ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.958

СПЕКТР ОДНОМЕРНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХФАЗНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕД С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ[1]

В. В. Шумилова

В работе исследуется спектр одномерных собственных колебаний вдоль оси Ox_1 двухфазных слоистых сред с периодической структурой, занимающих полосу $0 < x_1 < L$. Их периодом является полоса $0 < x_1 < \varepsilon$, содержащая $2M$ чередующихся слоев изотропного упругого или вязкоупругого материала (первой фазы) и вязкой несжимаемой жидкости (второй фазы). Предполагается, что число периодов $N = L/\varepsilon$ — целое число, а слои параллельны плоскости Ox_2x_3. Указанный спектр обозначается через S_ε и определяется как множество собственных значений краевой задачи для однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с условиями сопряжения на границах раздела твердых и жидких слоев. Эти условия непосредственно выводятся из исходного предположения о непрерывности перемещений и нормальных напряжений на границах раздела слоев. Показано, что спектр S_ε состоит из корней трансцендентных уравнений, число которых равно числу периодов N, содержащихся внутри полосы $0 < x_1 < L$. За исключением одного частного случая, корни этих уравнений могут быть найдены только численно. Для многослойных сред при $N \gg 1$ в качестве начальных приближений к точкам спектра S_ε предложено использовать конечные пределы последовательностей $\lambda(\varepsilon) \in S_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Установлено, что множество всех конечных пределов совпадает с множеством корней рациональных уравнений, обозначаемым через S. Коэффициенты этих уравнений, а значит, и точки множества S зависят от объемной доли жидкости в слоистой среде и не зависят от числа M жидких слоев внутри периода. Доказано, что при любом $M \geq 1$ спектр S_ε сходится по Хаусдорфу к множеству S при $\varepsilon \to 0$.

Ключевые слова: спектр собственных колебаний, слоистая среда, двухфазная среда, упругий материал, вязкоупругий материал, вязкая несжимаемая жидкость.

V. V. Shumilova. The spectrum of one-dimensional eigenoscillations of two-phase layered media with periodic structure.

We study the spectrum of one-dimensional eigenoscillations along the Ox_1 axis of two-phase layered media with periodic structure occupying the band $0 < x_1 < L$. The period of the media is a band $0 < x_1 < \varepsilon$ composed of $2M$ alternating layers of an isotropic elastic or viscoelastic material (the first phase) and a viscous incompressible fluid (the second phase). It is assumed that the number of periods $N = L/\varepsilon$ is an integer, and the layers are parallel to the Ox_2x_3 plane. The spectrum is denoted by S_ε and is defined as the set of eigenvalues of a boundary value problem for a homogeneous system of ordinary differential equations with conjugation conditions at the interfaces between the solid and fluid layers. These conditions are derived directly from the initial assumption on the continuity of displacements and normal stresses at the interfaces between the layers. It is shown that the spectrum S_ε consists of the roots of transcendental equations, the number of which is equal to the number of periods N contained within the band $0 < x_1 < L$. The roots of these equations can only be found numerically, except for one particular case. In the case of multi-layered media with $N \gg 1$, the finite limits of the sequences $\lambda(\varepsilon) \in S_\varepsilon$ as $\varepsilon \to 0$ are proposed to be used as initial approximations. It is established that the set of all finite limits coincides with the set of roots of rational equations, denoted by S. The coefficients of these equations, and hence the points of the set S depend on the volume fraction of the fluid within the layered medium and do not depend on the number M of the fluid layers within the period. It is proved that for any $M \geq 1$ the spectrum S_ε converges in the sense of Hausdorff to the set S as $\varepsilon \to 0$.

Keywords: spectrum of eigenoscillations, layered medium, two-phase medium, elastic material, viscoelastic material, viscous incompressible fluid.

MSC: 35B27, 74F10, 74S25, 76M22

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-250-261

Введение

Исследование динамического поведения микронеоднородных двухфазных сред, состоящих из твердого материала и жидкости, относится к числу основных направлений механики гетеро-

[1]Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690138-6) .

генных сред. При построении математических моделей, описывающих колебания таких сред, часто используется предположение о периодичности чередования их фаз. Благодаря этому предположению изучение спектра собственных колебаний двухфазных сред можно свести к спектральному анализу краевых задач для однородных систем дифференциальных уравнений, коэффициенты которых — периодические быстро осциллирующие функции. Исследованию спектров краевых задач, возникающих при изучении различных задач механики микронеоднородных сред, посвящены работы [1–9].

При изучении поведения двухфазных сред, состоящих из твердого материала и вязкой жидкости, большой интерес вызывает тот факт, что их динамические характеристики могут качественно отличаться от динамических характеристик твердого матерала даже в том случае, когда доля жидкости очень мала. Так, например, в работе [10] было обнаружено явление исчезновения собственных частот колебаний при попадании в поры мраморного стержня очень малого количества вазелинового масла.

Из всевозможных моделей двухфазных сред следует отдельно выделить слоистые среды, состоящие из чередующихся плоских слоев двух изотропных компонент, например, изотропного твердого материала и вязкой жидкости. При подходящем выборе декартовой системы координат динамические свойства слоистых сред зависят только от одной пространственной переменной и времени. Очевидно, что это позволяет более тщательно и всесторонне исследовать динамические процессы, происходящие в слоистых средах, по сравнению с другими моделями двухфазных сред (см., например, [11–16]). В частности, в работе [14] именно на примере слоистой среды, состоящей из твердого материала и вязкой сжимаемой жидкости, было дано возможное теоретическое обоснование упомянутого выше явления исчезновения собственных частот колебаний.

Исследованию спектра S_ε одномерных собственных колебаний слоистых сред, имеющих ε-периодическую структуру и состоящих из изотропного твердого материала и вязкой жидкости, посвящены работы [14–16]. В этих работах предполагалось, что период среды содержит один жидкий слой толщины εh, где ε — толщина периода, а $0 < h < 1$. На основе матричного подхода были выведены трансцендентные уравнения, из корней которых состоит спектр S_ε, а также исследовано асимптотическое поведение точек спектра при $\varepsilon \to 0$. Было также доказано, что в случае вязкой несжимаемой жидкости имеет место сходимость по Хаусдорфу $S_\varepsilon \to S$ при $\varepsilon \to 0$, где S — спектр одномерных собственных колебаний соответствующей усредненной (эффективной) среды. Следует напомнить, что согласно определению эта сходимость означает выполнение двух условий [2, с. 65]: 1) для любого $s \in S$ найдется последовательность $s_\varepsilon \in S_\varepsilon$ такая, что $s_\varepsilon \to s$ при $\varepsilon \to 0$; 2) если $s_\varepsilon \in S_\varepsilon$ и $s_\varepsilon \to s < \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то $s \in S$. Целью данной работы — распространение результатов перечисленных работ на более общий случай, когда период содержит M жидких слоев произвольной конечной толщины.

1. Математическое описание двухфазной слоистой среды

Пусть $\Omega = (0, L)^3$ — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$, заполненная двухфазной средой с ε-периодической структурой ($0 < \varepsilon < L$). Периодом этой среды является полоса $Y_\varepsilon = (0, \varepsilon) \times (0, L)^2$, состоящая из $2M$ взаимно чередующихся слоев изотропного твердого материала и вязкой несжимаемой жидкости. Дополнительно предполагаем, что слои параллельны плоскости Ox_2x_3, а область Ω содержит целое число N периодов. Последнее означает, что $L = N\varepsilon$, и, следовательно, общее число слоев, содержащихся в Ω, равно $2MN$.

Для более ясного представления о геометрическом положении твердых и жидких слоев внутри Ω введем обозначения

$$I_{1\varepsilon} = \bigcup_{n=0}^{N-1} \bigcup_{m=0}^{M-1} (\varepsilon n + \varepsilon h_{2m}, \varepsilon n + \varepsilon h_{2m+1}),$$

$$I_{2\varepsilon} = \bigcup_{n=0}^{N-1} \bigcup_{m=0}^{M-1} (\varepsilon n + \varepsilon h_{2m+1}, \varepsilon n + \varepsilon h_{2m+2}),$$

$$0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_{2M} = 1,$$

и в дальнейшем считаем, что множество $\Omega_{1\varepsilon} = I_{1\varepsilon} \times (0, L)^2$ занято первой (твердой) фазой, а множество $\Omega_{2\varepsilon} = I_{2\varepsilon} \times (0, L)^2$ — второй (жидкой) фазой. Суммарную объемную долю жидкой фазы внутри Ω обозначим через h, т. е.

$$h = \frac{|\Omega_{2\varepsilon}|}{L^3} = \frac{N\varepsilon}{L} \sum_{m=0}^{M-1} (h_{2m+2} - h_{2m+1}) = \sum_{m=0}^{M-1} (h_{2m+2} - h_{2m+1}).$$

Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и малых деформаций в твердой фазе, имеют вид

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} = a_{ijkh} e_{kh}(u^{\varepsilon}) + b_{ijkh} e_{kh}\Big(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\Big) - d_{ijkh}(t) * e_{kh}(u^{\varepsilon}), \quad x \in \Omega_{1\varepsilon}. \tag{1.1}$$

Здесь $u^{\varepsilon}(x, t)$ — вектор перемещений; σ^{ε} — тензор напряжений; $e(u^{\varepsilon})$ — тензор малых деформаций; символ “$*$” обозначает операцию свертки по переменной t; a, b и $d(t)$ — тензоры модулей упругости, коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации соответственно,

$$e_{kh}(u^{\varepsilon}) = e_{kh}^{x}(u^{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_k^{\varepsilon}}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^{\varepsilon}}{\partial x_k}\Big), \quad g_1(t) * g_2(t) = \int_0^t g_1(t - s) g_2(s)\, ds.$$

Отметим, что в (1.1), как и везде ниже, предполагается суммирование по повторяющимся индексам, а индексы i, j, k, h, если не оговорено противное, принимают значения от 1 до 3.

Тензор a является положительно определенным, и его компоненты заданы в виде

$$a_{ijkh} = \lambda_0 \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu_0 (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}),$$

где λ_0 и μ_0 — параметры Ламе, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Что касается тензоров b и $d(t)$, то мы будем рассматривать следующие четыре случая:

1) $b = 0$, $d(t) \equiv 0$; 2) $b \neq 0$, $d(t) \equiv 0$; 3) $b = 0$, $d(t) \not\equiv 0$; 4) $b \neq 0$, $d(t) \not\equiv 0$.

В первом случае твердая фаза состоит из упругого материала, а в остальных случаях — из вязкоупругого материала. В частности, второй случай соответствует вязкоупругому материалу Кельвина — Фойгта.

В дальнейшем предполагается, что если $b \neq 0$, то тензор b является положительно определенным и

$$b_{ijkh} = \zeta_0 \delta_{ij} \delta_{kh} + \eta_0 (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}),$$

где ζ_0 and η_0 — коэффициенты вязкости, а если $d(t) \not\equiv 0$, то

$$d_{ijkh}(t) = \Big(G_1(t) - \frac{1}{3} G(t)\Big) \delta_{ij} \delta_{kh} + \frac{1}{2} G(t) (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}),$$

где $G(t)$ и $G_1(t)$ — регулярные части ядер сдвиговой и объемной релаксации [17, гл. 1, § 2], удовлетворяющие условиям

$$G_1(t) = k_1 G(t), \quad G(t) = \sum_{n=1}^{N} v_n e^{-\gamma_n t}, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{\gamma_n} \le K_1,$$

$$k_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad v_n, \gamma_n \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma_i \neq \gamma_j \ \text{ при } \ i \neq j,$$

$$K_1 = 2\mu_0 \ \text{ при } \ k_1 = 0, \quad K_1 = \min\Big\{2\mu_0, \frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{3k_1}\Big\} \ \text{ при } \ k_1 > 0.$$

Определяющие соотношения в жидкой фазе имеют вид

$$\sigma^{\varepsilon}_{ij} = -p^{\varepsilon}\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}\Big(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\Big), \quad x \in \Omega_{2\varepsilon},$$

где $p^{\varepsilon}(x,t)$ — давление в жидкости, а η — динамический коэффициент вязкости жидкости.

Математическая модель, описывающая колебания слоистой среды в области Ω, имеет вид

$$\begin{gathered}
\rho_s \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma^{\varepsilon}_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x,t), \quad x \in \Omega_{s\varepsilon}, \quad s = 1,2,\\
\operatorname{div}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega_{2\varepsilon}, \quad [u^{\varepsilon}]|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma^{\varepsilon}_{i1}]|_{\Gamma_\varepsilon} = 0,\\
u^{\varepsilon}(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^{\varepsilon}(x,0) = \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(x,0) = 0.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $\rho_s = \mathrm{const} > 0$ — плотность s-й фазы, $f(x,t)$ — вектор объемной силы, а квадратные скобки $[\cdot]|_{\Gamma_\varepsilon}$ обозначают скачок заключенной в них величины при переходе через границы слоев $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}$.

2. Спектр одномерных собственных колебаний вдоль оси Ox_1

Начиная с этого момента, мы считаем, что слоистая среда занимает неограниченную полосу $0 < x_1 < L$, а колебания распространяются вдоль оси Ox_1, т. е. перпендикулярно слоям. Для таких колебаний $u^{\varepsilon}(x,t) = (u^{\varepsilon}_1(x_1,t),0,0)$, $p^{\varepsilon}(x,t) = p^{\varepsilon}(x_1,t)$ и $f(x,t) = (f_1(x_1,t),0,0)$. Следовательно, задача (1.2) принимает вид

$$\begin{gathered}
\rho_1 \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}_1}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}_1}{\partial x_1^2} + b_1 \frac{\partial^3 u^{\varepsilon}_1}{\partial x_1^2 \partial t} - G_2(t) * \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}_1}{\partial x_1^2} + f_1(x_1,t), \quad x_1 \in I_{1\varepsilon},\\
\rho_2 \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial x_1} + f_1(x_1,t), \quad \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}_1}{\partial x_1 \partial t} = 0, \quad x_1 \in I_{2\varepsilon},\\
u^{\varepsilon}_1(\varepsilon n + \varepsilon h_k - 0, t) = u^{\varepsilon}_1(\varepsilon n + \varepsilon h_k + 0, t), \quad n + k \neq 0,\\
\Big(a_1 \frac{\partial u^{\varepsilon}_1}{\partial x_1} + b_1 \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}_1}{\partial x_1 \partial t} - G_2(t) * \frac{\partial u^{\varepsilon}_1}{\partial x_1}\Big)\Big|_{x_1 = \varepsilon n + \varepsilon h_{2m} + 0} = -p^{\varepsilon}(\varepsilon n + \varepsilon h_{2m} - 0, t), \quad n + m \neq 0,\\
\Big(a_1 \frac{\partial u^{\varepsilon}_1}{\partial x_1} + b_1 \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}_1}{\partial x_1 \partial t} - G_2(t) * \frac{\partial u^{\varepsilon}_1}{\partial x_1}\Big)\Big|_{x_1 = \varepsilon n + \varepsilon h_{2m+1} - 0} = -p^{\varepsilon}(\varepsilon n + \varepsilon h_{2m+1} + 0, t),\\
u^{\varepsilon}_1(0,t) = u^{\varepsilon}_1(L,t) = 0, \quad t > 0; \quad u^{\varepsilon}_1(x_1,0) = \frac{\partial u^{\varepsilon}_1}{\partial t}(x_1,0) = 0, \quad x_1 \in (0,L),\\
n = 0,\dots,N-1; \quad k = 0,\dots,2M-1; \quad m = 0,\dots,M-1,
\end{gathered}$$

где $a_1 = a_{1111} = \lambda_0 + 2\mu_0$, $b_1 = b_{1111} = \zeta_0 + 2\eta_0$, $G_2(t) = d_{1111}(t) = (k_1 + 2/3)G(t)$.

Применяя преобразование Лапласа по времени $u^{\varepsilon}_1(x_1,t) \to u^{\varepsilon}_{1\lambda}(x_1)$, $p^{\varepsilon}(x_1,t) \to p^{\varepsilon}_{\lambda}(x_1)$, запишем последнюю задачу при $f_1(x_1,t) \equiv 0$ в изображениях Лапласа:

$$A_\lambda \frac{d^2 u^{\varepsilon}_{1\lambda}}{dx_1^2} - \rho_1 \lambda^2 u^{\varepsilon}_{1\lambda} = 0, \quad x_1 \in I_{1\varepsilon}, \tag{2.1}$$

$$\frac{dp^{\varepsilon}_{\lambda}}{dx_1} + \rho_2 \lambda^2 u^{\varepsilon}_{1\lambda} = 0, \quad \frac{du^{\varepsilon}_{1\lambda}}{dx_1} = 0, \quad x_1 \in I_{2\varepsilon}, \tag{2.2}$$

$$u^{\varepsilon}_{1\lambda}(\varepsilon n + \varepsilon h_k - 0) = u^{\varepsilon}_{1\lambda}(\varepsilon n + \varepsilon h_k + 0), \quad n + k \neq 0, \tag{2.3}$$

$$A_\lambda \frac{du^{\varepsilon}_{1\lambda}}{dx_1}(\varepsilon n + \varepsilon h_{2m} + 0) = -p^{\varepsilon}_{\lambda}(\varepsilon n + \varepsilon h_{2m} - 0), \quad n + m \neq 0, \tag{2.4}$$

$$A_\lambda \frac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx_1}(\varepsilon n + \varepsilon h_{2m+1} - 0) = -p^\varepsilon_\lambda(\varepsilon n + \varepsilon h_{2m+1} + 0), \tag{2.5}$$

$$u^\varepsilon_{1\lambda}(0) = u^\varepsilon_{1\lambda}(L) = 0, \quad n = 0, \ldots, N-1, \quad k = 0, \ldots, 2M-1, \quad m = 0, \ldots, M-1, \tag{2.6}$$

где

$$A_\lambda = a_1 + b_1\lambda - R\Big(k_1 + \frac{2}{3}\Big)\sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{\lambda + \gamma_n}.$$

Здесь мы полагаем $b_1 = 0$ при $b = 0$, $R = 0$ при $d(t) \equiv 0$ и $R = 1$ при $d(t) \not\equiv 0$.

В дальнейшем λ рассматривается в качестве спектрального параметра, а под спектром одномерных собственных колебаний среды вдоль оси Ox_1 понимается множество собственных значений задачи (2.1)–(2.6), т. е. множество S_ε всех комплексных значений λ, при которых она имеет нетривиальные решения $u^\varepsilon_{1\lambda}(x_1)$ и $p^\varepsilon_\lambda(x_1)$.

Чтобы описать множество S_ε, мы сначала найдем квадратную матрицу P^ε_λ такую, что

$$\begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon + n\varepsilon - 0) \\ -p^\varepsilon_\lambda(\varepsilon + n\varepsilon - 0) \end{pmatrix} = P^\varepsilon_\lambda \begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(n\varepsilon + 0) \\ A_\lambda \dfrac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx_1}(n\varepsilon + 0) \end{pmatrix}, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Отметим, что в силу периодичности по x_1 матрица P^ε_λ не зависит от n. Следовательно, нам достаточно ее найти при $n = 0$. Для этого выпишем общие решения дифференциальных уравнений (2.1) и (2.2) на интервале $(0, \varepsilon)$:

$$u^\varepsilon_{1\lambda}(x_1) = C^{(1)}_{\lambda m} e^{-B_\lambda x_1} + C^{(2)}_{\lambda m} e^{B_\lambda x_1}, \quad x_1 \in (\varepsilon h_{2m}, \varepsilon h_{2m+1}),$$

$$u^\varepsilon_{1\lambda}(x_1) = C^{(3)}_{\lambda m}, \quad p^\varepsilon_\lambda(x_1) = -\rho_2\lambda^2 C^{(3)}_{\lambda m} x_1 + C^{(4)}_{\lambda m}, \quad x_1 \in (\varepsilon h_{2m+1}, \varepsilon h_{2m+2}),$$

где $B_\lambda = \lambda\sqrt{\rho_1/A_\lambda}$ и $m = 0, \ldots, M-1$.

Нетрудно убедиться, что

$$C^{(1)}_{\lambda m} = \frac{\exp(\varepsilon B_\lambda h_{2m})}{2B_\lambda}\Big(B_\lambda u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon h_{2m} + 0) - \frac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx_1}(\varepsilon h_{2m} + 0)\Big),$$

$$C^{(2)}_{\lambda m} = \frac{\exp(-\varepsilon B_\lambda h_{2m})}{2B_\lambda}\Big(B_\lambda u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon h_{2m} + 0) + \frac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx_1}(\varepsilon h_{2m} + 0)\Big),$$

$$C^{(4)}_{\lambda m} = p^\varepsilon_\lambda(\varepsilon h_{2m+1} + 0) + \varepsilon h_{2m+1}\rho_2\lambda^2 C^{(3)}_{\lambda m},$$

поэтому

$$u^\varepsilon_{1\lambda}(x_1) = \frac{\exp(B_\lambda(-x_1 + \varepsilon h_{2m}))}{2B_\lambda}\Big(B_\lambda u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon h_{2m} + 0) - \frac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx_1}(\varepsilon h_{2m} + 0)\Big)$$
$$+ \frac{\exp(B_\lambda(x_1 - \varepsilon h_{2m}))}{2B_\lambda}\Big(B_\lambda u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon h_{2m} + 0) + \frac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx_1}(\varepsilon h_{2m} + 0)\Big)$$

при $x_1 \in (\varepsilon h_{2m}, \varepsilon h_{2m+1})$ и

$$u^\varepsilon_{1\lambda}(x_1) = C^{(3)}_{\lambda m}, \quad p^\varepsilon_\lambda(x_1) = -\rho_2\lambda^2 C^{(3)}_{\lambda m} x_1 + \varepsilon h_{2m+1}\rho_2\lambda^2 C^{(3)}_{\lambda m} + p^\varepsilon_\lambda(\varepsilon h_{2m+1} + 0)$$

при $x_1 \in (\varepsilon h_{2m+1}, \varepsilon h_{2m+2})$. Отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon h_{2m+1} - 0) \\ A_\lambda \dfrac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx_1}(\varepsilon h_{2m+1} - 0) \end{pmatrix} = P^{1\varepsilon}_{\lambda m} \begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon h_{2m} + 0) \\ A_\lambda \dfrac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx_1}(\varepsilon h_{2m} + 0) \end{pmatrix}, \quad m = 0, \ldots, M-1, \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon h_{2m+2} - 0) \\ -p^\varepsilon_\lambda(\varepsilon h_{2m+2} - 0) \end{pmatrix} = P^{2\varepsilon}_{\lambda m} \begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon h_{2m+1} + 0) \\ -p^\varepsilon_\lambda(\varepsilon h_{2m+1} + 0) \end{pmatrix}, \quad m = 0, \ldots, M-1, \tag{2.8}$$

где

$$(P^{1\varepsilon}_{\lambda m})_{11} = (P^{1\varepsilon}_{\lambda m})_{22} = \cosh(\varepsilon B_\lambda d_{1m}), \quad (P^{1\varepsilon}_{\lambda m})_{12} = \frac{\sinh(\varepsilon B_\lambda d_{1m})}{\lambda\sqrt{\rho_1 A_\lambda}},$$

$$(P^{1\varepsilon}_{\lambda m})_{21} = \lambda\sqrt{\rho_1 A_\lambda}\sinh(\varepsilon B_\lambda d_{1m}), \quad (P^{2\varepsilon}_{\lambda m})_{11} = (P^{2\varepsilon}_{\lambda m})_{22} = 1, \quad (P^{2\varepsilon}_{\lambda m})_{12} = 0,$$

$$(P^{2\varepsilon}_{\lambda m})_{21} = \varepsilon\lambda^2\rho_2 d_{2m}, \quad d_{1m} = h_{2m+1} - h_{2m}, \quad d_{2m} = h_{2m+2} - h_{2m+1}.$$

Учитывая условия (2.3)–(2.5) на границах раздела слоев, из (2.7) и (2.8) получаем

$$\begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon h_{2m+2} - 0) \\ -p^\varepsilon_\lambda(\varepsilon h_{2m+2} - 0) \end{pmatrix} = P^\varepsilon_{\lambda m} \begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon h_{2m} + 0) \\ A_\lambda \dfrac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx_1}(\varepsilon h_{2m} + 0) \end{pmatrix}, \quad m = 0, \dots, M-1, \tag{2.9}$$

где $P^\varepsilon_{\lambda m} = P^{2\varepsilon}_{\lambda m} \cdot P^{1\varepsilon}_{\lambda m}$. Вычисляя элементы матрицы $P^\varepsilon_{\lambda m}$, находим

$$(P^\varepsilon_{\lambda m})_{11} = \cosh(\varepsilon B_\lambda d_{1m}), \quad (P^\varepsilon_{\lambda m})_{12} = \frac{\sinh(\varepsilon B_\lambda d_{1m})}{\lambda\sqrt{\rho_1 A_\lambda}}, \tag{2.10}$$

$$(P^\varepsilon_{\lambda m})_{21} = \varepsilon\lambda^2\rho_2 d_{2m}\cosh(\varepsilon B_\lambda d_{1m}) + \lambda\sqrt{\rho_1 A_\lambda}\sinh(\varepsilon B_\lambda d_{1m}), \tag{2.11}$$

$$(P^\varepsilon_{\lambda m})_{22} = \cosh(\varepsilon B_\lambda d_{1m}) + \frac{\varepsilon\lambda\rho_2 d_{2m}}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}}\sinh(\varepsilon B_\lambda d_{1m}). \tag{2.12}$$

Последовательное применение (2.9) при $m = M-1, \dots, 1, 0$ приводит к соотношению

$$\begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(\varepsilon - 0) \\ -p^\varepsilon_\lambda(\varepsilon - 0) \end{pmatrix} = P^\varepsilon_{\lambda(M-1)} \cdot \ldots \cdot P^\varepsilon_{\lambda 1} \cdot P^\varepsilon_{\lambda 0} \begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(+0) \\ A_{1\lambda} \dfrac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx}(+0) \end{pmatrix},$$

которое означает, что $P^\varepsilon_\lambda = P^\varepsilon_{\lambda(M-1)} \cdot \ldots \cdot P^\varepsilon_{\lambda 1} \cdot P^\varepsilon_{\lambda 0}$. Вычисляя элементы матрицы P^ε_λ, получаем

$$(P^\varepsilon_\lambda)_{ij} = \sum_{j_1=1}^{2} (P^\varepsilon_{\lambda 1})_{ij_1}(P^\varepsilon_{\lambda 0})_{j_1 j}$$

при $M = 2$ и

$$(P^\varepsilon_\lambda)_{ij} = \sum_{j_{M-1}=1}^{2} \ldots \sum_{j_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{2} (P^\varepsilon_{\lambda(M-1)})_{ij_{M-1}}(P^\varepsilon_{\lambda(M-2)})_{j_{M-1}j_{M-2}} \ldots (P^\varepsilon_{\lambda 1})_{j_2 j_1}(P^\varepsilon_{\lambda 0})_{j_1 j}$$

при $M \geq 3$.

Так как по нашему предположению полоса $0 < x_1 < L$ содержит ровно N периодов и

$$u^\varepsilon_{1\lambda}(l\varepsilon - 0) = u^\varepsilon_{1\lambda}(l\varepsilon + 0), \quad A_{1\lambda}\frac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx_1}(l\varepsilon + 0) = -p^\varepsilon_\lambda(l\varepsilon - 0), \quad l = 1, \dots, N-1,$$

то мы приходим к матричному равенству

$$\begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(L - 0) \\ -p^\varepsilon_\lambda(L - 0) \end{pmatrix} = (P^\varepsilon_\lambda)^N \begin{pmatrix} u^\varepsilon_{1\lambda}(+0) \\ A_{1\lambda} \dfrac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx}(+0) \end{pmatrix},$$

которое в силу граничных условий (2.6) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -p^\varepsilon_\lambda(L - 0) \end{pmatrix} = (P^\varepsilon_\lambda)^N \begin{pmatrix} 0 \\ A_{1\lambda} \dfrac{du^\varepsilon_{1\lambda}}{dx}(+0) \end{pmatrix}.$$

Отсюда мы видим, что точками спектра S_ε являются корни уравнения

$$(P_\lambda^\varepsilon)_{12}^N = 0. \tag{2.13}$$

Нетрудно проверить, что

$$\det P_{\lambda m}^{1\varepsilon} = \det P_{\lambda m}^{2\varepsilon} = \det P_{\lambda m}^{\varepsilon} = \det P_\lambda^\varepsilon = 1, \quad m = 0, \dots, M-1,$$

поэтому, используя те же рассуждения, что и в [18, с. 224, 225], мы можем показать, что (2.13) разбивается на N уравнений

$$(P_\lambda^\varepsilon)_{12} = 0, \quad (P_\lambda^\varepsilon)_{11} + (P_\lambda^\varepsilon)_{22} = 2\cos\frac{\pi k}{N}, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Резюмируя полученные в данном разделе результаты, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Если $M = 1$, то спектр S_ε состоит из корней уравнений*

$$\frac{1}{\lambda}\sinh\Big(\varepsilon(1-h)B_\lambda\Big) = 0, \tag{2.14}$$

$$\cosh\Big(\varepsilon(1-h)B_\lambda\Big) + \frac{\varepsilon\lambda\rho_2 h}{2\sqrt{\rho_1 A_\lambda}}\sinh\Big(\varepsilon(1-h)B_\lambda\Big) = \cos\frac{\pi k}{N}, \quad k = 1, \dots, N-1, \tag{2.15}$$

а если $M \geq 2$, то он состоит из корней уравнений

$$\sum_{j_1=1}^{2} \cdots \sum_{j_{M-1}=1}^{2} \prod_{m=1}^{M} (P_{\lambda(M-m)}^\varepsilon)_{j_{M-m+1} j_{M-m}} = 0, \quad j_M = 1, \quad j_0 = 2, \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_{M-1}=1}^{2} \prod_{m=1}^{M} (P_{\lambda(M-m)}^\varepsilon)_{i_{M-m+1} i_{M-m}} + \sum_{j_1=1}^{2} \cdots \sum_{j_{M-1}=1}^{2} \prod_{m=1}^{M} (P_{\lambda(M-m)}^\varepsilon)_{j_{M-m+1} j_{M-m}} \\ = 2\cos\frac{\pi k}{N}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad i_0 = i_M = 1, \quad j_0 = j_M = 2,\end{gathered} \tag{2.17}$$

где элементы матриц $P_{\lambda m}^\varepsilon$ заданы формулами (2.10)–(2.12).

Заметим, что корни трансцендентного уравнения (2.14) можно легко найти численно, а в случае $d(t) \equiv 0$ даже выписать в явном виде. Действительно, нетрудно проверить, что они совпадают с корнями рациональных уравнений

$$\varepsilon^2\rho_1(1-h)^2\lambda^2 + \pi^2 l^2 b_1\lambda + \pi^2 l^2 a_1 = \pi^2 l^2\Big(k_1 + \frac{2}{3}\Big)\sum_{n=1}^{N}\frac{v_n}{\lambda + \gamma_n}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

которые, в свою очередь, равносильны алгебраическим уравнениям степени $N+2$. В частности, если $d(t) \equiv 0$, то корни уравнения (2.14) имеют вид

$$\lambda_{1l,2l} = \frac{\pi^2 l^2}{2\varepsilon^2\rho_1(1-h)^2}\Bigg(-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - \frac{4\varepsilon^2 a_1\rho_1(1-h)^2}{\pi^2 l^2}}\Bigg), \quad l = 1, 2, \dots,$$

а если еще дополнительно $b = 0$, то

$$\lambda_{1l,2l} = \pm\frac{i\pi l}{\varepsilon(1-h)}\sqrt{\frac{a_1}{\rho_1}}, \quad i^2 = -1, \quad l = 1, 2, \dots .$$

3. Асимптотическое поведение точек спектра при $\varepsilon \to 0$

В отличие от уравнения (2.14), для трансцендентных уравнений (2.15)–(2.17) не представляется возможным найти равносильные им рациональные уравнения, в том числе для отдельных частных случаев. Кроме того, непосредственный анализ и локализация их корней также являются чрезвычайно трудоемкой и затруднительной задачей. В этой связи при численном решении этих уравнений, например, с помощью принципа аргумента, возникает проблема выбора начальных приближений. Для многослойных сред при $N \gg 1$ наиболее естественными претендентами на эту роль выглядят конечные пределы последовательностей корней вышеупомянутых уравнений при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, нашей следующей целью является описание множества всех конечных пределов последовательностей $\lambda(\varepsilon) \in S_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

Воспользовавшись разложениями

$$\cosh(\varepsilon B_\lambda d_{1m}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}(B_\lambda d_{1m})^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh(\varepsilon B_\lambda d_{1m}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n+1}(B_\lambda d_{1m})^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

представим элементы матриц $P^\varepsilon_{\lambda m}$ в виде

$$(P^\varepsilon_{\lambda m})_{11} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} B_\lambda^2 d_{1m}^2 + \varepsilon^4 Q^{1\varepsilon}_{\lambda m}, \quad (P^\varepsilon_{\lambda m})_{12} = \frac{\varepsilon B_\lambda d_{1m}}{\lambda\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} + \varepsilon^3 Q^{2\varepsilon}_{\lambda m}, \tag{3.1}$$

$$(P^\varepsilon_{\lambda m})_{21} = \varepsilon\lambda \left(\lambda\rho_2 d_{2m} + B_\lambda d_{1m}\sqrt{\rho_1 A_\lambda}\right) + \varepsilon^3 Q^{3\varepsilon}_{\lambda m}, \tag{3.2}$$

$$(P^\varepsilon_{\lambda m})_{22} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(B_\lambda^2 d_{1m}^2 + \frac{2\lambda\rho_2 B_\lambda d_{1m} d_{2m}}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}}\right) + \varepsilon^4 Q^{4\varepsilon}_{\lambda m}, \tag{3.3}$$

где мы обозначили

$$Q^{1\varepsilon}_{\lambda m} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-4}(B_\lambda d_{1m})^{2n}}{(2n)!}, \quad Q^{2\varepsilon}_{\lambda m} = \frac{1}{\lambda\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-2}(B_\lambda d_{1m})^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$Q^{3\varepsilon}_{\lambda m} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda\rho_2 d_{2m} + \frac{B_\lambda d_{1m}\sqrt{\rho_1 A_\lambda}}{2n+1}\right) \frac{\varepsilon^{2n-2}(B_\lambda d_{1m})^{2n}}{(2n)!},$$

$$Q^{4\varepsilon}_{\lambda m} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-4}(B_\lambda d_{1m})^{2n}}{(2n)!} + \frac{\lambda\rho_2 d_{2m}}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-2}(B_\lambda d_{1m})^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Подставляя (3.1)–(3.3) в (2.16) и полагая $i = 1$, $j = 2$, нетрудно показать, что

$$(P^\varepsilon_\lambda)_{12} = \frac{\varepsilon}{\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{B_\lambda d_{1m}}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} + \varepsilon^3 P^\varepsilon_{1\lambda},$$

где $\lim_{\varepsilon\to 0} P^\varepsilon_{1\lambda} < \infty$, если $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(\varepsilon) < \infty$. Отсюда следует, что после деления на ε уравнение (2.16) принимает вид

$$\frac{1-h}{A_\lambda} + \varepsilon^2 P^\varepsilon_{1\lambda} = 0,$$

где мы учли, что

$$\sum_{m=0}^{M-1} d_{1m} = 1 - h, \quad \frac{B_\lambda}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} = \frac{\lambda}{A_\lambda}.$$

Перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, считая, что последовательность корней $\lambda(\varepsilon)$ ограничена и $\lambda(\varepsilon) \to \lambda_1$. Тогда λ_1 есть корень уравнения $1/A_\lambda = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует конечных пределов последовательностей корней уравнения (2.16) при $\varepsilon \to 0$.

Далее, подставляя (3.1)–(3.3) в (2.17) и полагая сначала $i = j = 1$, а затем $i = j = 2$, получаем

$$(P_\lambda^\varepsilon)_{11} = 1 + \frac{\varepsilon^2 B_\lambda^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} d_{1m}^2 + \frac{\varepsilon^2 B_\lambda}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} \sum_{m=0}^{M-2} \sum_{n=m+1}^{M-1} \Big(\lambda \rho_2 d_{2m} + B_\lambda d_{1m} \sqrt{\rho_1 A_\lambda}\Big) d_{1n} + \varepsilon^4 P_{2\lambda}^\varepsilon,$$

$$(P_\lambda^\varepsilon)_{22} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \Big(B_\lambda^2 d_{1m}^2 + \frac{2\lambda\rho_2 B_\lambda d_{1m} d_{2m}}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}}\Big)$$
$$+ \frac{\varepsilon^2 B_\lambda}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} \sum_{m=0}^{M-2} \sum_{n=m+1}^{M-1} d_{1m} \Big(\lambda\rho_2 d_{2n} + B_\lambda d_{1n} \sqrt{\rho_1 A_\lambda}\Big) + \varepsilon^4 P_{3\lambda}^\varepsilon,$$

где $\lim_{\varepsilon\to 0} P_{2\lambda}^\varepsilon < \infty$ и $\lim_{\varepsilon\to 0} P_{3\lambda}^\varepsilon < \infty$, если $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda(\varepsilon) < \infty$. Тогда

$$(P_\lambda^\varepsilon)_{11} + (P_\lambda^\varepsilon)_{22} = 2 + \varepsilon^2 B_\lambda^2 \Big(\sum_{m=0}^{M-1} d_{1m}^2 + 2 \sum_{m=0}^{M-2} \sum_{n=m+1}^{M-1} d_{1m} d_{1n} \Big)$$
$$+ \frac{\varepsilon^2 \lambda \rho_2 B_\lambda}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} \Big(\sum_{m=0}^{M-1} d_{1m} d_{2m} + \sum_{m=0}^{M-2} \sum_{n=m+1}^{M-1} (d_{1m} d_{2n} + d_{1n} d_{2m}) \Big) + \varepsilon^4 P_{4\lambda}^\varepsilon$$
$$= 2 + \varepsilon^2 \Big(B_\lambda^2 (1-h)^2 + \frac{\lambda\rho_2 B_\lambda h(1-h)}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} \Big) + \varepsilon^4 P_{4\lambda}^\varepsilon, \quad P_{4\lambda}^\varepsilon = P_{2\lambda}^\varepsilon + P_{3\lambda}^\varepsilon.$$

Подставим

$$\cos\frac{\pi k}{N} = \cos\frac{\pi k \varepsilon}{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^{2n}}{(2n)!} \Big(\frac{\pi k}{L}\Big)^{2n}$$

и полученное выше разложение для $(P_\lambda^\varepsilon)_{11} + (P_\lambda^\varepsilon)_{22}$ в уравнение (2.17), а затем разделим обе его части на ε^2. В результате получаем

$$B_\lambda^2 (1-h)^2 + \frac{\lambda\rho_2 B_\lambda h(1-h)}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} + \Big(\frac{\pi k}{L}\Big)^2 + \varepsilon^2 \Big(P_{4\lambda}^\varepsilon - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-4}}{(2n)!} \Big(\frac{\pi k}{L}\Big)^{2n} \Big) = 0, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Теперь при фиксированном k перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, считая, что последовательность корней $\lambda_k(\varepsilon)$ сходится к конечному пределу λ_k. Тогда λ_k есть корень уравнения

$$B_\lambda^2 (1-h)^2 + \frac{\lambda\rho_2 B_\lambda h(1-h)}{\sqrt{\rho_1 A_\lambda}} + \Big(\frac{\pi k}{L}\Big)^2 = 0,$$

которое можно переписать как

$$\frac{(1-h)\lambda^2}{A_\lambda} (\rho_1(1-h) + \rho_2 h) + \Big(\frac{\pi k}{L}\Big)^2 = 0.$$

Последнее уравнение, в свою очередь, равносильно рациональному уравнению

$$\lambda^2 + \frac{b_1 \pi^2 k^2}{\rho_0 L^2 (1-h)} \lambda + \frac{a_1 \pi^2 k^2}{\rho_0 L^2 (1-h)} = \frac{\pi^2 k^2}{\rho_0 L^2 (1-h)} \Big(k_1 + \frac{2}{3}\Big) \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{\lambda + \gamma_n}, \tag{3.4}$$

где $\rho_0 = \rho_1(1-h) + \rho_2 h$.

Предельное поведение корней уравнений (2.15) при $\varepsilon \to 0$ исследуется аналогично и результат совпадает с только что полученным результатом, а именно: все конечные предельные точки последовательностей корней k-го уравнения (2.15) являются корнями рационального уравнения (3.4).

Обозначим через S множество корней уравнений (3.4) при $k \in \mathbb{N}$. Множество S имеет следующую структуру:

$$S = \bigcup_{j=1}^{N+2} \{\lambda_{jk}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{Nk} \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{(N+1)k}, \lambda_{(N+2)k} \in \mathbb{C},$$

где мы полагаем $N = 0$, если $d(t) \equiv 0$. Отметим, что число невещественных точек множества S зависит от того, является ли тензор b нулевым или нет. А именно, если $b = 0$, то найдется номер $M_1 \geq 1$ такой, что $\lambda_{(N+1)k}, \lambda_{(N+2)k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ для всех $k \geq M_1$. В этом случае S содержит бесконечное число как вещественных, так и комплексно-сопряженных точек. Если же $b \neq 0$, то найдется номер $M_2 \geq 1$ такой, что $\lambda_{(N+1)k}, \lambda_{(N+2)k} \in \mathbb{R}$ для всех $k \geq M_2$. Это означает, что точки множества S вещественны, кроме, возможно, их конечного числа. Более подробно о корнях уравнений вида (3.4), в том числе об их локализации и поведении при $k \to \infty$ можно узнать, например, из работ [19; 20].

Как мы видим из (3.4), для вычисления точек множества S нам требуется знать компоненты тензоров a, b и $d(t)$, плотности фаз ρ_1 и ρ_2, а также объемную долю жидкости h внутри полосы $0 < x_1 < L$. В то же время они не зависят от коэффициента вязкости жидкости η, числа M жидких слоев внутри периода и расстояний между слоями.

Согласно вышеизложенному, если $\lambda_k(\varepsilon)$ — корень уравнения (2.15) или (2.17) и при этом $\lambda(\varepsilon) \to \lambda_k < \infty$, то $\lambda_k = \lambda_{jk}$ при некотором $j = 1, \ldots, N+2$. Это означает, в частности, что все конечные точки последовательностей $\lambda(\varepsilon) \in S_\varepsilon$ принадлежат множеству S. Из теоремы Руше следует и обратное утверждение, а именно: для каждого корня λ_{jk} уравнения (3.4) существует последовательность корней k-го уравнения (2.15) или (2.17), сходящаяся к λ_{jk} при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, для любой точки $\lambda \in S$ найдется сходящаяся к ней при $\varepsilon \to 0$ последовательность $\lambda(\varepsilon) \in S_\varepsilon$. Учитывая приведенное ранее определение сходимости множеств по Хаусдорфу, мы приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Спектр S_ε сходится по Хаусдорфу при $\varepsilon \to 0$ к множеству корней S рациональных уравнений* (3.4).

В заключение следует отметить, что множество S представляет собой в точности спектр одномерных собственных колебаний усредненной среды, описывающей предельное поведение при $\varepsilon \to 0$ слоистой среды в случае, когда ее период содержит только один жидкий слой толщины εh (см. [15; 16]). Таким образом, для слоистых сред с любым числом жидких слоев $M \geq 1$ предел их спектров по Хаусдорфу зависит не от M, а от общей доли жидкости h и совпадает с “усредненным” спектром, соответствующим среде с $M = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.** Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 311 с.
2. **Жиков В.В.** Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 31–72.
3. **Жиков В.В.** О лакунах в спектре некоторых дивергентных эллиптических операторов с периодическими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, вып. 5. С. 34–58.
4. **Babych N.O., Kamotski I.V., Smyshlyaev V.P.** Homogenization of spectral problems in bounded domains with doubly high contrasts // Netw. Heterog. Media. 2008. Vol. 3, no. 3. P. 413–436. doi: 10.3934/nhm.2008.3.413 .
5. **Космодемьянский Д.А., Шамаев А.С.** Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 6. С. 75–114.
6. **Vlasov V.V., Gavrikov A.A., Ivanov S.A., Knyaz’kov D. Yu., Samarin V.A., Shamaev A.S.** Spectral properties of combined media // J. Math. Sci. 2010. Vol. 164, № 6. P. 948–963. doi: 10.1007/s10958-010-9776-5 .

7. **Cooper S.** Homogenisation and spectral convergence of a periodic elastic composite with weakly compressible inclusions // Applicable Analysis. 2014. Vol. 93, no. 7. P. 1401–1430. doi: 10.1080/00036811.2013.833327 .
8. **Cherednichenko K.D., Cooper S., Guenneau S.** Spectral analysis of one-dimensional high-contrast elliptic problems with periodic coefficients // Multiscale Model. Simul. 2015. Vol. 13, no. 1. P. 72–98. doi: 10.1137/130947106 .
9. **Leugering G., Nazarov S.A., Taskinen J.** The band-gap structure of the spectrum in a periodic medium of masonry type // Netw. Heterog. Media. 2020. Vol. 15, no. 4. P. 555–580. doi: 10.3934/nhm.2020014 .
10. **Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.** Инерционные и диссипативные свойства пористой среды, заполненной вязкой жидкостью // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 109–119.
11. **Молотков Л.А.** Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.
12. **Победря Б.Е.** Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
13. **Бреховских Л.М., Годин О.А.** Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
14. **Шамаев А.С., Шумилова В.В.** О спектре собственных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкой жидкости // Докл. РАН. 2013. Т. 448, № 1. С. 43–46.
15. **Шамаев А.С., Шумилова В.В.** Спектр одномерных собственных колебаний слоистой среды, состоящей из упругого материала и вязкой несжимаемой жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 4. С. 53–57.
16. **Шумилова В.В.** Спектр собственных колебаний слоистой среды, состоящей из материала Кельвина — Фойгта и вязкой несжимаемой жидкости // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 21–31. doi: 10.33048/semi.2020.17.002 .
17. **Ильюшин А.А., Победря Б.Е.** Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
18. **Шамаев А.С., Шумилова В.В.** Асимптотическое поведение спектра одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина — Фойгта // Тр. МИАН. 2016. Т. 295. С. 218–228. doi: 10.1134/S0371968516040130 .
19. **Власов В.В., Ву Дж., Кабирова Г.Р.** Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последействием // Современная математика. Фундамент. направления. 2010. Т. 35. С. 44–59.
20. **Шумилова В.В.** Спектральный анализ одного класса интегро-дифференциальных уравнений теории вязкоупругости // Проблемы мат. анализа. 2013. Т. 73. С. 167–172.

Поступила 4.08.2022
После доработки 31.10.2022
Принята к публикации 7.11.2022

Шумилова Владлена Валерьевна
д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
г. Москва
e-mail: v.v.shumilova@mail.ru

REFERENCES

1. Oleinik O.A. , Shamaev A.S., Yosifian G.A. *Mathematical problems in elasticity and homogenization.* Amsterdam: North-Holland, 1992, 397 p. ISBN: 9780080875477 . Original Russian text published in Oleinik O.A., Iosif'yan G.A., Shamaev A.S. *Matematicheskie zadachi teorii sil'no neodnorodnykh uprugikh sred.* Moscow: MGU Publ., 1990, 311 p.
2. Zhikov V.V. On an extension of the method of two-scale convergence and its applications. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 7, pp. 973–1014. doi: 10.1070/SM2000v191n07ABEH000491 .
3. Zhikov V.V. On spectrum gaps of some divergent elliptic operators with periodic coefficients. *St. Petersb. Math. J.*, 2005, vol. 16, no. 5, pp. 773–790. doi: 10.1090/S1061-0022-05-00878-2 .

4. Babych N.O., Kamotski I.V., Smyshlyaev V.P. Homogenization of spectral problems in bounded domains with doubly high contrasts. *Netw. Heterog. Media*, 2008, vol. 3, no. 3, pp. 413–436. doi: 10.3934/nhm.2008.3.413 .
5. Kosmodem'yanskii D.A., Shamaev A.S. Spectral properties of some problems in mechanics of strongly inhomogeneous media. *Mech. Solids*, 2009, vol. 44, no. 6, pp. 874–906. doi: 10.3103/S0025654409060077 .
6. Vlasov V.V., Gavrikov A.A., Ivanov S.A., Knyaz'kov D.Yu., Samarin V.A., Shamaev A.S. Spectral properties of combined media. *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 164, no. 6, pp. 948–963. doi: 10.1007/s10958-010-9776-5 .
7. Cooper S. Homogenisation and spectral convergence of a periodic elastic composite with weakly compressible inclusions. *Appl. Anal.*, 2014, vol. 93, no. 7, pp. 1401–1430. doi: 10.1080/00036811.2013.833327 .
8. Cherednichenko K.D., Cooper S., Guenneau S. Spectral analysis of one-dimensional high-contrast elliptic problems with periodic coefficients. *Multiscale Model. Simul.*, 2015, vol. 13, no. 1, pp. 72–98. doi: 10.1137/130947106 .
9. Leugering G., Nazarov S.A., Taskinen J. The band-gap structure of the spectrum in a periodic medium of masonry type. *Netw. Heterog. Media*, 2020, vol. 15, no. 4, pp. 555–580. doi: 10.3934/nhm.2020014 .
10. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Inertial and dissipative properties of a porous medium saturated with viscous fluid. *Mech. Solids*, 2005, vol. 40, no. 1, pp. 90–98.
11. Molotkov L.A. *Matrichnyi metod v teorii rasprostraneniya voln v sloistykh uprugikh i zhidkikh sredakh* [Matrix method in the theory of wave propagation in layered elastic and liquid media]. Leningrad: Nauka Publ., 1984, 201 p.
12. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow: MGU Publ., 1984, 336 p.
13. Brekhovskikh L.M., Godin O.A. *Akustika sloistykh sred* [Waves in layered media]. Moscow: Nauka Publ., 1973, 416 p.
14. Shamaev A.S., Shumilova V.V. The spectrum of natural vibrations in a medium composed of layers of elastic material and viscous fluid. *Dokl. Phys.*, 2013, vol. 58, no. 1, pp. 33–36. doi: 10.1134/S1028335813010047 .
15. Shamaev A.S., Shumilova V.V. Spectrum of one-dimensional natural vibrations of layered medium consisting of elastic material and viscous incompressible fluid, *Moscow Univ. Math. Bull.*. 2020, vol. 75, no. 4, pp. 172–176. doi: 10.3103/S0027132220040063 .
16. Shumilova V.V. Spectrum of natural vibrations of a layered medium consisting of a Kelvin–Voigt material and a viscous incompressible fluid. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, vol. 17, pp. 21–31 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2020.17.002 .
17. Il'yushin A.A., Pobedria B.E. *Osnovy matematicheskoi teorii termovyazkouprugosti* [Fundamentals of the mathematical theory of thermal viscoelasticity]. Moscow: Nauka Publ., 1970, 280 p.
18. Shamaev A.S., Shumilova V.V. Asymptotic behavior of the spectrum of one-dimensional vibrations in a layered medium consisting of elastic and Kelvin–Voigt viscoelastic materials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 295, pp. 202–212. doi: 10.1134/S0081543816080137 .
19. Vlasov V.V., Wu J., Kabirova G.R. Well-defined solvability and spectral properties of abstract hyperbolic equations with aftereffect. *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 170, no. 3, pp. 388–404. doi: 10.1007/s10958-010-0093-9 .
20. Shumilova V.V. Spectral analysis of integro-differential equations in viscoelasticity theory. *J. Math. Sci.*, 2014, vol. 196, no. 3, pp. 434–440. doi: 10.1007/s10958-014-1666-9 .

Received August 4, 2022
Revised October 31, 2022
Accepted November 7, 2022

Funding Agency: This study was carried out according a state assignment (state registration no. AAAA-A20-120011690138-6).

Vladlena Valerievna Shumilova, Dr. Phys.-Math. Sci., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia, e-mail: v.v.shumilova@mail.ru .

Cite this article as: V. V. Shumilova. The spectrum of one-dimensional eigenoscillations of two-phase layered media with periodic structure. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 250–261 .