ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.51

ОБ ОЦЕНКАХ ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев

В статье рассматриваются пространства периодических функций многих переменных, а именно, пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, пространство Никольского — Бесова $S^{\bar{r}}_{p,\tau,\theta}B$ и изучается порядок линейных поперечников класса $S^{\bar{r}}_{p,\tau,\theta}B$. Статья состоит из введения и двух разделов. Во введении даны определения, обозначения, которые используются в статье, и краткая информация о предшествующих результатах по рассматриваемому вопросу. В первом разделе приведены два известных утверждения, которые часто используются в доказательстве основных результатов. Во втором разделе установлены точные по порядку оценки линейных поперечников класса Никольского — Бесова $S^{\bar{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ по норме пространства $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ при различных соотношениях между параметрами $p, q, \tau_1, \tau_2, \theta$.

Ключевые слова: линейный поперечник, пространство Лоренца, класс Никольского — Бесова.

G. Akishev. On estimates of linear widths for classes of multivariate functions in the Lorentz space.

We consider spaces of periodic multivariate functions, namely, the Lorentz space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ and the Nikol'skii–Besov space $S^{\bar{r}}_{p,\tau,\theta}B$, and study the order of linear widths of the class $S^{\bar{r}}_{p,\tau,\theta}B$. The paper consists of the introduction and two sections. The introduction gives definitions, the notation used in the paper, and brief information on previous results on the issue under consideration. The first section contains two well-known statements that are often used in the proof of the main results. In the second section, order-exact estimates are established for the linear widths of the Nikol'skii–Besov class $S^{\bar{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ in the norm of the space $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ for different ratios of the parameters p, q, τ_1, τ_2, and θ.

Keywords: linear widths, Lorentz space, the Nikol'skii–Besov class.

MSC: 41A10, 41A25, 42A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-23-39

Введение

В статье будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{T}^m = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \le x_j < 2\pi;\ j = 1, \dots, m\}$ и $\mathbb{I}^m = [0,1)^m$. Далее $\mathbb{Z}^m$ и $\mathbb{Z}^m_+$ — m-кратные декартовы произведения множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_+$ соответственно.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, которые имеют 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left[\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 \left(f^*(t)\right)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1}dt\right]^{1/\tau}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad 1 \leqslant \tau < \infty,$$

конечна, где $f^*(y)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1; 2, гл. 1, разд. 3, с. 213–216]).

[1]Работа выполнена в рамках грантового финансирования Министерства образования и науки РК (Проект AP08855579).

Известно, что $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{p,\tau}^{*}=\left[\frac{\tau}{p}\int\limits_{0}^{1}\left(\int_{0}^{t}f^{*}(y)dy\right)^{\tau}t^{\tau(\frac{1}{p}-1)-1}dt\right]^{1/\tau}<+\infty,\quad 1<p<\infty,\quad 1\leqslant\tau<\infty,$$

и эта норма эквивалентна величине $\|f\|_{p,\tau}$ (см. [2, гл. 1, разд. 3, теорема 3.21]), т. е. существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что

$$C_1\|f\|_{p,\tau}\leqslant\|f\|_{p,\tau}^{*}\leqslant C_2\|f\|_{p,\tau}.$$

В случае $\tau=p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p=\|f\|_{p,p}$ (см. [3, гл. 1, разд. 1.1, с. 11; 2, гл. 5, разд. 3, с. 216]).

Введем следующие обозначения: $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}$ и $\langle\overline{y},\overline{x}\rangle=\sum_{j=1}^{m}y_jx_j$;

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})=\sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})}a_{\overline{n}}(f)e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где

$$\rho(\overline{s})=\left\{\overline{k}=(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{Z}^m\colon [2^{s_j-1}]\leqslant|k_j|<2^{s_j},\ j=1,\ldots,m\right\},$$

$[a]$ — целая часть числа a, $\overline{s}=(s_1,\ldots,s_m)$, $s_j=0,1,2,\ldots$, $\mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — множество всех функций $f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ таких, что $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}f\left(\overline{x}\right)dx_j=0,\ \ j=1,\ldots,m.$

Пусть l_p^m обозначает пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|\overline{x}\|_{l_p^m}=\left(\sum_{j=1}^{m}|x_j|^p\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

и $\|\overline{x}\|_{l_p^m}=\max_{j=1,\ldots,m}|x_j|,\ p=\infty$ и B_p^m — единичный шар в l_p^m.

Для чисел $1\leqslant p,q\leqslant\infty,\ n,m\in\mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^{mn}$ вводится норма

$$\|\overline{x}\|_{l_{p,q}^{n,m}}=\left(\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{k\in\Delta_s}|x_k|^p\right)^{q/p}\right)^{1/p},$$

если $1\leqslant p,q<\infty$, и

$$\|\overline{x}\|_{l_{p,q}^{n,m}}=\max_{s=1,\ldots,m}\left(\sum_{k\in\Delta_s}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

для $q=\infty$, где $\Delta_s=\{k\in\mathbb{N}\colon (s-1)n<k\leqslant sn\}$, $s=1,\ldots,m$. Это пространство $l_{p,q}^{n,m}$ будет нормированным пространством, и единичный шар в нем обозначается символом $B_{p,q}^{n,m}$. Отметим, что $\|\overline{x}\|_{l_{p,p}^{n,m}}=\|\overline{x}\|_{l_p^{nm}}$.

Для заданного $p\in[1,\infty)$ числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}$ принадлежит пространству l_p, если

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_p}=\left[\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}|a_{\overline{n}}|^p\right]^{1/p}<\infty,\quad 1\leqslant p<\infty,$$

и для $p=\infty$ $\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_\infty}=\sup_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}|a_{\overline{n}}|<\infty$.

Рассмотрим аналог класса Никольского — Бесова

$$\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}}B=\left\{f\in\mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)\colon \left\|\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_\theta}\leqslant 1\right\},\quad 1\leqslant\theta\leqslant\infty.$$

В случае $\tau=p$ класс $\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}}B$ совпадает с хорошо изученным классом Никольского — Бесова $S_{p,\theta}^{\overline{r}}B$ в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$ (см., например, [4; 5]), и этот класс в случае $\theta=\infty$ обозначается через $S_p^{\overline{r}}H$.

Для данного вектора $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ с положительными координатами γ_j положим $Q_n^{(\overline{\gamma})} = \cup_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle < n} \rho(\overline{s})$ и $S_n^{(\overline{\gamma})}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{k} \in Q_n^{(\overline{\gamma})}} a_{\overline{k}}(f) e^{i\langle \overline{k}, \overline{x} \rangle}$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по ступенчатому гиперболическому кресту. Множество тригонометрических полиномов $T_{n,\overline{\gamma}}(\overline{x}) = \sum_{\overline{k} \in Q_n^{(\overline{\gamma})}} b_{\overline{k}} e^{i\langle \overline{k}, \overline{x} \rangle}$ обозначается символом $\mathfrak{F}_n$.

Через $C(p, q, r, y)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные величины C_1, C_2, не зависящие от y, такие, что $C_1 \cdot A(y) \leq B(y) \leq C_2 \cdot A(y)$. Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B \geq C_1 A$ или $B \leq C_2 A$ часто будем писать $B >> A$ или $B << A$ соответственно.

Напомним определение линейного поперечника множества, который был введен В. М. Тихомировым [6].

О п р е д е л е н и е. Пусть W — множество в банаховом пространстве X. Тогда линейным поперечником множества W в пространстве X (обозначается $\lambda_M(W, X)$) называется величина

$$\lambda_M(W, X) = \inf_A \sup_{f \in W} \|f - Af\|_X,$$

где inf берется по всем действующим в X линейным операторам A, размерность области значений которых не превышает $M \in \mathbb{N}$.

Оценкам и в некоторых случаях вычислению линейного поперечника класса Соболева W_p^r функций одной переменной посвящены работы В. М. Тихомирова [6], Р. С. Исмагилова [7], В. Е. Майорова [8], К. Хеллиг [9] и др.

В многомерном случае оценки линейных поперечников для классов Соболева W_p^r, Никольского $\mathbb{S}_p^r H$, Бесова $\mathbb{S}_{p,\theta}^r B$ в пространстве $L_q(\mathbb{T}^m)$ при различных соотношениях между параметрами $1 \leq p, q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ получили В. Н. Темляков [10], Э. М. Галеев [11; 12], А. Д. Изаак [13], А. С. Романюк [14–18], Д. Б. Базарханов [19], Ю. В. Малыхин и К. С. Рютин [20] (более подробную библиографию см. в [21; 22]).

По-видимому, оценки поперечников Колмогорова, Гельфанда и линейного поперечника изотропных классов Бесова $B_{p,\theta}^{\lambda}(\Omega)$, определенного в пространстве Лебега $L_p(\Omega)$, в метрике пространства Лоренца впервые установил Г. Кёниг [23], где Ω — некоторая область в $\mathbb{R}^m$. В частности, в [23, теорема 1] для линейного поперечника класса $B_{p,\theta}^{\lambda}(\Omega)$ в пространстве Лоренца $L_{q,\tau}(\Omega)$ получены следующие оценки:

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^{\lambda}(\Omega), L_{q,\tau}(\Omega)) << M^{-\frac{\lambda}{m} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

при $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau < \infty$, $\lambda > m(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, $1 \leq \theta \leq \infty$;

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^{\lambda}(\Omega), L_{q,\tau}(\Omega)) \asymp M^{-\frac{\lambda}{m}} (\ln M)^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{p}}$$

для $1 < \tau \leq p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Цель настоящей статьи найти оценки линейного поперечника класса $\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}} B$ в пространстве $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

В первом разделе сформулированы некоторые известные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов. Основные результаты статьи сформулированы и доказаны во втором разделе (см. теоремы 2.1, 2.2 и 2.5). В частности, при $\tau_1 = p$ и $\tau_2 = q$ теоремы 2.1–2.3 и 2.5 совпадают при $\theta = \infty$ с утверждениями 3–6 теоремы Э. М. Галеева [12], а для $1 \leqslant \theta < \infty$ — с результатами А. С. Романюка [14, теорема 1; 15, теоремы 3, 4; 18, теоремы 8, 9], и в общем случае их распространяют на пространства Лоренца.

1. Вспомогательные утверждения

В этом разделе приведем некоторые известные утверждения, которые мы часто будем использовать в доказательстве основных результатов.

Пусть $\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m$ и $\Im(\rho(\overline{s}))$ — множество функций вида $f(\overline{x}) = \sum\limits_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}} e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$.

Лемма 1.1 [11, лемма 4; 12, лемма 1]. *Пусть $\overline{s} \in \mathbb{N}^m$, $f \in \Im(\rho(\overline{s}))$, $M_{\overline{s}} \in \mathbb{Z}_+$, $M_{\overline{s}} \leqslant 2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle} = \prod_{j=1}^m 2^{s_j}$. Тогда при $1 < p, q < +\infty$ существует линейный оператор $\Lambda_{M_{\overline{s}}} : \Im(\rho(\overline{s})) \to \Im(\rho(\overline{s}))$, размерность области значений которого не превышает $M_{\overline{s}}$, и такой, что*

$$\|f - \Lambda_{M_{\overline{s}}} f\|_q \asymp \lambda_{M_{\overline{s}}}\big(B_p^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}\big) 2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_p.$$

Лемма 1.2 [11, лемма 3; 12, теорема 3]. *Между пространством тригонометрических полиномов вида $f(\overline{x}) = \sum_{\overline{k}\in\rho(\overline{s})} c_{\overline{k}} e^{i\langle\overline{k},\overline{x}\rangle}$ и пространством $\mathbb{R}^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}$ существует изоморфизм, сопоставляющий функции f вектор $\delta_{\overline{s}} f^j = \big\{f_n(\overline{\tau}_j)\big\} \in \mathbb{R}^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}$,*

$$f_{\overline{n}}(\overline{x}) = \sum_{\operatorname{sign} k_l = \operatorname{sign} n_l} c_{\overline{k}} e^{i\langle\overline{k},\overline{x}\rangle}, \quad l = 1, \ldots, m,$$

$\overline{\tau}_j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \ldots, \pi 2^{2-s_m} j_m)$, $j_i = 1, \ldots, 2^{s_i - 1}$, *и при этом имеет место соотношение*

$$\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_p \asymp \Big(2^{-\langle\overline{s},\overline{1}\rangle} \sum_{j=1}^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}} |\delta_{\overline{s}} f^j|^p\Big)^{1/p}, \quad p \in (1, \infty).$$

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть*

$$1 < p < 2 \leqslant q < p' = \frac{p}{p-1}, \quad 1 < \tau_1, \tau_2 < \infty, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty,$$

$$r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m \ \ и \ \ r_1 > \frac{1}{p}.$$

Тогда

$$\lambda_M\big(\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}} B, \ \ L_{q,\tau_2}\big) \asymp \Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} (\log M)^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения $\gamma_j = \Big(r_j - \dfrac{1}{p}\Big)/\Big(r_1 - \dfrac{1}{p}\Big)$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда $\gamma_1 = \ldots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant \gamma_m$. Вектору $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ сопоставим вектор $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$ такой, что $\gamma_j' = \gamma_j$ для $j = 1, \ldots, \nu$ и $1 < \gamma_j' < \gamma_j$ при $j = \nu+1, \ldots, m$.

Пусть $f \in \mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}} B$. Так как по условию теоремы $q < p' = \dfrac{p}{p-1}$, выберем число $q_0 \in (q, p')$. Известно, что $L_{q_0}(\mathbb{T}^m) \subset L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_{q,\tau_2} << \|f\|_{q_0}$ (см. [1]). Так как $r_j > \dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q_0}$, $j = 1, \ldots, m$, то $\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}} B \subset L_{q_0}(\mathbb{T}^m)$ (см. [24]).

Для натурального числа M выберем число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, и для каждого $\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m$ поставим в соответствие число $M_{\overline{s}} = 2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}$, если $\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle \leqslant n$, и $M_{\overline{s}} = [2^{n+\alpha(n-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle)}]$, если $\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle > n$, где α — некоторое положительное число, которое будет выбрано в процессе доказательства, и $[a]$ — целая часть числа a.

Пользуясь леммами В и Г из [10], нетрудно убедиться, что

$$\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} M_{\overline{s}} \leqslant \sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle\leqslant n} 2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle} + 2^{n(1+\alpha)} \sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle\geqslant n} 2^{-\alpha\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle} \leqslant C 2^n n^{\nu-1} \leqslant CM.$$

Для функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ рассмотрим линейный оператор, действующий по формуле

$$(\Lambda_M f)(\overline{x}) = \sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \Lambda_{M_{\overline{s}}} \delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}),$$

где операторы $\Lambda_{M_{\overline{s}}}$ построены согласно лемме 1.1.

Теперь, применяя к функции $f - \Lambda_M f \in L_{q_0}(\mathbb{T}^m)$ неравенство $\|f\|_{q,\tau_2} << \|f\|_{q_0}$ и пользуясь теоремой Литтлвуда — Пэли в пространстве Лебега $L_{q_0}(\mathbb{T}^m)$ (см. [3, гл. 1, п. 1.5.2]), имеем

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << \|f - \Lambda_M f\|_{q_0} \leqslant C \left\| \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle \geqslant n} |\delta_{\overline{s}}(f) - \Lambda_{M_{\overline{s}}} \delta_{\overline{s}}(f)|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{q_0}, \tag{2.1}$$

где положительное число C не зависит от чисел M, n. Так как $2 < q_0$, то в силу неравенства Минковского и (2.1) справедливо соотношение

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << \Big(\sum_{\langle \bar{s}, \gamma' \rangle > n} \|\delta_{\overline{s}}(f) - \Lambda_{M_{\overline{s}}} \delta_{\overline{s}}(f)\|^2_{q_0} \Big)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Так как $1 < p \leqslant 2 < q < q_0 < p'$, то выберем число $p_0' \in (q_0, p')$. Тогда число $p_0 = \dfrac{p_0'}{p_0' - 1} > p$. Поэтому согласно лемме 1.1 из (2.2) получим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n} \lambda^2_{M_{\overline{s}}} \big(B^{2^{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle}}_{p_0}, l^{2^{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle}}_{q_0} \big) 2^{2\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle (\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0})} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^2_{p_0} \Big)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Поскольку $q_0 < p_0'$ и $p_0 = \dfrac{p_0'}{p_0' - 1}$, то $\dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{q_0} > 1$. Поэтому ввиду теоремы 2 [25] (см. также [26]) имеем

$$\lambda_{M_{\bar{s}}} \big(B^{2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle}}_{p_0}, l^{2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle}}_{q_0} \big) << 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{q_0}} M_{\bar{s}}^{-1/2}. \tag{2.4}$$

Теперь из неравенств (2.3) и (2.4) получим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n} 2^{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle \frac{2}{p_0}} M^{-1}_{\overline{s}} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^2_{p_0} \Big)^{1/2}.$$

Так как $p < p_0$, то, применяя неравенство разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца (см. [27, лемма 6]), отсюда выводим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n} 2^{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle \frac{2}{p}} M^{-1}_{\overline{s}} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^2_{p,\tau_1} \Big)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Учитывая значения чисел $M_{\overline{s}} = [2^{n + \alpha(n - \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle)}]$ для $\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n$, будем иметь

$$J_1(n) := \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n} 2^{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle \frac{2}{p}} M^{-1}_{\overline{s}} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^2_{p,\tau_1} \Big)^{1/2} \leqslant 2 \cdot 2^{-\frac{n}{2}(1+\alpha)} \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n} 2^{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle \frac{2}{p}} 2^{\alpha \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^2_{p,\tau_1} \Big)^{1/2}$$

$$\leqslant 2 \cdot 2^{-\frac{n}{2}(1+\alpha)} \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle (r_1 - \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{2}) 2} (2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1})^2 \Big)^{1/2}. \tag{2.6}$$

Пусть $1 \leqslant \theta \leqslant 2$. Выберем положительное число α удовлетворяющее неравенству $r_1 - \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{2} > 0$. Тогда, применяя неравенство Йенсена (см. [3, гл. 3, п. 3.3]) и учитывая, что $\gamma_j' \leqslant \gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$, из (2.6) получим

$$J_1(n) \leqslant 2 \cdot 2^{-\frac{n}{2}(1+\alpha)} \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle (r_1 - \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{2}) \theta} (2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1})^{\theta} \Big)^{1/\theta}$$

$$\leqslant 2\cdot 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}\Big(\sum_{\langle \overline{s},\overline{\gamma}'\rangle>n} 2^{\langle \overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta}. \tag{2.7}$$

Теперь из (2.5) и (2.7) следует, что $\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << 2^{-n(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$ для любой функции $f\in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ в случае $1\leqslant\theta\leqslant 2$. Значит, учитывая, что $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, отсюда выводим

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) << 2^{-n(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\asymp M^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\log M)^{(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}$$

в случае $1\leqslant\theta\leqslant 2$.

Пусть $2<\theta\leqslant\infty$. Тогда, применяя неравенство Гельдера при $\eta=\dfrac{\theta}{2}$ и $\dfrac{1}{\eta}+\dfrac{1}{\eta'}=1$, из (2.6) имеем

$$J_1(n)\leqslant 2\cdot 2^{-\frac{n}{2}(1+\alpha)}\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle \overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta}\Big(\sum_{\langle \overline{s},\overline{\gamma}'\rangle>n} 2^{-\langle \overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2})2\eta'}\Big)^{1/(2\eta')}.$$

Так как $r_1-\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{2}>0$ и $\gamma_j'=\gamma_j$ для $j=1,\ldots,\nu$, а $\gamma_j'<\gamma_j$ для $j=\nu+1,\ldots,m$, то по лемме В из [10] отсюда получим

$$J_1(n) << 2^{-\frac{n}{2}(1+\alpha)}2^{-n(r_1-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2})}n^{(\nu-1)/(2\eta')}\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle \overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta}$$

$$=C2^{-n(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle \overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta} \tag{2.8}$$

в случае $2<\theta\leqslant\infty$.

Теперь из (2.5) и (2.8) следует, что $\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << 2^{-n(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$ для любой функции $f\in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ в случае $2<\theta\leqslant\infty$. Значит, учитывая, что $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, отсюда имеем

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) << 2^{-n(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

$$\asymp M^{-\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\left(\log M\right)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)}\left(\log M\right)^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

в случае $2<\theta\leqslant\infty$.

Этим оценка сверху доказана.

Докажем оценку снизу. Так как $1<p\leqslant 2<q<\infty$, то существуют числа p_0,q_0 такие, что $1<p_0<p\leqslant 2<q_0<q<\infty$. Известно, что $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)\subset L_{q_0}(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_{q_0} << \|f\|_{q,\tau_2}$ для функции $f\in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ (см. [1]). Поэтому

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q_0}\right) \tag{2.9}$$

для $1<p\leqslant 2<q_0<q<\infty$, $1<\tau_1,\tau_2<\infty$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$.

Так как $1<p_0<p<\infty$, то согласно неравенству разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца (см. [27, лемма 6]) получим

$$\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1} << \prod_{j=1}^{m}2^{s_j(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0},\quad 1<\tau_1<\infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle \overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta} << \sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(r_j+\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0}^{\theta}.$$

Таким образом, $C_0\mathbb{S}^{\overline{\rho}}_{p_0,\theta}B \subset \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ для некоторого положительного числа C_0, где $\overline{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$, $\rho_j = r_j + \dfrac{1}{p_0} - \dfrac{1}{p}$, $j = 1, \ldots, m$. Значит, из (2.9) следует

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{\rho}}_{p_0,\theta}B,\ \ L_{q_0}\right) \qquad (2.10)$$

для $1 < p \leqslant 2 < q_0 < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. В [16] доказано, что

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{\rho}}_{p_0,\theta}B,\ \ L_{q_0}\right) >> \left(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\right)^{\rho_1 - \frac{1}{p_0} + \frac{1}{2}} (\log M)^{(\nu-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}$$

при $\rho_1 > \dfrac{1}{p_0}$. Так как $\rho_1 = r_1 + \dfrac{1}{p_0} - \dfrac{1}{p}$, то отсюда и из (2.10) получим

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \left(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log M)^{(\nu-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}$$

в случае $r_1 > \dfrac{1}{p}$. □

Теорема 2.2. *Пусть*

$$1 < p \leqslant 2, \quad p' = \frac{p}{p-1} < q < \infty, \quad 1 < \tau_1, \quad \tau_2 < \infty,$$

$$1 \leqslant \theta \leqslant \infty, \quad r_1 = \ldots r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m \ \ \text{и} \ \ r_1 > \frac{1}{q'}.$$

Тогда

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) \leqslant C\left(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\right)^{r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}} (\log M)^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Оценка точна по порядку в случаях

a) $1 < p < 2$ *и* $2 \leqslant \theta \leqslant \tau_2 < \infty$ *или* $1 < \tau_2 < \theta \leqslant \infty$,

b) $1 < p < 2$ *и* $2 \leqslant \tau_1 < \infty$ *при* $2 \leqslant \theta \leqslant \tau_2 < \infty$ *или* $1 < \tau_2 < \theta \leqslant \infty$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$. Так как $r_1 > 1 - \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$, то $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B \subset L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ (см. [24, с. 23]). Выберем число p_0' такое, что $p' < p_0' < q$. Тогда

$$\frac{1}{p_0} = 1 - \frac{1}{p_0'} > 1 - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p},$$

т. е. $1 < p_0 < p$. Так как $\dfrac{1}{p'} > \dfrac{1}{q}$ и $\dfrac{1}{p'} > \dfrac{1}{p_0'}$, то $r_1 > 1 - \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p_0'} - \dfrac{1}{q}$. Следовательно, $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B \subset L_{p_0'}(\mathbb{T}^m)$ (см. [24, с. 23]). Поэтому согласно теореме 3.1 из [24] имеем

$$\|f\|_{q,\tau_2} << \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_0'} - \frac{1}{q})\tau_2}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p_0'}\Big)^{1/\tau_2} \qquad (2.11)$$

для функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$.

Введем обозначения $\gamma_j = \dfrac{r_j + 1/q - 1}{r_1 + 1/q - 1}$, $j = 1, \ldots, m$, $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. Тогда $1 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant \gamma_m$. Известно, что существуют числа γ_j', $j = 1, \ldots, m$ такие, что $\gamma_j' = \gamma_j = 1$ для $j = 1, \ldots, \nu$ и $1 < \gamma_j' < \gamma_j$ при $j = \nu+1, \ldots, m$. Положим $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$.

Для натурального числа M выберем число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, и для каждого $\overline{s} \in \mathbb{Z}^m_+$ поставим в соответствие число $M_{\overline{s}} = 2^{\langle \overline{s}, \overline{1}\rangle}$, если $\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle \leqslant n$, и $M_{\overline{s}} = [2^{n + \alpha(n - \langle \overline{s}, \overline{\gamma}\rangle)}]$, если $\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle > n$, где $\alpha \in \left(0, r_1 + \dfrac{1}{q} - 1\right)$.

Для функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ рассмотрим линейный оператор, действующий по формуле

$$(\Lambda_M f)(\overline{x}) = \sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \Lambda_{M_{\overline{s}}}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}),$$

где операторы $\Lambda_{M_{\overline{s}}}$ построены согласно лемме 1.1. Применяя к функции $f-\Lambda_M f \in L_{p_0'}(\mathbb{T}^m)$ неравенство (2.11), получим

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << \Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle>n}\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_0'}-\frac{1}{q})\tau_2}\|\delta_{\overline{s}}(f)-\Lambda_{M_{\overline{s}}}\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p_0'}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{2.12}$$

Далее, пользуясь леммой 1.1, при $q=p_0'$ имеем

$$\|\delta_{\overline{s}}(f)-\Lambda_{M_{\overline{s}}}\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0'} << \lambda_{M_{\overline{s}}}\Big(B^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}_{p_0}, l^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}_{p_0'}\Big)\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_0'})}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0}.$$

Поэтому из неравенства (2.12) выводим

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << \Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle>n}\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q})\tau_2}\lambda^{\tau_2}_{M_{\overline{s}}}\Big(B^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}_{p_0}, l^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}_{p_0'}\Big)\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p_0}\Big)^{1/\tau_2}.$$

Далее, применяя теорему 2 из [25] при $q=p_0'$, отсюда получим

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << \Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle>n}\prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{q})\tau_2}M_{\overline{s}}^{-\frac{\tau_2}{2}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p_0}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{2.13}$$

Так как $p_0<p$, то $\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0} << \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}$ (см. [1]). Поэтому из (2.13) следует, что

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << \Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle>n}\prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{q})\tau_2}M_{\overline{s}}^{-\frac{\tau_2}{2}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{2.14}$$

Теперь, подставляя значения $M_{\overline{s}}$, получим

$$\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle>n}\prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{q})\tau_2}M_{\overline{s}}^{-\frac{\tau_2}{2}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}$$

$$<< 2^{-\frac{n}{2}(1+\alpha)}\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle>n}\prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{q})\tau_2}2^{\frac{\alpha}{2}\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\tau_2}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}$$

$$= C2^{-\frac{n}{2}(1+\alpha)}\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle>n}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1+\frac{1}{q}-1-\frac{\alpha}{2})\tau_2}(2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1})^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{2.15}$$

Из неравенств (2.14) и (2.15) следует, что

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << 2^{-\frac{n}{2}(1+\alpha)}\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle>n}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1+\frac{1}{q}-1-\frac{\alpha}{2})\tau_2}(2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1})^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2} \tag{2.16}$$

для функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$, $1<\tau_1,\tau_2<\infty$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$.

Пусть $1 \leqslant \theta \leqslant \tau_2$. Тогда, применяя неравенство Йенсена (см. [3, гл. 3, п. 3.3]) и учитывая, что $r_1 + \dfrac{1}{q} - 1 - \dfrac{\alpha}{2} > 0$, из (2.16) имеем

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << 2^{-\frac{n}{2}(1+\alpha)} 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-1-\frac{\alpha}{2})} \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n} (2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1})^{\tau_2} \Big)^{1/\tau_2}$$

$$<< 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \Big(\sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m} (2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1})^{\theta} \Big)^{1/\theta}$$

для функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Следовательно, учитывая, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, отсюда выводим

$$\lambda_M \Big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ L_{q,\tau_2} \Big) << 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} << \Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M} \Big)^{r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$$

в случае $1 \leqslant \theta \leqslant \tau_2$.

Пусть $\tau_2 < \theta \leqslant \infty$. Тогда, применяя неравенство Гельдера при $\eta = \dfrac{\theta}{\tau_2}$, $\dfrac{1}{\eta} + \dfrac{1}{\eta'} = 1$ и лемму В из [10], будем иметь

$$\Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle (r_1+\frac{1}{q}-1-\frac{\alpha}{2})\tau_2} (2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1})^{\tau_2} \Big)^{1/\tau_2}$$

$$<< \Big(\sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m} (2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1})^{\theta} \Big)^{1/\theta} \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle > n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle (r_1+\frac{1}{q}-1-\frac{\alpha}{2})\tau_2 \eta'} \Big)^{1/(\tau_2 \eta')}$$

$$<< 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-1-\frac{\alpha}{2})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})} \Big(\sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m} (2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1})^{\theta} \Big)^{1/\theta}$$

для функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$, $1 < \tau_1 < \infty$. Поэтому из неравенства (2.16) получим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau_2} << 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})}$$

для функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$, $1 < \tau_1 < \infty$.

Следовательно, учитывая, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, отсюда выводим

$$\lambda_M \Big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ L_{q,\tau_2} \Big) << 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})} << \Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M} \Big)^{r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})}$$

в случае $\tau_2 < \theta \leqslant \infty$, $1 < \tau_1 < \infty$.

Оценка сверху доказана.

Оценки снизу величины $\lambda_M \Big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ L_{q,\tau_2} \Big)$ достаточно доказать при $\nu = m$. Для числа $M \in \mathbb{N}$ выберем натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{m-1}$. Далее $S_n = \{\overline{s} = (s_1, \ldots, s_m) \colon \langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n\}$, и для краткости записи количество элементов множества S_n обозначим символом $|S_n|$.

Пусть $1 \leqslant \theta \leqslant \tau_2$. Если $1 < p < 2$, то $L_2(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m) \subset$ и $\|f\|_{p,\tau_1} << \|f\|_2$ для функции $f \in L_2(\mathbb{T}^m)$ (см. [1]). Поэтому $C_0 \mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B := C_0 \mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,2,\theta}B \subset \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ для некоторого числа $C_0 > 0$. Следовательно,

$$\lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ L_{q,\tau_2} \right) >> \lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B,\ L_{q,\tau_2} \right) \tag{2.17}$$

для $1 < p < 2$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$.

Если $1 < \tau_2 \leqslant q < \infty$, то известно, что $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_q(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_q << \|f\|_{q,\tau_2}$ для функции $f \in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ (см. [1]). Значит,

$$\lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B,\ \ L_q\right) \tag{2.18}$$

при $1 < \tau_2 \leqslant q < \infty$. В [15] доказана оценка

$$\lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B,\ \ L_q\right) >> \left(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\right)^{r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \tag{2.19}$$

в случае $2 \leqslant \theta \leqslant q < \infty$. Теперь из неравенств (2.17)–(2.19) вытекает, что

$$\lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \left(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\right)^{r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \tag{2.20}$$

в случае $2 \leqslant \theta \leqslant q < \infty$ и $1 < \tau_2 \leqslant q < \infty$.

Если $p = 2$, то $L_2(\mathbb{T}^m) \subset L_{2,\tau_1}(\mathbb{T}^m) \subset$ и $\|f\|_{2,\tau_1} << \|f\|_2$ при $2 \leqslant \tau_1 < \infty$ для функции $f \in L_2(\mathbb{T}^m)$ (см. [1]). Поэтому $C_0\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B \subset \mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\tau_1,\theta}B$ для некоторого числа $C_0 > 0$. Следовательно,

$$\lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) \tag{2.21}$$

в случае $p = 2$ и $2 \leqslant \tau_1 < \infty$, $1 < \tau_2 < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$.

Если $1 < \tau_2 \leqslant q < \infty$, то известно, что $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_q(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_q << \|f\|_{q,\tau_2}$ для функции $f \in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ (см. [1]). Значит,

$$\lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B,\ \ L_q\right) \tag{2.22}$$

при $1 < \tau_2 \leqslant q < \infty$. Таким образом, из (2.21) и (2.22) имеем, что

$$\lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B,\ \ L_q\right) \tag{2.23}$$

в случае $p = 2$ и $2 \leqslant \tau_1 < \infty$, $1 < \tau_2 \leqslant q < \infty$. Теперь из неравенств (2.19) и (2.23) получим

$$\lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \left(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\right)^{r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$$

и в случае $p = 2$, и $2 \leqslant \tau_1 < \infty$, $1 < \tau_2 \leqslant q < \infty$, $2 \leqslant \theta \leqslant q < \infty$. Этим и соотношением (2.20) оценка снизу доказана для $1 < \tau_2 \leq q < \infty$.

Пусть $q < \tau_2 < \infty$. По условию теоремы $2 < q < \infty$. Тогда по лемме 1.3 из [24] для функции $g \in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \cap \mathfrak{F}_n$ выполняется неравенство

$$\|g\|_{q,\tau_2} >> \left(\sum_{\overline{s}\in S_n} \|\delta_{\overline{s}}(g)\|^{\tau_2}_{q,\tau_2}\right)^{1/\tau_2}. \tag{2.24}$$

Так как $q < \tau_2 < \infty$, то $L_{\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ (см. [1]). Поэтому согласно неравенству разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца (см. [27]) справедливо соотношение $\|\delta_{\overline{s}}(g)\|_{\tau_2} << \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{q}-\frac{1}{\tau_2})}\|\delta_{\overline{s}}(g)\|_{q,\tau_2}$. Следовательно, из (2.24) выводим

$$\|g\|_{q,\tau_2} >> \left(\sum_{\overline{s}\in S_n} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(\frac{1}{q}-\frac{1}{\tau_2})\tau_2} \|\delta_{\overline{s}}(g)\|^{\tau_2}_{\tau_2}\right)^{1/\tau_2}.$$

Далее, применяя лемму 1.2 для полинома $\delta_{\overline{s}}(g)$, отсюда получим

$$\|g\|_{q,\tau_2} >> \left(\sum_{\overline{s}\in S_n} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(\frac{1}{q}-\frac{1}{\tau_2})\tau_2} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j} \sum_{j=1}^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}} |\delta_{\overline{s}}g^j|^{\tau_2}\right)^{1/\tau_2} = C2^{-\frac{n}{q}}\left(\sum_{\overline{s}\in S_n} \sum_{j=1}^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}} |\delta_{\overline{s}}g^j|^{\tau_2}\right)^{1/\tau_2} \tag{2.25}$$

в случае $q < \tau_2$. По определению линейного поперечника и в силу теоремы Литтлвуда — Пэли в пространстве Лоренца (см. [24, теорема 1.1]) будем иметь

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,2}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,2}B\cap\mathfrak{F}_n,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> \lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,2}B\cap\mathfrak{F}_n,\ \ L_{q,\tau_2}\cap\mathfrak{F}_n\right). \qquad (2.26)$$

Пусть $f\in L_2\cap\mathfrak{F}_n$. Тогда в силу леммы 1.2

$$\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2^2\Big)^{1/2}\asymp 2^{nr_1}\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2^2\Big)^{1/2}\asymp 2^{n(r_1-\frac12)}\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\sum_{j=1}^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}f^j|^2\Big)^{1/2}. \qquad (2.27)$$

Отсюда следует, что если для $f\in L_2\cap\mathfrak{F}_n$ выполнено неравенство

$$\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\sum_{j=1}^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}f^j|^2\Big)^{1/2} << 2^{-n(r_1-\frac12)}, \qquad (2.28)$$

то $C_0f\in\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,2}B\cap\mathfrak{F}_n$ при некотором $C_0>0$. Это означает, что шару $C_0^{-1}2^{-n(r_1-\frac12)}B_2^{2^n|S_n|}$ радиуса $C_0^{-1}2^{-n(r_1-\frac12)}$ из пространства $l_2^{2^n|S_n|}$ согласно соотношениям (2.27) и (2.28) сопоставляется единичный шар из $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,2}B\cap\mathfrak{F}_n$. Кроме того, если $g\in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)\cap\mathfrak{F}_n$, $2<q<\infty$, $2<\tau_2<\infty$, то выполняется (2.24). Таким образом, из (2.25)–(2.28) имеем

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,2}B, L_{q,\tau_2}\right) >> 2^{-n(r_1+\frac1q-\frac12)}\lambda_M(B_2^{2^n|S|}, l_{\tau_2}^{2^n|S_n|}) \qquad (2.29)$$

в случае $2<q<\tau_2<\infty$.

Известно, что (см. [6, с. 206])

$$\lambda_M(B_2^{2^n|S_n|}, l_q^{2^n|S_n|}) = \lambda_M(B_{q'}^{2^n|S_n|}, l_2^{2^n|S_n|}), \qquad (2.30)$$

где $\dfrac1q+\dfrac1{q'}=1$, $1<q<\infty$. По теореме 2 из [26]

$$\lambda_M(B_{\tau_2'}^{2^n|S_n|}, l_2^{2^n|S_n|}) >> \min\{(2^n|S_n|)^{1/\tau_2'}M^{-1/2}\}\sqrt{1-\frac{M}{2^n|S_n|}}$$

$$>> \min\{(2^n|S_n|)^{1/2}M^{-1/2}\}\sqrt{1-\frac{M}{2^n|S_n|}}\geqslant C_1>0.$$

Поэтому, заменяя в (2.30) q на τ_2, получаем

$$\lambda_M(B_2^{2^n|S_n|}, l_{\tau_2}^{2^n|S_n|}) >> C_1. \qquad (2.31)$$

Теперь из оценок (2.29) и (2.31) следует, что

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,2}B, L_{q,\tau_2}\right) >> 2^{-n(r_1+\frac1q-\frac12)} \qquad (2.32)$$

в случае $2<q<\tau_2<\infty$.

Если $2\leqslant\theta\leqslant\infty$, то $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,2}B\subset\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B$. Поэтому

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B, L_{q,\tau_2}\right) >> \lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,2}B, L_{q,\tau_2}\right). \qquad (2.33)$$

Теперь, учитывая, что $M\asymp 2^nn^{m-1}$, из (2.17), (2.32), (2.33) получим

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B, L_{q,\tau_2}\right) >> 2^{-n(r_1+\frac1q-\frac12)}\asymp\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1+\frac1q-\frac12}$$

в случае $2 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $2 < q < \tau_2 < \infty$. Этим оценка снизу в теореме 2.2 доказана для $2 \leqslant \theta \leqslant \tau_2 < \infty$.

Пусть $1 < \tau_2 < \theta \leqslant \infty$. Так как $1 < p < 2$, то из неравенства (2.17) следует, что

$$\lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B, L_{q,\tau_2}\right) >> \lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B \cap \mathfrak{F}_n, L_{q,\tau_2} \cap \mathfrak{F}_n\right). \tag{2.34}$$

Пусть $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\theta}B$. Тогда в силу леммы 1.2 имеем (см. доказательство (2.27))

$$\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n} 2^{\langle \overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2^\theta\Big)^{1/\theta} \asymp 2^{nr_1}\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2^\theta\Big)^{1/\theta} \asymp 2^{n(r_1-1/2)}\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\Big(\sum_{j=1}^{2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}f^j|^2\Big)^{\theta/2}\Big)^{1/\theta} \tag{2.35}$$

для $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Для числа $\lambda \in (q,\infty)$ и функции $g \in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \cap \mathfrak{F}_n$ по теореме 3.2 из [24] при $\theta = \lambda$ и $\tau = \tau_2$ справедливо соотношение

$$\|g\|_{q,\tau_2} >> \Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{q})\tau_2}\|\delta_{\overline{s}}(g)\|_\lambda^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}.$$

Далее, применяя лемму 1.2 для полинома $\delta_{\overline{s}}(g)$, отсюда получим

$$\|g\|_{q,\tau_2} >> \Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{q})\tau_2}\Big(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j}\sum_{j=1}^{2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j|^\lambda\Big)^{\tau_2/\lambda}\Big)^{1/\tau_2}$$

$$= C2^{-\frac{n}{q}}\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\Big(\sum_{j=1}^{2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j|^\lambda\Big)^{\tau_2/\lambda}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{2.36}$$

Из неравенств (2.34)–(2.36) следует, что

$$\lambda_M \left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B, L_{q,\tau_2}\right) >> 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}\lambda_M(B^{2^n|S|}_{2,\theta}, l^{2^n|S|}_{\lambda,\tau_2}) \tag{2.37}$$

для $1 < q < \infty$, $1 < \tau_2 < \theta \leqslant \infty$. Поскольку $|\delta_{\overline{s}}g^j| \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j|^\lambda\Big)^{1/\lambda}$ для каждого $j = 1,\ldots,2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}$, при каждом фиксированном $\overline{s} \in S_n$, то

$$\sup_{j=1,\ldots,2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j| \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j|^\lambda\Big)^{1/\lambda}$$

для $\overline{s} \in S_n$. Следовательно,

$$\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\Big(\sum_{j=1}^{2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j|^\lambda\Big)^{\tau_2/\lambda}\Big)^{1/\tau_2} >> \Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\Big(\sup_{j=1,\ldots,2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j|\Big)^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{2.38}$$

Далее, применяя неравенство Гельдера при $1 < \tau_2 < \infty$, $\dfrac{1}{\tau_2} + \dfrac{1}{\tau_2'} = 1$, имеем

$$\sum_{\overline{s}\in S_n}\sup_{j=1,\ldots,2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j| \leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\Big(\sup_{j=1,\ldots,2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j|\Big)^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}|S_n|^{1/\tau_2'}. \tag{2.39}$$

Из неравенств (2.38) и (2.39) следует, что

$$|S_n|^{\frac{1}{\tau_2}-1}\sum_{\overline{s}\in S_n}\sup_{j=1,\ldots,2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j| \leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\Big(\sum_{j=1}^{2^{\langle \overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j|^\lambda\Big)^{\tau_2/\lambda}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{2.40}$$

Теперь из оценок (2.37) и (2.40) получим

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}|S_n|^{\frac{1}{\tau_2}-1}\lambda_M(B^{2^n,|S|}_{2,\theta}, l^{2^n,|S_n|}_{\infty,1}) \tag{2.41}$$

для $1 < q < \infty$, $1 < \tau_2 < \theta \leqslant \infty$. В силу включения $|S_n|^{-\frac{1}{\theta}}B^{2^n,|S_n|}_{2,\infty} \subset B^{2^n,|S_n|}_{2,\theta}$ (см. [17, с. 979]) из неравенства (2.41) выводим формулу

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}|S_n|^{\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta}-1}\lambda_M(B^{2^n,|S_n|}_{2,\infty}, l^{2^n,|S_n|}_{\infty,1}) \tag{2.42}$$

для $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_2 < \theta \leqslant \infty$. Согласно [7, теорема 3] из (2.42) имеем

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}|S_n|^{\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta}-1}\lambda_M(B^{2^n,|S_n|}_{1,\infty}, l^{2^n,|S_n|}_{2,1}) \tag{2.43}$$

для $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_2 < \theta \leqslant \infty$. По теореме 1 из [20] $\lambda_M(B^{2^n,|S_n|}_{1,\infty}, l^{2^n,|S_n|}_{2,1}) >> |S_n|$. Поэтому, учитывая, что $|S_n| \asymp n^{m-1}$ и $M \asymp 2^n n^{m-1}$, из (2.43) получим

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) >> 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}|S_n|^{\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta}}$$

$$>> 2^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})} >> \left(\frac{\log^{m-1}M}{M}\right)^{r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}(\log^{m-1}M)^{\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta}}$$

для $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_2 < \theta \leqslant \infty$. □

Теорема 2.3. *Пусть*

$$1 < p < q \leqslant 2 \ \ \text{или}\ \ 2 \leqslant p < q < \infty, \quad 1 < \tau_1, \tau_2 < \infty, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty,$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m.$$

Тогда

$$\lambda_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{q,\tau_2}\right) << \left(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\right)^{r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}(\log^{\nu-1}M)^{(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{2.44}$$

В случае

$$2 < p < q < \infty, \quad 1 < \tau_1, \tau_2 < \infty, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty \ \ \text{и}\ \ r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2}$$

оценка (2.44) *точна по порядку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По заданному натуральному числу M выберем число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Положим $\gamma_j = \left(r_j + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)/\left(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$, $j = 1, \ldots, m$, $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ и $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$, где $\gamma_j' = \gamma_j$ для $j = 1, \ldots, \nu$ и $1 < \gamma_j' < \gamma_j$ при $j = \nu+1, \ldots, m$. Частичная сумма

$$S_n^{(\overline{\gamma}')}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{k} \in Q_n^{(\overline{\gamma}')}} a_{\overline{k}}(f) e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}$$

ряда Фурье функции $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ является линейным ограниченным оператором в $L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$. Поэтому оценка сверху следует из определения линейного поперечника и [24, теорема 3.3].

Оценка снизу. В случае $2 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ согласно неравенству разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца [27, лемма 6] имеем $C_0\mathbb{S}^{\overline{\overline{\rho}}}_{2,2,\theta}B \subset \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ для некоторого положительного числа C_0, где $\overline{\overline{\rho}} = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$, $\rho_j = r_j + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}$, $j = 1, \ldots, m$. Поэтому нижняя оценка следует из теоремы 2.2 при $p = \tau_1 = 2$. □

В случае $q=p$ справедлива

Теорема 2.4. *Пусть*

$$1<p<\infty,\quad 1<\tau_2\leqslant 2 \ \text{ и } \ 1<\tau_2<\tau_1<\infty,$$

$$1\leqslant\theta\leqslant\infty,\quad 0<r_1=\ldots=r_\nu<r_{\nu+1}\leqslant\ldots\leqslant r_m.$$

Тогда

$$\lambda_M\Big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B,\ \ L_{p,\tau_2}\Big)<<\Big(\frac{\log^{m-1}M}{M}\Big)^{r_1}(\log^{m-1}M)^{(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})_+}(\log M)^{\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы следует из теоремы 2.2 [24]. □

З а м е ч а н и е 1. В случае $m=1$ и $\tau_1=p\geq\tau_2$ оценки в теореме 2.4 и теореме 1 из [23] совпадают по порядку. Если $m\geq 2$, то они существенно отличаются.

Теорема 2.5. *Пусть $0<r_1=\ldots=r_\nu<r_{\nu+1}\leqslant\ldots\leqslant r_m$ и $1\leqslant\theta\leqslant\infty$.*

Если $2<p<\infty$ и $2\leqslant\tau<\infty$, то

$$\lambda_M\Big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B,\ \ L_{p,\tau}\Big)<<\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1}(\log^{\nu-1}M)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Если $1<p<\infty$ и $1<\tau\leqslant 2$, то

$$\lambda_M\Big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B,\ \ L_{p,\tau}\Big)<<\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1}(\log^{\nu-1}M)^{(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

В случае $1<p\leqslant\tau\leqslant 2$ эта оценка точна по порядку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху величины $\lambda_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B,L_{p,\tau}\big)$ следует из [24, теорема 2.1].

Оценку снизу в случае $1<p\leqslant\tau\leqslant 2$ достаточно доказать для $\nu=m$. Для натурального числа M выберем $n\in\mathbb{N}$ такое, что $M\asymp 2^n n^{m-1}$ и $2^n n^{m-1}\geqslant 2M$. Рассмотрим множество $S_n:=\{\overline{s}=(s_1,\ldots,s_m)\in\mathbb{N}^m\colon \langle\overline{s},\overline{1}\rangle=n\}$. Для функции $g\in\mathfrak{F}_n$ по теореме 3.2 из [24] при $\theta=2$ и $q=p$ имеем

$$\|g\|_{p,\tau}>>\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\tau}\|\delta_{\overline{s}}(g)\|_2^\tau\Big)^{1/\tau}.$$

Согласно лемме 1.2 отсюда получим

$$\|g\|_{p,\tau}>>\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\tau}\Big(\prod_{j=1}^m 2^{-s_j}\sum_{j=1}^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j|^2\Big)^{\tau/2}\Big)^{1/\tau}=C2^{-\frac{n}{p}}\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\Big(\sum_{j=1}^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}g^j|^2\Big)^{\tau/2}\Big)^{1/\tau}. \tag{2.45}$$

С другой стороны по теореме Литтлвуда — Пэли в пространстве Лоренца (см. [24, теорема 1.1]) имеем

$$\lambda_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B,L_{p,\tau}\big)>>\lambda_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B\cap\mathfrak{F}_n,L_{p,\tau}\cap\mathfrak{F}_n\big). \tag{2.46}$$

Если $1<p\leqslant\tau$, то известно, что $L_{p,p}(\mathbb{T}^m)\subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_{p,\tau}<<\|f\|_{p,p}$. Поэтому из (2.46) следует, что

$$\lambda_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B,L_{p,\tau}\big)>>\lambda_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\theta}B\cap\mathfrak{F}_n,L_{p,\tau}\cap\mathfrak{F}_n\big). \tag{2.47}$$

Согласно лемме 1.2 для функции $g\in\mathfrak{F}_n$ справедливо соотношение

$$\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta\Big)^{1/\theta}\asymp 2^{nr_1}\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}^\theta\Big)^{1/\theta}\asymp 2^{n(r_1-1/p)}\Big(\sum_{\overline{s}\in S_n}\Big(\sum_{j=1}^{2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle}}|\delta_{\overline{s}}f^j|^\tau\Big)^{\theta/\tau}\Big)^{1/\theta}. \tag{2.48}$$

Из неравенств (2.45), (2.47), (2.48) следует, что

$$\lambda_M\bigl(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B, L_{p,\tau}\bigr) >> 2^{-nr_1}\lambda_M(B^{2^n,|S_n|}_{p,\theta}, l^{2^n,|S_n|}_{2,\tau}). \tag{2.49}$$

Далее, учитывая включение $|S_n|^{-1/\theta}B^{2^n,|S_n|}_{1,\infty} \subset B^{2^n,|S_n|}_{p,\theta}$ (см. (2.42), (2.43)), из оценки (2.49) получим

$$\lambda_M\bigl(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B, L_{p,\tau}\bigr) >> \Bigl(\frac{\log^{m-1}M}{M}\Bigr)^{r_1}(\log^{m-1}M)^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}}$$

в случае $1 < p \leqslant \tau \leqslant 2$, $1 < \tau \leqslant \theta \leqslant \infty$.

Если $1 \leqslant \theta \leqslant \tau \leqslant 2$, то, воспользуясь включением $B^{2^n|S_n|}_1 \subset B^{2^n,|S_n|}_{p,\theta}$ и теоремой 2 из [25] и учитывая, что по выбору $2^n|S_n| \geqslant 2M$, будем иметь

$$\lambda_M(B^{2^n,|S_n|}_{p,\theta}, l^{2^n,|S_n|}_{2,\tau}) >> \lambda_M(B^{2^n|S_n|}_1, l^{2^n|S_n|}_2) >> d_M(B^{2^n|S_n|}_1, l^{2^n|S_n|}_2) >> C. \tag{2.50}$$

Теперь из неравенств (2.49) и (2.50) следует, что $\lambda_M\bigl(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B, L_{p,\tau}\bigr) >> 2^{-nr_1} >> \Bigl(\dfrac{\log^{m-1}M}{M}\Bigr)^{r_1}$ в случае $1 \leqslant \theta \leqslant \tau \leqslant 2$, $1 < p \leqslant \tau \leqslant 2$. □

З а м е ч а н и е 2. В случае $\tau_1 = p$ и $\tau_2 = q$ результаты теорем 2.1–2.3 и теоремы 2.5 совпадают при $\theta = \infty$ с утверждениями 3–6 теоремы из [12], а для $1 \leqslant \theta < \infty$ с утверждениями теоремы 1 из [14], теорем 3–4 из [15] и теорем 8–9 из [18].

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lorentz G.G.** Some new functional spaces// Annals Math. Second ser. 1950. Vol. 51, № 1. P. 37–55. doi: 10.2307/1969496 .
2. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
3. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
4. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата: Наука, 1976. 224 с.
5. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
6. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.
7. **Исмагилов Р.С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 161–178.
8. **Майоров В.Е.** О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 5. С. 1127–1130.
9. **Höllig K.** Approximationszahlen von Sobolev-Einbettungen // Math. Annal. 1979. Vol. 242. P. 273–281. doi: 10.1007/BF01420731 .
10. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
11. **Галеев Э.М.** Линейные поперечники классов периодических функций многих переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1987. № 4. С. 13–16.
12. **Галеев Э.М.** Линейные поперечники классов Гельдера — Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 189–199.
13. **Изаак А.Д.** Поперечники классов Гельдера — Никольского и конечномерных множеств в пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 3. С. 459–461.
14. **Романюк А.С.** Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных I // Укр. мат. журн. 2001. Т. 53, № 5. С. 647–661.
15. **Романюк А.С.** Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных II // Укр. мат. журн. 2001. Т. 53, № 6. С. 965–977.

16. **Романюк А.С.** Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. 2011. Vol 37. P. 181–213. doi: 10.1007/s10476-011-0303-9 .
17. **Романюк А.С.** К вопросу о линейных поперечниках классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 7. С. 970–982.
18. **Романюк А.С.** Тригонометрические и линейные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. 2017. Т. 69, № 5. С. 670–681.
19. **Базарханов Д.Б.** Оценки некоторых аппроксимативных характеристик пространств Никольского — Бесова обобщенной смешанной гладкости // Докл. РАН. 2009. Т. 426, № 1. С. 11–14.
20. **Малыхин Ю.В., Рютин К.С.** Произведение октаэдров плохо приближается в метрике $l_{2,1}$ // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 1. С. 85–90. doi: 10.4213/mzm11281 .
21. **Тихомиров В.М.** Теория приближений. Современ. проблемы математики. М.: 1987. С. 103–270.
22. **Dinh Dũng, Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation. Advanced Courses in Mathematics — CRM Barcelona. Cham: Birkhäuser / Springer, 2018. 222 p. doi: 10.1007/978-3-319-92240-9 .
23. **König H.** s-numbers of Besov–Lorentz imbeddings // Math. Nachr. 1979. Vol. 91. P. 389–400.
24. **Акишев Г.** Оценки наилучших приближений функций класса Никольского — Бесова в пространстве Лоренца тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 5–27. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-5-27 .
25. **Глускин Е.Д.** Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. 1983. Т. 120, № 2. С. 180–189.
26. **Глускин Е.Д.** Об одной задаче о поперечниках // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 3. С. 527–530.
27. **Акишев Г.** О порядках M-членных приближений классов функций симметричного пространства // Мат. журн. 2014. Т. 14, № 4. С. 46–71.

Поступила 19.05.2022
После доработки 27.10.2022
Принята к публикации 31.10.2022

Акишев Габдолла
д-р физ.-мат. наук, профессор
Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Астана;
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Lorentz G.G. Some new functional spaces. *Ann. of Math. Second ser.*, 1950, vol. 51, no. 1, pp. 37–55. doi: 10.2307/1969496 .
2. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 069108078X. Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh.* Moscow: Mir Publ., 1974, 333 p.
3. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems.* NY: Springer-Verlag, 1975, 420 p. doi: 10.1007/978-3-642-65711-5 . Original Russian text published in Nikol'skii S.M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya,* Moscow: Nauka Publ., 1977, 456 p.
4. Amanov T.I. *Prostranstva differentsiruemykh funktsii s dominiruyushchei smeshannoi proizvodnoi* [Spaces of differentiable functions with dominant mixed derivative]. Alma-Ata: Nauka Publ., 1976, 224 p.
5. Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Functional spaces of mixed smoothness from decompositional point of view. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 187, pp. 163–184.
6. Tikhomirov V.M. Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations. *Russ. Math. Surv.,* 1960, vol. 15, no. 3, pp. 75–111. doi: 10.1070/RM1960v015n03ABEH004093 .
7. Ismagilov R.S. Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials. *Russ. Math. Surv.*, 1974, vol. 29, no. 3, pp. 169–186. doi: 10.1070/RM1974v029n03ABEH001287 .
8. Maiorov V.E. On linear diameters of Sobolev classes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 243, no. 5, pp. 1127–1130 (in Russian).

9. Höllig K. Approximationszahlen von Sobolev-Einbettungen. *Math. Ann.*, 1979, vol. 242, pp. 273–281. doi: 10.1007/BF01420731 .
10. Temlyakov V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 178, pp. 1–121.
11. Galeev E.M. On linear diameters of classes of periodic functions of several variables. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 1987, vol. 42, no. 4, pp. 14–18.
12. Galeev E.M. Linear widths of Hölder–Nikol'skii classes of periodic functions of several variables. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 2, pp. 133–140. doi: 10.1007/BF02310952 .
13. Izaak A.D. Widths of Hölder-Nikol'skii classes and finite-dimensional subsets in spaces with mixed norm. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 3, pp. 328–330. doi: 10.1007/BF02308549 .
14. Romanyuk A.S. Linear widths of the Besov classes of periodic functions of many variables. I. *Ukr. Math. J.*, 2001, vol. 53, no. 5, pp. 744–761. doi: 10.1023/A:1012530317130 .
15. Romanyuk A.S. Linear widths of the Besov classes of periodic functions of many variables. II. *Ukr. Math. J.*, 2001, vol. 53, no. 6, pp. 965–977. doi: 10.1023/A:1013356019431 .
16. Romanyuk A.S. Widths and best approximation of the classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables. *Anal. Math.*, 2011, vol. 37, no. 3, pp. 181–213 (in Russian). doi: 10.1007/s10476-011-0303-9 .
17. Romanyuk A.S. On the problem of linear widths of the classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables. *Ukr. Math. J.*, 2014, vol. 66, no. 7, pp. 1085–1098. doi: 10.1007/s11253-014-0996-6 .
18. Romanyuk A.S. Trigonometric and linear widths for the classes of periodic multivariate functions. *Ukr. Math. J.*, 2017, vol. 69, no. 5, pp. 782–795. doi: 10.1007/s11253-017-1395-6 .
19. Bazarkhanov D.B. Estimates for certain approximation characteristics of Nikol'skii–Besov spaces with generalized mixed smoothness. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 79, no. 3, pp. 305–308.
20. Malykhin Yu.V., Ryutin K.S. The product of octahedra is badly approximated in the $l_{2,1}$-metric. *Math. Notes*, 2017, vol. 101, no. 1, pp. 94–99. doi: 10.1134/S0001434617010096 .
21. Tikhomirov V.M. Approximation theory. *Itogy Nauki i Tekhniki: Sovrem. Probl. Math.: Fund. Naprav.*, Moscow: VINITI, 1987, vol. 14, pp. 103–270 (in Russian).
22. Dinh Dũng, Temlyakov V.N., Ullrich T. *Hyperbolic cross approximation.* Advanced Courses in Mathematics — CRM Barcelona. Cham: Birkhäuser / Springer, 2018, 222 p. doi: 10.1007/978-3-319-92240-9 .
23. König H. s-numbers of Besov–Lorentz imbeddings. *Math. Nachr.*, 1979, vol. 91, pp. 389–400. doi: 10.1002/MANA.19790910131 .
24. Akishev G.A. Estimates for the best approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class in the Lorentz space by trigonometric polynomials. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 5–27 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-5-27 .
25. Gluskin E.D. Norms of random matrices and widths of finite-dimensional sets. *Sb. Math.*, 1984, vol. 48, no. 1, pp. 173–182. doi: 10.1070/SM1984v048n01ABEH002667 .
26. Gluskin E.D. On a problem concerning diameters. *Sov. Math., Dokl.*, 1974, vol. 15, pp. 1592–1596.
27. Akishev G. On the orders of $M-$terms approximations of classes of functions of the symmetrical space. *Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 46–71 (in Russian).

Received May 19, 2022
Revised October 27, 2022
Accepted October 31, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP08855579).

Gabdolla Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Kazakhstan Branch, Lomonosov Moscow University, Astana, 100008 Republic Kazakhstan; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: akishev_g@mail.ru .

Cite this article as: G. Akishev. On estimates of linear widths for classes of multivariate functions in the Lorentz space. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 23–39 .