolute convergence of Walsh-Fourier series and related results // Anal. Math. 2010. V. 36, no. 4. P. 273–286.
5. **Schramm M., Waterman D.** Absolute convergence of Fourier series of functions of class $\Lambda BV^{(p)}$ and $\phi\Lambda BV$ // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1982. Vol. 40, no. 3-4. P. 273–276.
6. **Бочкарев С.В.** О проблеме Зигмунда // Изв. АН СССР. Сер. математическая. Т. 37, № 3. С. 630–638.
7. **Golubov B.I., Volosivets S.S.** Generalized absolute convergence of single and double Fourier series with respect to multiplicative systems // Anal. Math. 2012. Vol. 38, no. 2. P. 105–122.
8. **Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.** Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987. 344 с.

9. **Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 272 с.
10. **Ghodadra B.L.** Applications of Hölder's and Jensen's inequalities in studying the β-absolute convergence of Vilenkin — Fourier series // Math. Ineq. Appl. 2014. Vol. 17, no. 2. P. 749–760.
11. **Onneweer C.W., Waterman D.** Uniform convergence of Fourier series on groups. I. // Michigan Math. J. 1971. Vol. 18, no. 3. P. 265–273.
12. **Gogoladze L., Meskhia R.** On the absolute convergence of trigonometric Fourier series // Proc. Razmadze Math. Inst. 2006. Vol. 141. P. 29–40.
13. **Ghodadra B.L.** Absolute convergence of multiple Fourier series of functions of $\phi(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$-bounded variation // Säo Paulo J. Math. Sci. 2017. Vol. 11, no. 1. P. 94–124.
14. **Darji K.N., Vyas R.G.** On weighted β-absolute convergence of double Fourier series // J. Classical Anal. 2021. Vol. 12, no. 1. P. 1-16.
15. **Móricz F., Veres A.** Absolute convergence of multiple Fourier series revisited // Anal. Math. 2008. Vol. 34, no. 2. P. 145–162.
16. **Схиртладзе И.А.** Об абсолютной сходимости рядов Фурье – Уолша // Сообщ. АН Груз. ССР. 1971. Т. 64, № 2. С. 274–276.
17. **Малыхин Ю.В., Теляковский С.А., Холщевникова Н.Н.** Интегрируемость суммы модулей блоков рядов Фурье — Уолша функций ограниченной вариации // Тр. МИРАН. 2015. Т. 290. С. 323–334.
18. **Кузнецова М.А.** Обобщенная абсолютная сходимость рядов Фурье по мультипликативным системам функций обобщенной ограниченной вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, № 3. С. 304–312.
19. **Волосивец С.С., Кузнецова М.А.** Обобщенная абсолютная сходимость простых и двойных рядов по мультипликативным системам // Мат. заметки. 2020. Т. 107, № 2. С. 195–209.

Поступила 23.07.2022
После доработки 21.10.2022
Принята к публикации 31.10.2022

Волосивец Сергей Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Саратовский государственный университет
г. Саратов
e-mail:volosivetsss@mail.ru

Мингачев Александр Николаевич
студент
Саратовский государственный университет
г. Саратов
e-mail:sashamin2011@yandex.ru

REFERENCES

1. Zygmund A. Remarque sur la convergence absolute des séries de Fourier. *J. London Math. Soc.*, 1928, vol. 3, no. 1, pp. 194–196.
2. Salem R. On a theorem of Zygmund. *Duke Math. J.*, 1943, vol. 10, no. 1, pp. 23–31.
3. Izumi M., Izumi S. On absolute convergence of Fourier series. *Ark. Mat.*, 1967, vol. 7, no. 12, pp. 177–184.
4. Móricz F. Absolute convergence of Walsh–Fourier series and related results. *Anal. Math.*, 2010, vol. 36, no. 4, pp. 273–286.
5. Schramm M., Waterman D. Absolute convergence of Fourier series of functions of class $\Lambda BV^{(p)}$ and $\phi\Lambda BV$. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 1982, vol. 40, no. 3-4, pp. 273–276.
6. Bochkarev S.V. On a Zygmund problem. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 37, no. 3, pp. 629–637. doi:10.1070/im1973v007n03abeh00191973 .
7. Golubov B.I., Volosivets S.S. Generalized absolute convergence of single and double Fourier series with respect to multiplicative systems. *Anal. Math.*, 2012, vol. 38, no. 2, pp. 105–122. doi: 10.1007/s10476-012-0202-8 .

8. Golubov B., Efimov A., Skvortsov V. *Walsh series and trabsforms. Theory and applications.* Dordrecht: Klüwer, 1991, 368 p. Original Russian text published in Golubov B.I., Efimov A.V., Skvortsov V.A. Ryady i preobrazovaniya Uolsha. Teoriya i primeneniya, Moscow: Nauka Publ., 1987, 344 p.
9. Krasnosel'skii M.A., Rutickii Ya.B. *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Groningen: Noordhoff, 1961, 380 p. Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Rutickii Ya.B. Vypuklye funktsii i prostranstva Orlicha, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1958, 272 p.
10. Ghodadra B.L. Applications of Hölder's and Jensen's inequalities in studying the β-absolute convergence of Vilenkin–Fourier series. *Math. Ineq. Appl.*, 2014, vol. 17, no. 2, pp. 749–760.
11. Onneweer C.W., Waterman D. Uniform convergence of Fourier series on groups. I. *Michigan Math. J.*, 1971, vol. 18, no. 3, pp. 265–273.
12. Gogoladze L., Meskhia R. On the absolute convergence of trigonometric Fourier series. *Proc. Razmadze Math. Inst.*, 2006, vol. 141, pp. 29–40.
13. Ghodadra B.L. Absolute convergence of multiple Fourier series of functions of $\phi(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$-bounded variation. *Säo Paulo J. Math. Sci.*, 2017, vol. 11, no. 1, pp. 94–124.
14. Darji K.N., Vyas R.G. On weighted β-absolute convergence of double Fourier series. *J. Classical Anal.*, 2021, vol. 12, no. 1, pp. 1–16.
15. Móricz F., Veres A. Absolute convergence of multiple Fourier series revisited. *Anal. Math.*, 2008, vol. 34, no. 2, pp. 145–162. doi: 10.1007/s10476-008-0205-7 .
16. Skhirtladze I.A. On absolute convergence of Walsh–Fourier series. *Soobsch. AN Gruz. SSR*, 1971, vol. 64, no 2, pp. 274–276 (in Russian).
17. Malykhin Yu.V., Telyakovskii S.A., Kholshchevnikova N.N. Integrability of the sum of absolute values of blocks of the Fourier–Walsh series for functions of bounded variation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 290, pp. 306–317. doi: 10.1134/S0081543815060279 .
18. Volosivets S.S., Kuznetsova M.A. Generalized absolute convergence of single and double series in multiplicative systems. *Math. Notes*, 2020, vol. 107, no. 2, pp. 217–230. C. 195–209.
19. Kuznetsova M.A. Generalized absolute convergence of Fourier series with respect to multiplicative systems of functions of generalized bounded variation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, no. 3, pp. 304–312 (in Russian). doi: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-304-312 .

Received July 26, 2022
Revised October 21, 2022
Accepted October 31, 2022

Funding Agency:The research of the first author was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the State Assignment (agreement no. FSRR-2020-0006).

Sergey Sergeevich Volosivets , Cand. Sci. (Phys.-Math.), Saratov State University, Saratov, 410012 Russia, e-mail: volosivetsss@mail.ru .

Alexandr Nikolaevich Mingachev, student, Saratov State University, Saratov, 410012 Russia, e-mail: sashamin2011@yandex.ru .

Cite this article as: S. S. Volosivets, A. N. Mingachev. Generalized absolute convergence of Fourier series with respect to multiplicative systems of functions of generalized bounded fluctuation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 78–90 .