ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 519.65

УСЛОВИЯ ФОРМОСОХРАНЕНИЯ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ[1]

Ю. С. Волков

Ранее Ю. Н. Субботин рассмотрел задачу интерполяции в среднем, где интерполируемые значения функции заменены усредненными значениями на промежутке. В его работе сетка была равномерной, но шаг сетки мог отличаться от величины промежутков усреднения. Им исследованы вопросы существования и сходимости в разных метриках таких сплайнов. В литературе сплайны такого вида еще называют интегральными или гистосплайнами. В настоящей работе рассматривается такой интерполяционный в среднем сплайн второй степени на произвольной неравномерной сетке отрезка, промежутками усреднения выступают заданные интервалы сетки. Мы получили достаточные условия наследования интегральным сплайном таких свойств приближаемой функции, как неотрицательность, монотонность и выпуклость.

Ключевые слова: интегральный сплайн, интерполяция в среднем, формосохранение, сплайны второй степени.

Yu. S. Volkov. Shape preserving conditions for integro quadratic spline interpolation in the mean.

Earlier, Yu. N. Subbotin considered the problem of interpolation in the mean, where the interpolated values of the function are replaced by averaged values on an interval. In his paper, the grid was uniform, but the space grid step could differ from the size of the averaging intervals. Subbotin investigated the existence of such splines and their convergence in different metrics. In the literature, splines of this type are also called integro or histosplines. The present paper considers such an interpolating in the mean quadratic spline on an arbitrary nonuniform grid of a closed interval, where the averaging intervals are the grid intervals. Sufficient conditions are obtained for the inheritance by an integro spline of certain properties of the approximated function such as nonnegativity, monotonicity, and convexity.

Keywords: integro spline, interpolation in the mean, shape preserving, quadratic splines.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-71-77

Введение

Ю. Н. Субботин [1] рассмотрел задачу интерполяции в среднем, где интерполируемые значения функции заменены усредненными значениями на промежутке. В его работе сетка была равномерной, но шаг сетки мог отличаться от величины промежутков усреднения. Им исследованы вопросы существования и сходимости в разных метриках таких сплайнов. В литературе сплайны такого вида еще называют интегральными (integro splines) или гистосплайнами [2]. В работе [3] сплайн второй степени изучался более подробно и на произвольной неравномерной сетке отрезка, промежутками усреднения выступали заданные интервалы сетки. Для этого же сплайна на равномерной сетке исследованы точки суперсходимости [4].

В настоящей статье мы рассматриваем задачу наследования геометрических свойств, формы приближаемой функции квадратическим интегральным сплайном при интерполяции в среднем. Нас интересуют условия, при которых такой сплайн будет положительным, монотонным или выпуклым, если исходные данные соответственно положительны, монотонны или выпуклы. Ранее условия монотонности и выпуклости исследовались для кубических интегральных сплайнов [5–7].

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF–2022–0015).

1. Положительность

Пусть Δ — разбиение отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,\ldots,n-1$. Сплайн второй степени $S(x)$ с узлами на сетке Δ гладкости $C^1[a,b]$ будем называть *интерполяционным в среднем*, или *интегральным сплайном*, если он приближает функцию $y(x)$, значения которой неизвестны, а известны лишь усредненные значения I_i на каждом промежутке сетки $[x_i, x_{i+1}]$, причем усредненные значения сплайна принимают заданные значения, а именно,

$$\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)\,dx = I_i = \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y(x)\,dx, \quad i = 0,\ldots,n-1.$$

Для однозначного определения сплайна $S(x)$ требуются дополнительные условия, которые возьмем в виде обычных условий интерполяции на концах отрезка

$$S(a) = y(a), \quad S(b) = y(b). \tag{1}$$

Наша задача — найти условия, при которых сплайн $S(x)$ будет наследовать свойства положительности (неотрицательности), монотонности или выпуклости приближаемой функции $y(x)$. Если приближаемая функция $y(x)$ неотрицательна, то заданные значения $\{I_i\}$ будут неотрицательны, и мы хотим, чтобы сплайн $S(x)$ был неотрицательным на отрезке $[a,b]$. Если интерполируемая функция $y(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$, то последовательность средних значений $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ будет монотонной; требуется, чтобы и сплайн $S(x)$ был монотонным. Если же функция $y(x)$ выпукла ($y''(x) > 0$), то для заданных усредненных значений будут выполнены неравенства

$$\frac{I_{i+1} - I_i}{h_i + h_{i+1}} > \frac{I_i - I_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad i = 2,\ldots,n-2;$$

нужно найти условия выпуклости сплайна $S(x)$.

Для обычных интерполяционных сплайнов второй и третьей степени такая задача изучена ранее, достаточные условия формосохранения приведены в работах [8–10]. В их основе лежит результат В. Л. Мирошниченко [11] о достаточных условиях положительного решения трехдиагональной системы линейных уравнений с диагональным преобладанием при положительной правой части.

Теорема 1 (Мирошниченко). *Пусть элементы матрицы системы уравнений*

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0 z_0 + \beta_0 z_1 = d_0 \\ \gamma_i z_{i-1} + \alpha_i z_i + \beta_i z_{i+1} = d_i, \quad i = 1,\ldots,N-1, \\ \gamma_N z_{N-1} + \alpha_N z_N = d_N \end{array}\right\}$$

неотрицательны и удовлетворяют условиям

$$\alpha_0 > \beta_0, \quad \alpha_i > \beta_i + \gamma_i, \quad i = 1,\ldots,N-1, \quad \alpha_N > \gamma_N.$$

Тогда, если

$$\begin{aligned} & d_0 - \frac{\beta_0}{\alpha_1}\,d_1 \geqslant 0, \\ & d_i - \frac{\gamma_i}{\alpha_{i-1}}\,d_{i-1} - \frac{\beta_i}{\alpha_{i+1}}\,d_{i+1} \geqslant 0, \quad i = 1,\ldots,N-1, \\ & d_N - \frac{\gamma_N}{\alpha_{N-1}}\,d_{N-1} \geqslant 0, \end{aligned}$$

то решение системы будет неотрицательным, т. е. $z_i \geqslant 0$, $i = 0,\ldots,N$.

Мы сформулировали теорему 1 для случая матриц только с неотрицательными элементами, которого достаточно для наших целей. В оригинале [11] допускается отрицательность недиагональных элементов первой и последней строк матрицы, что было бы актуальным при рассмотрении других краевых условий.

Введем обозначение $\lambda_i = h_i/(h_{i-1}+h_i)$, $\mu_i = 1-\lambda_i$, $i=-1,\dots,n+1$.

Теорема 2. *Интегральный сплайн второй степени $S(x)$ с краевыми условиями (1), интерполирующий в среднем положительные данные, будет положительным, если имеют место неравенства*

$$
\begin{aligned}
&I_0 - \frac{1}{3}y(a) - \frac{\mu_1}{1+\mu_1+\lambda_2}I_1 \ge 0,\\
&I_i - \frac{\lambda_i}{1+\mu_{i-1}+\lambda_i}I_{i-1} - \frac{\mu_{i+1}}{1+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}}I_{i+1} \ge 0, \quad i=1,\dots,n-2,\\
&I_{n-1} - \frac{\lambda_{n-1}}{1+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}I_{n-2} - \frac{1}{3}y(b) \ge 0.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Расширим сетку Δ кратными дополнительными узлами x_{-1}, x_{-2} и x_{n+1}, x_{n+2} так, что

$$x_{-2}=x_{-1}=x_0, \quad x_n = x_{n+1} = x_{n+2}.$$

Представим сплайн $S(x)$ в виде разложения

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k B_k(x)$$

по базису из нормализованных B-сплайнов второй степени $B_i(x)$, $i=0,\dots,n+1$, (см. [12]), определяемых соотношениями

$$
B_i(x) = \begin{cases}
\dfrac{(x-x_{i-2})^2}{h_{i-2}(h_{i-2}+h_{i-1})}, & x\in[x_{i-2},x_{i-1}],\\[2ex]
\dfrac{(x-x_{i-2})(x_i-x)}{h_{i-1}(h_{i-2}+h_{i-1})} + \dfrac{(x_{i+1}-x)(x-x_i)}{h_{i-1}(h_{i-1}+h_i)}, & x\in[x_{i-1},x_i],\\[2ex]
\dfrac{(x_{i+1}-x)^2}{h_i(h_{i-1}+h_i)}, & x\in[x_i,x_{i+1}],\\[2ex]
0, & x\notin[x_{i-2},x_{i+1}].
\end{cases}
$$

Интегрируя $S(x)$ на промежутке $[x_i,x_{i+1}]$ и поделив на h_i, приравниваем результат заданному значению I_i, получаем соотношение

$$\frac{\lambda_i}{3}\,b_i + \frac{1+\mu_i+\lambda_{i+1}}{3}\,b_{i+1} + \frac{\mu_{i+1}}{3}\,b_{i+2} = I_i,$$

справедливое при $i=0,\dots,n-1$. Эти соотношения можно рассматривать как систему уравнений для определения неизвестных $b_0,\dots,b_{n+1}$, добавив два уравнения, соответствующие краевым условиям (1), которые имеют вид

$$b_0 = y(a), \quad b_{n+1} = y(b).$$

В итоге эта система линейных уравнений может быть записана в виде

$$
\begin{cases}
b_0 = y(a),\\
\lambda_{i-1}b_{i-1} + (1+\mu_{i-1}+\lambda_i)\,b_i + \mu_i b_{i+1} = 3I_{i-1}, \quad i=1,\dots,n,\\
b_{n+1} = y(b).
\end{cases} \tag{2}
$$

Матрица полученной системы уравнений (2) в общем случае не имеет традиционного диагонального преобладания, однако присутствует диагональное преобладание по столбцам. Показано [13; 14], что теорема Мирошниченко справедлива и в этом случае. Выполнение условий теоремы Мирошниченко в нашем случае обеспечивает неотрицательность компонент решения системы уравнений $b_0, \ldots, b_{n+1}$. Но поскольку это коэффициенты разложения сплайна по B-сплайнам, то неотрицательным будет и сам сплайн $S(x)$.

Теорема доказана.

На равномерной сетке достаточные условия неотрицательности интегрального сплайна $S(x)$ становятся совсем простыми:

$$I_0 - \frac{1}{3}y(a) - \frac{1}{4}I_1 \geq 0, \tag{3}$$

$$I_i - \frac{1}{4}I_{i-1} - \frac{1}{4}I_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n-2, \tag{4}$$

$$I_{n-1} - \frac{1}{4}I_{n-2} - \frac{1}{3}y(b) \geq 0. \tag{5}$$

Очевидно, что если заданные соседние усредненные значения I_i отличаются не более чем в два раза, то неравенства (4) выполняются и интегральный сплайн будет неотрицательным, если заданные значения функции на концах отрезка не превышают или превышают незначительно крайние усредненные значения. Понятно, что интегральный сплайн, интерполирующий в среднем положительную функцию, не всегда будет неотрицательным, однако если есть возможность выбора узлов сплайна $S(x)$, то при условии $y(x) > 0$ на $[a, b]$ путем загущения сетки всегда можно добиться выполнения достаточных условий теоремы 2. Покажем, что это можно сделать даже на равномерной сетке.

Лемма 1. *Пусть $y \in C[a, b]$ и $y(x) > 0$ на $[a, b]$. Тогда найдется такое h, что интегральный сплайн второй степени $S(x)$ с краевыми условиями* (1), *интерполирующий в среднем функцию $y(x)$ на любой равномерной сетке Δ с шагом $h_i \leq h$, будет неотрицательным.*

Доказательство. Будем следовать работе [15]. Пусть число $K > 0$ будет таким, что $y(x) \geq K$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} I_0 - \frac{1}{3}y(a) - \frac{1}{4}I_1 &= \frac{5}{12}I_0 - \frac{1}{3}(y(a) - I_0) - \frac{1}{4}(I_1 - I_0) \\ &\geq \frac{5}{12}K - \frac{1}{3}\omega(y; h) - \frac{1}{4} \cdot 2\omega(y; h) = \frac{5}{12}K - \frac{5}{6}\omega(y; h), \end{aligned}$$

где $\omega(y; h)$ — модуль непрерывности функции $y(x)$. Поскольку $\omega(y; h) \to 0$ при $h \to 0$, то начиная с некоторого h неравенство (3) будет выполняться. Неравенства (4) и (5) выводятся подобным образом.

Лемма доказана.

2. Монотонность и выпуклость

Предположим, что интерполируемая в среднем функция $y(x)$ монотонно возрастает. Требуется найти условия возрастания квадратического интегрального сплайна $S(x)$. В этом случае исходные данные удовлетворяют неравенствам $y(a) \leq I_0 \leq I_1 \leq \ldots \leq I_{n-1} \leq y(b)$. Обозначим производную сплайна в узлах сетки $m_i = S'(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Тогда при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$S(x) = I_i + \Big(-\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{3}\Big)h_i m_i + \Big(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}\Big)h_i m_{i+1},$$

$$S'(x) = (1-t)m_i + t m_{i+1},$$

где $x = x_i + th_i$. Условия склейки в узлах и краевые условия приводят к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = c_0, \\ \mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = c_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ m_{n-1} + 2m_n = c_n, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$c_0 = 6\,\frac{I_0 - y(a)}{h_0}, \quad c_i = 6\,\frac{I_i - I_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad c_n = 6\,\frac{y(b) - I_{n-1}}{h_{n-1}}. \tag{7}$$

Матрица системы уравнений (6) имеет диагональное преобладание, и применение теоремы Мирошниченко позволяет получить достаточные условия неотрицательности параметров $c_0, \dots, c_n$, а следовательно, возрастания интегрального сплайна $S(x)$ на отрезке $[a, b]$. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3. *Интегральный сплайн второй степени $S(x)$ с краевыми условиями (1), интерполирующий в среднем возрастающие данные, будет монотонно возрастающим, если имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &2c_0 - c_1 \ge 0, \\ &2c_i - \mu_i c_{i-1} - \lambda_i c_{i+1} \ge 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ &2c_n - c_{n-1} \ge 0. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что как следствие при интерполяции в среднем монотонных данных квадратический интегральный сплайн будет монотонным, если соседние величины c_i, определяемые равенствами (7), отличаются не более чем в два раза. Отметим, что это утверждение справедливо для любой неравномерной сетки.

И, наконец, рассмотрим условия выпуклости интегрального сплайна. Пусть интерполируемая в среднем функция $y(x)$ выпукла ($y''(x) \ge 0$), тогда определяемые равенствами (7) величины удовлетворяют неравенствам $c_0 \le c_1 \le \ldots \le c_n$. Необходимо найти условия выпуклости квадратического интегрального сплайна $S(x)$, интерполирующего в среднем заданные значения. Вторая производная сплайна $S(x)$ является кусочно-постоянной функцией. Выберем в качестве параметров сплайна величины $M_i = h_i S''(x_i + 0)$, $i = 0, \dots, n-1$, неотрицательность которых будет означать выпуклость интегрального сплайна. Система уравнений относительно введенных параметров будет иметь вид

$$\begin{cases} (1 + \lambda_1) M_0 + \lambda_1 M_1 = c_1 - c_0, \\ \mu_i M_{i-1} + (1 + \mu_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} = c_{i+1} - c_i, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ \mu_{n-1} M_{n-2} + (1 + \mu_{n-1}) M_{n-1} = c_n - c_{n-1}. \end{cases} \tag{8}$$

Система уравнений (8) имеет диагональное преобладание, и применение теоремы Мирошниченко приводит к достаточным условиям выпуклости.

Теорема 4. *Интегральный сплайн второй степени $S(x)$ с краевыми условиями (1), интерполирующий в среднем выпуклые данные, будет выпуклым вниз, если имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &c_1 - c_0 - \frac{\lambda_1}{1 + \mu_1 + \lambda_2}(c_2 - c_1) \ge 0, \\ &c_i - c_{i-1} - \frac{\mu_{i-1}}{1 + \mu_{i-2} + \lambda_{i-1}}(c_{i-1} - c_{i-2}) - \frac{\lambda_i}{1 + \mu_i + \lambda_{i+1}}(c_{i+1} - c_i) \ge 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ &c_n - c_{n-1} - \frac{\mu_{n-1}}{1 + \mu_{n-2} + \lambda_{n-1}}(c_{n-1} - c_{n-2}) \ge 0. \end{aligned}$$

Условия монотонности интегрального сплайна (теорема 3) выписаны в терминах величин c_i, являющихся аналогами первых разделенных разностей от приближаемой функции (см. (7)), а условия выпуклости (теорема 4) — в терминах соседних разностей этих величин.

Отметим, что на равномерной сетке все достаточные условия (неотрицательности, монотонности, выпуклости) почти одинаковы (отличаются только крайние неравенства). Они имеют вид неравенств (4) с некоторыми крайними неравенствами, для неотрицательности — это неравенства относительно заданных усредненных значений I_i, для монотонности — относительно первых разделенных разностей этих значений (величины c_i), для выпуклости — вторых разделенных разностей.

В качестве простого следствия достаточных условий можно сказать, что если соседние значения (усредненные значения, первые или вторые разделенные разности) отличаются не более чем в 2 раза, то квадратический интегральный сплайн будет неотрицательным, монотонным или выпуклым соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
2. **Schoenberg I.J.** Splines and histograms // Spline functions and approximation theory: Proc. Symp. / eds. A. Meir, A. Sharma (Edmonton, 1972). Basel: Birkhäuser, 1973. P. 277–327. (Internat. Ser. Numer. Math.; vol. 21.) doi: 10.1007/978-3-0348-5979-0_13 .
3. **Wu J., Zhang X.** Integro quadratic spline interpolation // Appl. Math. Model. 2015. Vol. 39, no. 10-11. P. 2973–2980. doi: 10.1016/j.apm.2014.11.015 .
4. **Lang F.-G., Xu X.-P.** On the superconvergence of some quadratic integro-splines at the mid-knots of a uniform partition // Appl. Math. Comput. 2018. Vol. 338. P. 507–514. doi: 10.1016/j.amc.2018.06.046 .
5. **Zhanlav T.** Shape preserving properties of some C^2 cubic spline approximations // Sci. Trans. NUM. 2000. Vol. 7. P. 21–35.
6. **Zhanlav T., Mijiddorj R.** Convexity and monotonicity properties of the local integro cubic spline // Appl. Math. Comput. 2017. Vol. 293. P. 131–137. doi: 10.1016/j.amc.2016.08.017 .
7. **Zhanlav T., Mijiddorj R.-O.** Construction of a family of C^1 convex integro cubic splines // Comm. Math. Appl. 2020. Vol. 11, no. 4. P. 527–538. doi: 10.26713/cma.v11i4.1386 .
8. **Волков Ю.С., Богданов В.В., Мирошниченко В.Л., Шевалдин В.Т.** Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 6. С. 836–844.
9. **Волков Ю.С., Шевалдин В.Т.** Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 145–152.
10. **Богданов В.В., Волков Ю.С.** Условия формосохранения при интерполяции кубическими сплайнами // Мат. тр. 2019. Т. 22, № 1. С. 19–67. doi: 10.33048/mattrudy.2019.22.102 .
11. **Miroshnichenko V.L.** Convex and monotone spline interpolation // Constructive theory of functions: Proc. Int. Conf. / eds. B. Sendov, P. Petrushev, R. Maleev, S. Tashev (Varna, 1984). Sofia: Publ. House Bulgar. Acad. Sci., 1984. P. 610–620.
12. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
13. **Богданов В.В., Волков Ю.С.** Выбор параметров обобщенных кубических сплайнов при выпуклой интерполяции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 5–22.
14. **Bogdanov V.V., Volkov Yu.S.** Near-optimal tension parameters in convexity preserving interpolation by generalized cubic splines // Numer. Algorithms. 2021. Vol. 86, no. 2. P. 833–861. doi: 10.1007/s11075-020-00914-9 .
15. **Волков Ю.С.** Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.

Поступила 14.08.2022
После доработки 5.09.2022
Принята к публикации 12.09.2022

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук, доцент
главный науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
г. Новосибирск
e-mail: volkov@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. Extremal problems of functional interpolation and interpolation-in-the-mean splines. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 127–185.
2. Schoenberg I.J. Splines and histograms. In: *Spline Functions and Approximation Theory*, Meir A., Sharma A. (eds). ISNM: Internat. Ser. Numer. Math., vol. 21, Basel: Birkhäuser, 1973, pp. 277–327. doi: 10.1007/978-3-0348-5979-0_13 .
3. Wu J., Zhang X. Integro quadratic spline interpolation. *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 39, no. 10-11, pp. 2973–2980. doi: 10.1016/j.apm.2014.11.015 .
4. Lang F.-G., Xu X.-P. On the superconvergence of some quadratic integro-splines at the mid-knots of a uniform partition. *Appl. Math. Comput.*, 2018, vol. 338, pp. 507–514. doi: 10.1016/j.amc.2018.06.046 .
5. Zhanlav T. Shape preserving properties of some C^2 cubic spline approximations. *Sci. Trans. NUM*, 2000, vol. 7, pp. 21–35.
6. Zhanlav T., Mijiddorj R. Convexity and monotonicity properties of the local integro cubic spline. *Appl. Math. Comput.*, 2017, vol. 293, pp. 131–137. doi: 10.1016/j.amc.2016.08.017 .
7. Zhanlav T., Mijiddorj R.-O. Construction of a family of C^1 convex integro cubic splines. *Comm. Math. Appl.*, 2020, vol. 11, no. 4, pp. 527–538. doi: 10.26713/cma.v11i4.1386 .
8. Volkov Yu.S., Bogdanov V.V., Miroshnichenko V.L., Shevaldin V.T. Shape-preserving interpolation by cubic splines. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, no. 5-6, pp. 798–805. doi: 10.1134/S0001434610110209 .
9. Volkov Yu.S., Shevaldin V.T. Shape preserving conditions for quadratic spline interpolation in the sense of Subbotin and Marsden. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN.*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 145–152 (in Russian).
10. Bogdanov V.V., Volkov Yu.S. Shape-preservation conditions for cubic spline interpolation. *Siberian Adv. Math.*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 231–262. doi: 10.3103/S1055134419040011 .
11. Miroshnichenko V.L. Convex and monotone spline interpolation. In: *"Constructive theory of functions": Proc. Int. Conf., Varna, 1984*, B. Sendov, P. Petrushev, R. Maleev, S. Tashev (eds), Sofia: Publ. House Bulgar. Acad. Sci., 1984, pp. 610–620.
12. Zavyalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splain-funkcii* [Methods of spline functions]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p.
13. Bogdanov V.V., Volkov Yu.S. Selection of parameters of generalized cubic splines with convexity preserving interpolation. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2006, vol. 9, no. 1, pp. 5–22 (in Russian).
14. Bogdanov V.V., Volkov Yu.S. Near-optimal tension parameters in convexity preserving interpolation by generalized cubic splines. *Numer. Algorithms*, 2021, vol. 86, no. 2, pp. 833–861. doi: 10.1007/s11075-020-00914-9 .
15. Volkov Yu.S. A new method for constructing cubic interpolating splines. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 215–224.

Received August 14, 2022
Revised September 5, 2022
Accepted September 12, 2022

Funding Agency: This work was carried out under a state contract of the Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (project no. FWNF–2022–0015).

Yuriy Stepanovich Volkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: volkov@math.nsc.ru .

Cite this article as: Yu. S. Volkov. Shape preserving conditions for integro quadratic spline interpolation in the mean. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 71–77 .