ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.518.86

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕННОМ СДВИГЕ И СООТВЕТСТВУЮЩЕМ НЕРАВЕНСТВЕ РАЗНЫХ МЕТРИК[1]

В. В. Арестов, М. В. Дейкалова

В данной работе обсуждаются свойства оператора обобщенного сдвига, порожденного системой функций $\left\{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}t\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$, в пространствах $L^p(0,1)$, $p \ge 1$. Оператор сдвига применяется к исследованию неравенства Никольского между равномерной и L^p-нормами полиномов по этой системе.

Ключевые слова: оператор обобщенного сдвига, тригонометрический полином, неравенство разных метрик.

V.V. Arestov, M.V. Deikalova. On one generalized translation and the corresponding inequality of different metrics.

In this paper, we discuss the properties of the generalized translation operator generated by the system of functions $\left\{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}t\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$, in the spaces $L^p(0,1)$, $p \ge 1$. The translation operator is applied to the study of Nikol'skii's inequality between the uniform norm and the L^p-norm of polynomials in this system.

Keywords: generalized translation operator, trigonometric polynomial, inequality of different metrics.

MSC: 41A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-40-53

Памяти Юрия Николаевича Субботина
и Сергея Александровича Теляковского

Введение

Обозначения и некоторые предварительные сведения. В дальнейшем будут рассматриваться следующие комплексные пространства комплекснозначных функций на отрезке $[0,1]$. При $1 \le p < \infty$ пространство $L^p = L^p(0,1)$ состоит из комплекснозначных, измеримых по Лебегу на $[0,1]$ функций f таких, что функция $|f(x)|^p$ суммируема на $(0,1)$; это пространство наделено нормой

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p(0,1)} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad f \in L^p.$$

Пространство $L^2 = L^2(0,1)$ (здесь $p = 2$) является гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad f, g \in L^2. \tag{0.1}$$

Стандартно через $C = C[0,1]$ обозначено пространство функций, непрерывных, ограниченных на отрезке $[0,1]$, с равномерной нормой

$$\|f\|_{C[0,1]} = \max\{|f(x)|\colon x \in [0,1]\}.$$

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2022-874).

Пространство $C = C[0,1]$ содержит подпространство $C_0 = C[0,1]_0$ функций f, зануляющихся в правой концевой точке отрезка: $f(1) = 0$. В дальнейшем, если не оговорено иное, под $L^\infty = L^\infty(0,1)$ понимается именно пространство $C_0 = C[0,1]_0$.

В данной статье обсуждаются некоторые свойства оператора обобщенного сдвига (коротко — оператор сдвига), порожденного системой функций

$$\Big\{\cos\Big(\frac{(2k-1)\pi}{2}x\Big)\Big\}_{k=1}^\infty, \tag{0.2}$$

в пространствах $L^p(0,1)$. Оператор сдвига применен к исследованию неравенства Никольского между равномерной и L^p-нормами полиномов по системе (0.2).

Особенность системы (0.2) состоит в том, что, с одной стороны, она является частью тригонометрической системы, а с другой — порождена функцией Бесселя

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos x$$

(с индексом $\nu = -1/2$) или, что то же самое, соответствующей нормированной функцией Бесселя

$$j_{-1/2}(x) = j_\nu(x) = \Gamma(1/2)\Big(\frac{2}{x}\Big)^{-1/2} J_{-1/2}(x) = \cos x; \tag{0.3}$$

свойства функций Бесселя см., например, в [1, гл. III, § 3.1, (8); 2, гл. 7, § 7.2, (2); 3, гл. V, § 23]. На полуоси $(0,\infty)$ функция (0.3) имеет простые нули $\lambda_k = \lambda_k^{-1/2} = (2k-1)\pi/2,\ k \ge 1$. Система функций $j_{-1/2}(\lambda_k x),\ k \ge 1$, как раз и есть система (0.2). Свойствам систем функций, построенных подобным образом по функциям Бесселя произвольного индекса $\nu > -1$ в пространствах Лебега на интервале $(0,1)$ с соответствующим весом, посвящена обширная литература; см., в частности, [3, гл. V, § 23]. В силу этого факта для системы (0.2) применимы результаты и методы теории функций Бесселя.

Ортогональность. Система (0.2) относительно скалярного произведения (0.1) является ортогональной; этот факт известен (см., например, [3, гл. V, § 23, п. 2]). Тем не менее обоснование этого мы сейчас приведем. Примем для функций системы (0.2) короткое обозначение

$$\eta_k(x) = \cos\frac{2k-1}{2}\pi x, \quad x \in [0,1]. \tag{0.4}$$

Имеем

$$\delta_{k,m} = \langle \eta_k, \eta_m\rangle = \int_0^1 \eta_k(x)\eta_m(x)dx = \Big[x = \frac{2}{\pi}t\Big] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2k-1)t\,\cos(2m-1)t\,dt.$$

Применяя формулу $2\cos a\,\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, получаем

$$\delta_{k,m} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \big(\cos(2(k+m)-2)t + \cos(2(k-m))t\big)dt.$$

При $k \ne m$ имеем

$$\delta_{k,m} = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin(2(k+m)-2)t}{2(k+m)-2} + \frac{\sin(2(k-m))t}{2(k-m)}\Big)\Big|_0^{\pi/2} = 0;$$

ортогональность системы проверена. В случае же $m = k \ge 1$ имеем

$$\delta_{k,k} = \langle \eta_k, \eta_k\rangle = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin(4k-2)t}{4k-2} + t\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Ряды Фурье по системе (0.2). Система функций (0.2) полна в пространстве $L^2(0,1)$. Этот факт известен (см., например, [3, гл. V, § 23, п. 7]); впрочем, его нетрудно доказать, исходя из соответствующего свойства тригонометрической системы (см. лемму 2 и следствие из нее ниже).

Итак, система функций $\{\eta_m\}$ в пространстве L^2 полна и ортогональна, а следовательно, образует ортогональный базис. Таким образом, произвольная функция $f\in L^2$ разлагается (в пространстве L^2) в ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\eta_k(x),\quad f_k=\frac{\langle f,\eta_k\rangle}{\sigma_k}, \tag{0.5}$$

$$\sigma_k=\delta_{k,k}=\langle \eta_k,\eta_k\rangle=\int\limits_0^1|\eta_k(x)|^2\,dx=\frac{1}{2},\quad k=1,2,3,\dots .$$

Для пары функций $f,g\in L^2$ имеет место обобщенный вариант равенства Парсеваля

$$\langle f,g\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k f_k\overline{g}_k.$$

В частности, норма функции $f\in L^2$ выражается через ее коэффициенты Фурье $\{f_k\}$ равенством Парсеваля

$$\|f\|^2_{L^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\,|f_k|^2. \tag{0.6}$$

1. Оператор сдвига, порожденный системой (0.2)

1.1. Оператор сдвига в пространстве L^2

Оператором (обобщенного) сдвига (порожденным системой (0.2)) с шагом $t\in[0,1]$ называют линейный оператор T_t, который определен на функциях $f\in L^2$ с рядом Фурье (0.5) соотношением

$$T_tf(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\eta_k(t)\eta_k(x); \tag{1.1}$$

см., к примеру, [4, формула (0.5); 5–7] и приведенную там библиографию. На функциях $f=\eta_k$ для оператора (1.1) имеет место формула, называемая формулой умножения,

$$T_t\eta_k(x)=\eta_k(t)\eta_k(x),\quad t,x\ge 0. \tag{1.2}$$

Применяя дважды равенство Парсеваля (0.6), получаем

$$\|T_tf\|^2_{L^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\,|f_k|^2|\eta_k(t)|^2\le A^2(t)\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\,|f_k|^2=A^2(t)\|f\|^2_{L^2},$$

где

$$A(t)=\sup\{|\eta_k(t)|\colon k\ge 1\}.$$

Отсюда, как нетрудно понять, следует, что при любом $t\in[0,1]$ имеет место равенство $\|T_t\|_{L^2\to L^2}=A(t)$. В силу свойства $0\le\eta_k(t)\le 1,\ t\in[0,1]$, имеем $A(t)\le 1$. Итак,

$$\|T_t\|_{L^2\to L^2}=A(t)\le 1,\quad 0\le t\le 1. \tag{1.3}$$

Очевидно, $A(0)=1$, $A(1)=0$. Следующее утверждение описывает значения величины (1.3) для значений $t\in(0,1)$.

Лемма 1. *Для значений величины* (1.3) *нормы оператора сдвига в пространстве* L^2 *справедливы следующие два утверждения.*

(1) *Если* $t \in (0,1)$ *есть рациональное число*: $t = a/b,\ a, b \in \mathbb{N},\ 0 < a < b$, *то*

$$A(a/b) = \max\left\{\left|\cos\left(\frac{(2d-1)a}{2b}\,\pi\right)\right| : d \in \mathbb{Z},\ 0 \le d < b\right\}, \tag{1.4}$$

в частности $A(1/2) = \sqrt{2}/2$.

(2) *Если* $t \in (0,1)$ *есть иррациональное число, то*

$$A(t) = 1. \tag{1.5}$$

Доказательство. (1) Пусть вначале t есть рациональное число: $t = a/b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $0 < a < b$. Представим число k в виде $k = bm + d$, $d \in \mathbb{Z}$, $0 \le d < b$. В этом случае имеем

$$\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) = \cos\left(\frac{(2k-1)a}{2b}\,\pi\right) = \cos\left(\frac{(2(bm+d)-1)a}{2b}\pi\right)$$

$$= \cos\left(ma\pi + \frac{(2d-1)a}{2b}\pi\right) = (-1)^{ma}\cos\left(\frac{(2d-1)a}{2b}\pi\right).$$

Отсюда следует утверждение (1.4).

В частности, для $t = 1/2$ имеем $a = 1$, $b = 2$, и остаток d может принимать два значения: 0 и 1. Поэтому из (1.4) заключаем, что $A(1/2) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

(2) Докажем второе утверждение леммы. Воспользуемся известной идеей, которая приведена, в частности, в учебнике С. М. Никольского по математическому анализу [8, гл. 3, § 3.7], где показано, что для иррационального числа $\lambda > 0$ множество частичных пределов последовательности $(\sin k\pi\lambda)_{k\ge1}$ есть отрезок $[-1, 1]$.

Итак, пусть t — иррациональное число. Старший коэффициент t многочлена (а точнее, линейной функции) $F(k) = (k - 1/2)\,t$ иррациональный. Поэтому множество $(\{F(k)\})_{k\ge1}$ дробных долей последовательности $F(k) = (k - 1/2)\,t$ плотно в отрезке $[0, 1]$ (см., например, [9, задача 16.60]). Следовательно, множество $(\{F(k)\}\pi)_{k\ge1}$ плотно в отрезке $[0, \pi]$. Имеем

$$\frac{2k-1}{2}\pi t = F(k)\pi = [F(k)]\pi + \{F(k)\}\pi,$$

и потому

$$\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) = \cos(F(k)\pi) = (-1)^{[F(k)]}\cos\left(\{F(k)\}\pi\right).$$

В силу монотонности (и непрерывности) функции косинус на отрезке $[0, \pi]$ отсюда следует, что множество $\left(\left|\cos\dfrac{2k-1}{2}\pi t\right|\right)_{k\ge1}$ плотно в отрезке $[0, 1]$. Как следствие справедливо равенство (1.5).

Лемма полностью доказана.

1.2. Оператор сдвига в пространстве L^p, $1 \le p < \infty$

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество функций вида

$$\varrho_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\eta_k(x), \quad \eta_k(x) = \cos\frac{2k-1}{2}\pi x \tag{1.6}$$

с комплексными коэффициентами, которые мы будем называть полиномами (порядка n). Пусть $\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n$ есть множество всех полиномов. Позже мы увидим, что при любом $1 \le p \le \infty$ множество $\mathcal{P}$ плотно в пространстве L^p, $1 \le p \le \infty$; напомним, что под L^∞ понимается пространство $C[0, 1]_0$.

Оператор сдвига T_t формулой (1.1) определен в пространстве L^2, в частности на множестве $\mathcal{P}$. Ниже будет доказано, что при любом $1 \le p \le \infty$ оператор T_t продолжается по непрерывности с множества $\mathcal{P}$ до линейного ограниченного оператора в пространстве L^p. Это продолжение и называют оператором сдвига T_t в пространстве L^p. Для этого оператора справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Оператор сдвига Бесселя T_t, $t \in [0,1]$, является линейным ограниченным оператором в пространстве $L^p(0,1)$, $1 \le p \le \infty$, и*

$$\|T_t\|_{L^p \to L^p} \le 1.$$

Более того, если $t = 0$ или t есть число иррациональное, то

$$\|T_t\|_{L^p \to L^p} = 1.$$

Теорема 1 содержится в теореме 3, приведенной и доказанной ниже в п. 1.2.2.

1.2.1. Пространства периодических функций, изоморфные пространствам L^p, $1 \le p \le \infty$. Каждая из функций (0.4) четная относительно точки 0, нечетная относительно точки 1 и 4-периодическая. Поэтому и функция $f \in L^2$ формулой (0.5) определена не только (почти всюду) на отрезке $[0,1]$, а на самом деле (почти всюду) на всей числовой прямой; она 4-периодическая, четная (относительно точки 0) и нечетная относительно точки 1. Из определения (1.1) видно, что функция $T_t f$ обладает теми же свойствами.

Обозначим через $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_4$, $1 \le p < \infty$, пространство (комплекснозначных, измеримых) 4-периодических, четных (относительно нуля), нечетных относительно точки 1 (а значит, нечетных относительно всех нечетных точек $2k-1$, $k \in \mathbb{Z}$) функций, у которых суммируема функция $|f|^p$ или, что то же самое, конечна норма

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\frac{1}{4}\int\limits_0^4 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}. \tag{1.7}$$

Определим пространство $\mathcal{C} = \mathcal{C}_4$ непрерывных 4-периодических функций на оси с подобными свойствами симметрии, наделенное равномерной нормой; это пространство будет иногда обозначаться $\mathcal{L}^\infty$. Пространства L^p и $\mathcal{L}^p$ при всех $1 \le p \le \infty$ изометричны.

Система функций (0.4) лежит в пространстве $\mathcal{L}^p$, $1 \le p \le \infty$. Более того, как нетрудно понять, тригонометрический ряд Фурье функций $f \in \mathcal{L}^p$ имеет вид

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k(x), \quad \eta_k(x) = \cos\frac{2k-1}{2}\pi x. \tag{1.8}$$

Это есть следствие того факта, что коэффициенты Фурье функций $f \in \mathcal{L}^p$ по функциям тригонометрической системы

$$\left\{\cos\frac{\ell\pi x}{2}\right\}_{\ell=0}^{\infty}, \quad \left\{\sin\frac{\ell\pi x}{2}\right\}_{\ell=1}^{\infty},$$

отличным от (0.4), будут равны нулю. При $p = 2$ соотношение (1.8) превращается в равенство; точнее, для функций $f \in \mathcal{L}^2$ ряд Фурье (1.8) сходится в пространстве $\mathcal{L}^2$, и имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k(x).$$

Оператор сдвига по системе функций (0.2), по крайней мере, для функций $f \in \mathcal{L}^2$ определим той же самой формулой (1.1)

$$\mathcal{T}_t f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k(t) \eta_k(x) \tag{1.9}$$

и уже для всех $x, t \in \mathbb{R}$. Для этого оператора имеет место формула умножения

$$(\mathcal{T}_t \eta_k)(x) = \eta_k(t)\eta_k(x), \quad t, x \geq 0. \tag{1.10}$$

При всех $t \in \mathbb{R}$ оператор сдвига $\mathcal{T}_t$ есть линейный ограниченный оператор в пространстве $\mathcal{L}^2$ и для его нормы имеет место равенство (1.3), а значит, и утверждение леммы 1

$$\|\mathcal{T}_t f\|^2_{\mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2} = \sup\left\{\left|\cos\frac{2k-1}{2}\pi t\right| : k \geq 1\right\} \leq 1.$$

В пространстве $\mathcal{L}^p$ при $p \neq 2$ в основе построения оператора сдвига лежит опять же формула (1.9). Аккуратное построение и изучение оператора сдвига будут осуществлены ниже.

Пусть $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p_4$, $1 \leq p < \infty$, есть пространство измеримых 4-периодических функций f с суммируемым на любом конечном отрезке с p-й степенью модулем функции $|f|^p$, наделенное стандартной интегральной нормой (1.7)

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = \left(\frac{1}{4}\int_0^4 |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Под $\mathscr{L}^\infty$ будем понимать пространство $\mathscr{C} = \mathscr{C}_4$ непрерывных 4-периодических функций на оси с равномерной нормой.

Лемма 2. *Множество $\mathcal{P}$ полиномов* (1.6) *плотно в пространстве $\mathcal{L}^p$ при всех p, $1 \leq p \leq \infty$.*

Доказательство. Воспользуемся двумя операторами

$$(U\varphi)(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}, \quad (V\varphi)(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(2-x)}{2}$$

в пространстве $\mathscr{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Оператор U функции $f \in \mathscr{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, сопоставляет ее четную (относительно нуля) компоненту. Оператор V функции $f \in \mathscr{L}^p$ сопоставляет ее компоненту, нечетную относительно точки 1. Суперпозиция $VU = V \circ U$ операторов функции $\varphi \in \mathscr{L}^p$ сопоставляет функцию $VU\varphi \in \mathcal{L}^p$. Оба оператора U, V имеют в $\mathscr{L}^p$ единичную норму.

Согласно известной теореме Вейерштрасса для любой функции $f \in \mathscr{L}^p$ и любого $\epsilon > 0$ существует тригонометрический полином

$$\vartheta(x) = \vartheta_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{2}x + b_k \sin\frac{k\pi}{2}x\right)$$

такой, что $\|f - \vartheta\|_{\mathscr{L}^p} < \epsilon$.

Для полинома ϑ суперпозиция $\varrho = VU\vartheta$ есть полином из $\mathcal{P}$ (порядка $n = [(N-1)/2]$). Функцию $f \in \mathcal{L}^p$ оператор VU оставляет неподвижной: $VUf = f$. Таким образом, справедливо соотношение $f - \varrho = VU(f - \vartheta)$. Отсюда следует, что $\|f - \varrho\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f - \vartheta\|_{\mathscr{L}^p} < \epsilon$.

Лемма доказана.

Как очевидное следствие леммы 2 справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Множество $\mathcal{P}$ полиномов* (1.6) *плотно в пространстве L^p на отрезке* $[0, 1]$ *при всех p, $1 \leq p \leq \infty$.*

Относительно сдвига $\mathcal{T}_t$ в пространствах $\mathcal{L}^p$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *При любых t, $t \ge 0$, и p, $1 \le p \le \infty$, оператор сдвига* (1.9) *продолжается с множества полиномов $\mathcal{P}$ по непрерывности до линейного ограниченного оператора в пространстве $\mathcal{L}^p$; этот оператор удобно обозначить тем же символом $\mathcal{T}_t$.*

(2) *Для нормы оператора сдвига в пространствах $\mathcal{L}^p$, $1 \le p \le \infty$, справедлива оценка*

$$\|\mathcal{T}_t\|_{\mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p} \le 1, \tag{1.11}$$

причем

$$\|\mathcal{T}_t\|_{\mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p} = 1 \tag{1.12}$$

для $t = 0$ и иррациональных значений $t \in (0,1)$.

(3) *Для оператора сдвига $\mathcal{T}_t$ в пространствах $\mathcal{L}^p$, $1 \le p \le \infty$, при всех t имеет место формула*

$$\mathcal{T}_t f(x) = \frac{1}{2}\big\{f(x+t) + f(|x-t|)\big\}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Обсудим вначале свойства оператора (1.13) в пространстве $\mathcal{L}^p$, $1 \le p \le \infty$. Довольно очевидно, что если $f \in \mathcal{L}^p$, то $\mathcal{T}_t f \in \mathcal{L}^p$ при любом t и, более того, $\|\mathcal{T}_t f\|_{\mathcal{L}^p} \le \|f\|_{\mathcal{L}^p}$. Так что оператор (1.13) ограничен в $\mathcal{L}^p$, и для его нормы справедлива оценка (1.11).

Предположим, что $f \in \mathcal{P}$ или даже, более обще, $f \in \mathcal{L}^p$ и ее ряд Фурье (1.8) сходится к ней в $\mathcal{L}^p$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k(x), \quad \eta_k(x) = \cos\frac{2k-1}{2}\pi x.$$

Применив к этому соотношению оператор (1.13), получаем

$$\mathcal{T}_t f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k (\mathcal{T}_t \eta_k)(x), \quad \eta_k(x) = \cos\frac{2k-1}{2}\pi x.$$

Как следствие формулы умножения (1.10) в рассматриваемой ситуации для оператора (1.13) справедлива формула (1.9).

В частности, формула (1.9) справедлива для множества полиномов $\mathcal{P}$. Согласно лемме 2 множество $\mathcal{P}$ полиномов плотно в пространстве $\mathcal{L}^p$. Следовательно, оператор (1.9) продолжается с множества $\mathcal{P}$ на все пространство $\mathcal{L}^p$ единственным образом, причем с сохранением нормы.

Формулы (1.10) влекут, что $\|\mathcal{T}_t\|_{L^p \to L^p} \ge |\eta_k(t)|$ при любом $k \ge 1$. Следовательно,

$$\|\mathcal{T}_t\|_{L^p \to L^p} \ge A(t) = \sup\{|\eta_k(t)| \colon k \ge 1\}.$$

Воспользовавшись теперь утверждением леммы 1, получаем (1.12).

Теорема доказана.

1.2.2. Конструкция оператора сдвига в пространстве L^p, $1 \le p \le \infty$. Обозначим через I оператор, который функцию $f \in L^p$ продолжает (с $[0,1]$) до функции $F = If \in \mathcal{L}^p$. Следующее утверждение является одним из основных в данной работе.

Теорема 3. *Справедливы следующие два утверждения.*

(1) *При любых t, $0 \le t \le 1$, и p, $1 \le p \le \infty$, оператор сдвига (1.1) продолжается с множества полиномов $\mathcal{P}$ по непрерывности до линейного ограниченного оператора в пространстве L^p; этот оператор удобно обозначить тем же символом T_t. Для оператора T_t имеет место формула*

$$T_t f = \mathcal{T}_t(If), \quad f \in L^p. \tag{1.14}$$

(2) *Для нормы оператора сдвига в пространствах L^p, $1 \le p \le \infty$, справедлива оценка*

$$\|T_t\|_{L^p \to L^p} \le 1. \tag{1.15}$$

Для $t = 0$ и иррациональных значений $t \in (0, 1)$ имеет место равенство

$$\|T_t\|_{L^p \to L^p} = 1. \tag{1.16}$$

Доказательство. В силу формул умножения (1.2) и (1.10) равенство (1.14) имеет место на функциях $\{\eta_k\}_{k \ge 1}$, а значит, и на множестве $\mathcal{P}$ полиномов. Правая часть равенства (1.14) есть линейный ограниченный оператор в пространстве L^p, $1 \le p \le \infty$, норма которого согласно теореме 2 не превосходит 1.

Согласно следствию 1 множество $\mathcal{P}$ полиномов плотно в пространстве L^p при любом p, $1 \le p \le \infty$. Следовательно, оператор T_t продолжается по непрерывности с $\mathcal{P}$ на пространство L^p с сохранением нормы; в силу единственности такого продолжения для него имеет место (1.14). Это соотношение влечет равенство норм операторов $\|T_t\|_{L^p \to L^p} = \|\mathcal{T}_t\|_{\mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p}$. Применяя теперь теорему 2, получаем оставшуюся часть утверждений теоремы 3.

Замечание 1. В дополнение к утверждениям (1.15) и (1.16) отметим, что при $1 < p < \infty$ для рациональных значений параметра $t \in (0, 1)$ имеет место строгое неравенство

$$\|T_t\|_{L^p \to L^p} < 1. \tag{1.17}$$

В самом деле, при $p = 2$ неравенство (1.17) содержится в (1.4). При $1 < p < 2$ и $2 < p < \infty$ для обоснования (1.17) следует воспользоваться теоремой Рисса о выпуклости, см., например, [10, гл. V, § 1, теорема 1.3], уже доказанным неравенством (1.17) при $p = 2$ и неравенством (1.15) соответственно при $p = 1$ и $p = \infty$.

Замечание 2. Оператор (1.13) в пространстве $\mathscr{L}^p$, $1 \le p \le \infty$, периодических функций является, очевидно, положительным. Доказанная же теорема 3 позволяет сделать вывод, что оператор сдвига T_t не является положительным в пространствах L^p, $1 \le p \le \infty$, при любом $t \in (0, 1)$. В самом деле, рассмотрим на $[0, 1)$ (неотрицательную) функцию $\varphi(x) = x^2$. Соответствующая функция $\psi = I\varphi$ будет иметь следующие значения:

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-1, 1), \\ -(x-2)^2, & x \in (1, 3). \end{cases}$$

Рассмотрим значения функции

$$(T_t\varphi)(x) = (\mathcal{T}_t\psi)(x) = \frac{1}{2}\big\{\psi(x+t) + \psi(|x-t|)\big\}$$

на интервале $x \in (1-t, 1)$. Имеем $1 < x + t < 2$, $|x - t| < 1$. Поэтому

$$(T_t\varphi)(x) = \frac{1}{2}\big\{(x-t)^2 - (x+t-2)^2\big\} = 2(1-t)(x-1) < 0, \quad x \in (1-t, 1).$$

Таким образом, действительно оператор сдвига T_t не является положительным при любом $t \in (0, 1)$. Построенная функция φ не принадлежит пространству $C[0, 1]_0$. Однако при достаточно малом положительном δ функцию φ можно переопределить на отрезке $[1 - \delta, 1]$ до функции $\varphi_\delta \in C[0, 1]_0$ такой, что $\varphi_\delta(x) > 0$, $x \in (0, 1)$, но $T_t\varphi_\delta(x) < 0$ на некотором интервале из $(1 - t, 1)$.

2. Неравенство Никольского между равномерной и L^p-нормами полиномов на отрезке

2.1. Описание неравенств

Основная задача данного раздела состоит в изучении точного неравенства

$$\|\varrho_n\|_{C[0,1]} \le M(n)_p \|\varrho_n\|_{L^p(0,1)}, \quad \varrho_n \in \mathcal{P}_n, \tag{2.1}$$

на множестве $\mathcal{P}_n$ полиномов

$$\varrho_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \eta_k(x), \quad \eta_k(x) = \cos\frac{2k-1}{2}\pi x, \quad x \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Обратим внимание, что все функции (2.2) зануляются в точке $x = 1$: $\varrho_n(1) = 0$. В частности, это влечет, что $f(x) \equiv 1 \notin \mathcal{P}_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Конечно, представляет интерес точное поточечное неравенство

$$|\varrho_n(t)| \le D(n;t)_p \|\varrho_n\|_{L^p(0,1)}, \quad \varrho_n \in \mathcal{P}_n, \tag{2.3}$$

для точек $t \in [0,1]$. Наиболее важным для нас является частный случай неравенства (2.3) в концевой точке $t = 0$:

$$|\varrho_n(0)| \le D(n)_p \|\varrho_n\|_{L^p(0,1)}, \quad \varrho_n \in \mathcal{P}_n, \tag{2.4}$$

в котором $D(n)_p = D(n;0)_p$. Задачи отыскания наилучших констант в неравенствах (2.1), (2.3), (2.4) являются задачами отыскания нормы линейного оператора (в (2.1)) и норм линейных функционалов (в (2.3), (2.4)) на конечномерном пространстве, поэтому в этих трех задачах существуют экстремальные полиномы, на которых эти неравенства (с наилучшими константами) обращаются в равенства. Исследование таких неравенств — весьма распространенная задача математики, в частности, см. [11].

2.2. Один из основных результатов работы

Одним из основных в данной работе авторы считают следующее утверждение.

Теорема 4. *При $1 \le p < \infty$, $n \ge 1$ справедливы следующие утверждения.*

(1) *Наилучшие константы в неравенствах* (2.1) *и* (2.4) *совпадают*:

$$M(n)_p = D(n)_p. \tag{2.5}$$

(2) *Многочлен ϱ_n^*, экстремальный в неравенстве* (2.4), *достигает равномерной нормы в точке* 0 *и является экстремальным и в неравенстве* (2.1).

В обосновании теоремы будет использоваться оператор сдвига T_t. Впервые авторы применили соответствующий оператор (обобщенного) сдвига в исследовании неравенства разных метрик типа (2.1) в работе [12], затем такой метод использовался в ряде других работ авторов и с участием авторов (см. [6; 13–15]).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Неравенство $D(n)_p \le M(n)_p$ для наилучших констант в неравенствах (2.1) и (2.4) очевидно. Докажем обратное неравенство. Воспользуемся оператором сдвига (1.1). Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и равномерная норма f достигается в некоторой точке $t \in [0,1]$. Из определения (1.1) видно, что функция $g(x) = (T_t f)(x)$ также является полиномом порядка n и обладает свойством $g(0) = f(t)$. Применяя неравенство (2.4) и теорему 1, получаем

$$\|f\|_C = |f(t)| = |g(0)| \le D(n)_p \|g\|_{L^p} \le D(n)_p \|f\|_{L^p}.$$

В силу произвольности $f \in \mathcal{P}_n$ отсюда следует неравенство $M(n)_p \le D(n)_p$. Равенство (2.5) проверено.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть ϱ_n^* — экстремальный полином неравенства (2.4). Имеем $D(n)_p\|\varrho_n^*\|_{L^p} = |\varrho_n^*(0)| \le \|\varrho_n^*\|_C \le M(n)_p\|\varrho_n^*\|_{L^p}$. Отсюда с учетом равенства (2.5) следует, что полином ϱ_n^* является экстремальным в неравенстве (2.1) и имеет место равенство $\|\varrho_n^*\|_C = |\varrho_n^*(0)|$.

Теорема доказана.

2.3. О неравенствах (2.1) и (2.4) для двух конкретных значений параметра p

2.3.1. Случай $p = 2$. Как следствие (0.5) на множестве $\mathcal{P}_n$ имеет место формула Кристофеля — Дарбу

$$\varrho_n(x) = \int\limits_0^1 \mathcal{K}_n(x,u)\varrho_n(u)du, \quad \mathcal{K}_n(x,u) = 2\sum_{\ell=1}^n \eta_\ell(x)\eta_\ell(u). \tag{2.6}$$

В точке $x = 0$ эта формула принимает вид

$$\varrho_n(0) = \int\limits_0^1 \mathcal{K}_n(u)\varrho_n(u)du,$$

здесь (см., например, [16, отдел 6, § 3, задача 16])

$$\mathcal{K}_n(u) = \mathcal{K}_n(0,u) = 2\sum_{\ell=1}^n \eta_\ell(u) = 2\sum_{\ell=1}^n \cos\frac{2\ell-1}{2}\pi x = \frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta}, \quad \theta = \frac{\pi x}{2}.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$|\varrho_n(0)| \le \|\mathcal{K}_n\|_{L^2}\|\varrho_n\|_{L^2}, \quad \varrho_n \in \mathcal{P}.$$

Последнее неравенство точное и обращается в равенство лишь на полиномах $\varrho_n^* = c\mathcal{K}_n$, $c \in \mathbb{C}$. В силу равенства Парсеваля (0.6) имеем $\|\mathcal{K}_n\|_{L^2}^2 = 2n$. Таким образом, при $p = 2$ наилучшие константы в неравенствах (2.1) и (2.4) имеют следующие значения:

$$M(n)_2 = D(n)_2 = \sqrt{2n}.$$

2.3.2. Случай $p = 1$. При $p = 1$ нами будут даны здесь лишь двусторонние оценки наилучших констант в неравенствах (2.1) и (2.4), причем достаточно грубые. Их полезно сравнить с результатами о наилучшей константе в (C, L)-неравенстве Никольского для классической тригонометрической системы (см. работы [17–23] и приведенную в них библиографию).

Оценка сверху. Представление (2.6) влечет оценку $|\varrho_n(x)| \le 2n\int_0^1 |\varrho_n(u)|du$. Это дает оценку сверху

$$M(n)_1 = D(n)_1 \le 2n. \tag{2.7}$$

Оценка снизу. Будем исходить из классического ядра Фейера порядка $2n$

$$F_{2n}(\theta) = \frac{2n+1}{2} + \sum_{k=1}^{2n}(2n+1-k)\cos k\theta; \tag{2.8}$$

оно неотрицательное (см., например, [16, отдел 6, § 3, задача 18]). Исходя из этого ядра, определим тригонометрический полином (порядка $2n$)

$$\Phi_{2n}(\theta) = \Upsilon F_{2n}(\theta), \quad \text{где} \quad \Upsilon f(\theta) = (f(\theta) - f(\pi-\theta))/2. \tag{2.9}$$

Имеем $\Upsilon \cos k\theta = (\cos k\theta - \cos k(\pi-\theta))/2 = \big((1-(-1)^k)\cos k\theta\big)/2$. Следовательно,

$$\Phi_{2n}(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1}(2n+1-(2k+1))\cos(2k+1)\theta = 2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\cos(2k+1)\theta.$$

Сейчас видно, что функция

$$\varphi_n(x) = \Phi_{2n}(\theta), \quad \theta = \frac{\pi x}{2},$$

имеет вид (2.2), т.е. $\varphi_n \in \mathcal{P}_n$.

Для этого полинома имеем $\varphi_n(0) = \Phi_{2n}(0) = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1}(n-k) = n(n+1)$. Оценим норму $\|\varphi_n\|_L$ сверху:

$$\|\varphi_n\|_L = \int\limits_0^1 |\varphi_n(x)|dx = \Big[x = \frac{2\theta}{\pi}\Big] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}|\Phi_{2n}(\theta)|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\Phi_{2n}(\theta)|d\theta.$$

Определение (2.9) и представление (2.8) влекут

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\Phi_{2n}(\theta)|d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|F_{2n}(\theta)|d\theta \le \frac{2n+1}{2}.$$

Следовательно,

$$\|\varphi_n\|_L \le \frac{2n+1}{2}. \tag{2.10}$$

В силу (2.10) имеем для константы $D(n)_1$ в (2.4) оценку снизу

$$D(n)_1 \ge \frac{2n(n+1)}{2n+1}. \tag{2.11}$$

Объединяя (2.7) и (2.11), получаем двусторонние оценки

$$\frac{2n(n+1)}{2n+1} \le M(n)_1 = D(n)_1 \le 2n. \tag{2.12}$$

Оценки (2.12) являются довольно далекими. Авторы предполагают в ближайшее время исследовать неравенства (2.1), (2.4) более обстоятельно.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту статьи, который внимательно прочитал рукопись и сделал ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. Часть первая. М.: ИЛ, 1949. 798 с.
2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.И.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2: Функции Бесселя. М.: Наука, 1966. 295 с.
3. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
4. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона—Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 183–198.
5. **Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.** Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье—Бесселя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 7. С. 1051–1057.
6. **Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth A.** Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, iss. 1. P. 21–42. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6.
7. **Левитан Б.М.** Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, вып. 2. С. 102–143.

8. **Никольский С.М.** Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1983. 461 с.
9. **Гашков С.Б., Чубариков В.Н.** Арифметика, алгоритмы, сложность вычислений. М.: Дрофа, 2005. 320 с.
10. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
11. **Arestov V.V.** A characterization of extremal elements in some linear problems // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 2. P. 22–32. doi: 10.15826/umj.2017.2.004 .
12. **Арестов В.В., Дейкалова М.В.** Неравенство Никольского для алгебраических полиномов на многомерной евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 34–47.
13. **Arestov V., Deikalova M.** Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708. doi: 10.1007/s40315-015-0134-y .
14. **Arestov V., Deikalova M.** Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Analysis Math. 2016. Vol. 42, no. 2. P. 91–120. doi: 10.1007/s10476-016-0201-2 .
15. **Arestov V., Deikalova M., Horváth Á.** On Nikol'skii type inequality between the uniform norm and the integral q-norm with Laguerre weight of algebraic polynomials on the half-line // J. Approx. Theory. 2017. Vol. 222. P. 40–54. doi: 10.1016/j.jat.2017.05.005 .
16. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978. 432 с.
17. **Тайков Л.В.** Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, вып. 3. С. 205–211.
18. **Babenko V., Kofanov V., Pichugov S.** Comparison of rearrangement and Kolmogorov–Nagy type inequalities for periodic functions // Approximation Theory: A Volume Dedicated to Blagovest Sendov / ed. B. Bojanov. Sofia: Darba, 2002. P. 24–53.
19. **Горбачев Д.В.** Усиление нижней оценки Тайкова в неравенстве между C- и L-нормами для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 132–134.
20. **Горбачев Д.В.** Интегральная задача Конягина и (C, L)-константы Никольского // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 72–91.
21. **Горбачев Д.В.** Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Изд-во "Гриф и К", 2005. 152 с.
22. **Ganzburg M., Tikhonov S.** On sharp constants in Bernstein–Nikol'skii inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466. doi 10.1007/s00365-016-9363-1 .
23. **Горбачев Д.В., Мартьянов И.А.** О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышев. сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 80–89.

Поступила 5.06.2022
После доработки 5.07.2022
Принята к публикации 11.07.2022

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

Дейкалова Марина Валерьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: marina.deikalova@urfu.ru

REFERENCES

1. Watson G.N. *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995, 814 p. ISBN: 0521483913 . Translated to Russian under the title *Teoriya besselevykh funktsii. Ch.* 1, Moscow: Inostr. Liter. Publ., 1949, 798 p.
2. Bateman G., Erdélyi A., et al. *Higher transcendental functions. Vol. II.* NY: McGraw Hill Book Company, 1953, 396 p. ISBN: 0486446158 . Translated to Russian under the title *Vysshie transtsendentnye funktsii. T.* 2. *Funktsii Besselya*, Moscow: Nauka Publ., 1966, 295 p.
3. Vladimirov V.S. *Generalized functions in mathematical physics.* Moscow: Mir Publ., 1979, 362 p. ISBN: 071471545X . Original Russian text published in Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoi fiziki*, Moscow: Nauka Publ., 1981. 512 c.
4. Babenko A.G. Exact Jackson–Stechkin inequality in the space $L^2(\mathbb{R}^m)$. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 1998, vol. 5, pp. 183–198 (in Russian).
5. Abilov V.A., Abilova F.V., Kerimov M.K. Some issues concerning approximations of functions by Fourier–Bessel sums. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 7, pp. 867–873. doi: 10.1134/S0965542513070026 .
6. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth A. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line. *Anal. Math.*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 21–42. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6 .
7. Levitan B.M. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1951, vol. 6, no. 2, pp. 102–143 (in Russian).
8. Nikol'skii S.M. *Kurs matematicheskogo analiza* [A course of mathematical analysis]. Vol. 1. Moscow: Nauka Publ., 1983, 461 p.
9. Gashkov S.B., Chubarikov V.N. *Arifmetika, algoritmy, slozhnost' vychislenii* [Arithmetic, algorithms, complexity of computation]. Moscow: Drofa Publ., 2005, 320 p.
10. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p.
11. Arestov V.V. A characterization of extremal elements in some linear problems. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 22–32. doi: 10.15826/umj.2017.2.004 .
12. Arestov V.V., Deikalova M.V. Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. 9–23. doi: 10.1134/S0081543814020023 .
13. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 689–708. doi: 10.1007/s40315-015-0134-y .
14. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval. *Anal. Math.*, 2016, vol. 42, no. 2, pp. 91–120. doi: 10.1007/s10476-016-0201-2 .
15. Arestov V., Deikalova M., Horváth Á. On Nikol'skii type inequality between the uniform norm and the integral q-norm with Laguerre weight of algebraic polynomials on the half-line. *J. Approx. Theory*, 2017, vol. 222, pp. 40–54. doi: 10.1016/j.jat.2017.05.005 .
16. Pólya G., Szegö G. *Problems and theorems in analysis. Vol. 2.* Berlin: Springer, 1998, 392 p. doi: 10.1007/978-3-642-61905-2 . Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza. T.* 2. Moscow: Nauka Publ., 1978, 432 p.
17. Taikov L.V. A group of extremal problems for trigonometric polynomials. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1965, vol. 20, no. 3, pp. 205–211.
18. Babenko V., Kofanov V., Pichugov S. Comparison of rearrangement and Kolmogorov–Nagy type inequalities for periodic functions. In: Bojanov, B. (ed.) *Approximation Theory: A Volume Dedicated to Blagovest Sendov.* Sofia: Darba, 2002, ISBN: 954-90126-5-4/hbk , pp. 24–53.
19. Gorbachev D.V. A sharpening of the Taikov lower bound in the inequality between the C- and L-norms for trigonometric polynomials. *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 1, pp. 123–126. doi: 10.1023/A:1025079402595 .
20. Gorbachev D.V. An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, suppl. 2, pp. S117–S138.
21. Gorbachev D.V. *Izbrannye zadachi teorii funktsii i teorii priblizhenii i ikh prilozheniya.* [Selected problems in functional analysis and approximation theory and their applications]. Tula: Grif i K Publ., 2005, 152 p. ISBN: 5-7679-0644-0 .

22. Ganzburg M.I., Tikhonov S.Y. On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities. *Constr. Approx.*, 2017, vol. 45, no. 3, pp. 449–466. doi: 10.1007/s00365-016-9363-1 .

23. Gorbachev D.V., Mart'yanov I.A. On interrelation of Nikolskii constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type. *Chebyshevskii Sbornik*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 80–89. doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-80-89 (in Russian).

Received June 5, 2022
Revised July 5, 2022
Accepted July 11, 2022

Funding Agency: This work was performed as a part of the research conducted in the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2022-874).

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru .

Marina Valer'evna Deikalova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; e-mail: marina.deikalova@urfu.ru .

Cite this article as: V.V. Arestov, M.V. Deikalova. On one generalized translation and the corresponding inequality of different metrics. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 40–53 .