ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 519.65

В КРУГЕ ИДЕЙ Ю. Н. СУББОТИНА В ЗАДАЧЕ ЛОКАЛЬНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ПОЛУОСИ

В. Т. Шевалдин

На произвольной сетке узлов $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ полуоси $[x_0; +\infty)$ рассмотрена задача Ю. Н. Субботина экстремальной функциональной интерполяции числовых последовательностей $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, у которых разделенные разности n-го порядка ограничены, а первые члены $y_0, y_1, \ldots, y_{s-1}$ заранее заданы. При этом требуется найти n раз дифференцируемую функцию f такую, что $f(x_k) = y_k$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$, и имеющую наименьшую норму производной порядка n в пространстве L_∞. Ю. Н. Субботин поставил и изучил эту задачу только для равномерной сетки узлов на полуоси $[0; +\infty)$. В настоящей работе при $s \ge n$ доказана конечность этой наименьшей нормы, если у сетки узлов интерполяции наименьший шаг $\underline{h} = \inf\limits_k (x_{k+1} - x_k)$ отделен от нуля, а наибольший $\overline{h} = \sup\limits_k (h_{k+1} - h_k)$ — от бесконечности. В случае второй производной (т. е. при $n = 2$) указанная величина точно вычислена при $s = 2$ и оценена сверху при $s \ge 3$ в терминах шагов сетки.

Ключевые слова: локальная интерполяция, полуось, произвольная сетка, разделенные разности.

V. T. Shevaldin. On Yu. N. Subbotin's circle of ideas in the problem of local extremal interpolation on the semiaxis.

On an arbitrary grid $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ of the half-line $[x_0; +\infty)$, we consider Yu. N. Subbotin's problem of extremal functional interpolation of numerical sequences $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ such that their first terms $y_0, y_1, \ldots, y_{s-1}$ are given and the nth-order divided differences are bounded. It is required to find an n-times differentiable function f with the smallest norm of the nth-order derivative in the space L_∞ such that $f(x_k) = y_k$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$. Subbotin formulated and studied this problem only for a uniform grid on the half-line $[0; +\infty)$. We prove the finiteness of the smallest norm for $s \ge n$ if the smallest step of the interpolation grid $\underline{h} = \inf\limits_k (x_{k+1} - x_k)$ is bounded away from zero and the largest step $\overline{h} = \sup\limits_k (h_{k+1} - h_k)$ is bounded away from infinity. In the case of the second derivative (i.e., for $n = 2$), the required value is calculated exactly for $s = 2$ and is estimated from above for $s \ge 3$ in terms of the grid steps.

Keywords: local interpolation, semiaxis, arbitrary grid, divided differences.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-237-249

Введение

Рассмотрим на полуоси $[x_0; +\infty)$ бесконечную сетку узлов

$$\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \colon x_0 < x_1 < x_2 < \cdots .$$

Пусть $h_k = x_{k+1} - x_k$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ — шаги этой сетки и $\underline{h} = \inf\limits_k h_k$, $\overline{h} = \sup\limits_k h_k$ — соответственно наименьший и наибольший шаги этой сетки. Пусть $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел. В данной работе будем рассматривать функции $f \colon [x_0; +\infty) \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют условиям интерполяции $f(x_k) = y_k$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$. Для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ разделенная разность порядка n определяется рекуррентно при помощи равенств

$$f[x_k] = [y_k] = y_k, \quad f[x_{k+1}, x_k] = [y_{k+1}, y_k] = \frac{[y_{k+1}] - [y_k]}{x_{k+1} - x_k}, \ \ldots,$$

$$f[x_{k+n}, \ldots, x_k] = [y_{k+n}, \ldots, y_k] = \frac{[y_{k+n}, \ldots, y_{k+1}] - [y_{k+n-1}, \ldots, y_k]}{x_{k+n} - x_k} \quad (k \in \mathbb{Z}_+).$$

Отметим, что если исходная сетка узлов Δ равномерная (такие сетки мы в дальнейшем будем обозначать $\overline{\Delta}$), т. е. $x_k = x_0 + kh$ ($k \in \mathbb{Z}_+$, $h > 0$), то

$$[y_{k+n}, \dots, y_k] = \frac{1}{h^n n!} \Delta^n y_k,$$

где $\Delta^n y_k = \sum\limits_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} C_n^m y_{k+m}$ — конечная разность порядка n.

Рассмотрим класс последовательностей вида

$$Y = Y_n = \bigl\{ y = \{y_k\}_{k=0}^{\infty} \colon \bigl|[y_{k+n}, \dots, y_k]\bigr| \le 1 \ (k \in \mathbb{Z}_+) \bigr\}.$$

Для каждой последовательности $y \in Y$ определим класс функций

$$F(y) = F_n(y) = \bigl\{ f \colon f^{(n-1)} \in AC[x_0; +\infty),\ f^{(n)} \in L_\infty[x_0; +\infty),\ f(x_k) = y_k \ (k \in \mathbb{Z}_+) \bigr\}.$$

Здесь $AC[x_0; +\infty)$ — класс функций, локально абсолютно непрерывных на полуоси $[x_0; +\infty)$, и норма функции в пространстве $L_\infty = L_\infty[x_0; +\infty)$ определяется обычным образом:

$$\|g\|_{L_\infty} = \|g\|_{L_\infty[x_0; +\infty)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [x_0; +\infty)} |g(t)|.$$

В дальнейшем мы покажем, что если $\underline{h} > 0$ и $\overline{h} < +\infty$, то для любой последовательности $y \in Y$ класс $F(y)$ не пуст.

Сформулируем задачу *локальной экстремальной интерполяции на полуоси*, которую в 1996 году поставил Ю. Н. Субботин [1]. В своей работе он сделал это только для равномерной сетки узлов $\overline{\Delta}$. В общем случае для произвольной сетки Δ данная задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть заданы число $s \in \mathbb{N}$ и первые члены $y_0, y_1, \dots, y_{s-1}$ интерполируемой последовательности $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$. Требуется вычислить (или оценить) величины

$$A_{\infty,\Delta}(y_0, y_1, \dots, y_{s-1}) = \sup_{y \in Y} \inf_{f \in F(y)} \|f^{(n)}\|_{L_\infty[x_0; +\infty)},$$

$$B_{\infty,\Delta}(s, n) = \sup_{y_0, y_1, \dots, y_{s-1}} A_{\infty,\Delta}(y_0, y_1, \dots, y_{s-1}).$$

Аналогичная задача (без фиксирования каких-либо значений последовательности y) для равномерной сетки узлов $\overline{\Delta}$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$ была поставлена Н. Н. Яненко в беседе с С. Б. Стечкиным в начале 60-х годов прошлого века. Решение этой задачи было получено Ю. Н. Субботиным [2], который в дальнейших своих работах рассмотрел и более общие постановки задачи Яненко — Стечкина (см., например, обзор [3]). Надо еще отметить, что ранее в 1940 году Ж. Фаваром [4] была решена близкая по постановке интерполяционная задача с произвольными узлами интерполяции на конечном интервале, который отмечал в своей работе, что его метод не позволяет решить задачу интерполяции на бесконечном интервале.

Переформулируем основные результаты Ю. Н. Субботина [1], учитывая, что в своих исследованиях для равномерной сетки $\overline{\Delta}$ он полагал $h = 1$, $x_0 = 0$, и поэтому в определении класса Y надо считать, что $|\Delta^n y_k| \le n!$, поскольку $\Delta^n y_k = n![y_{k+n}, \dots, y_k]$.

Теорема Ю. Н. Субботина (см. [1]). *Для равномерной сетки $\overline{\Delta}$ имеют место следующие утверждения*:

1) $B_{\infty,\overline{\Delta}}(2,2) = 2(\sqrt{2}+1)$, $B_{\infty,\overline{\Delta}}(s,2) = 4$ $(s \ge 3)$;

2) *при* $s \le n-1$ $(n \ge 3)$ *имеем* $B_{\infty,\overline{\Delta}}(s,n) = +\infty$;

3) *при* $s \ge n$ $(n \ge 3)$ *величина* $B_{\infty,\overline{\Delta}}(s,n)$ *конечна.*

Кроме того, в [1] Ю. Н. Субботин точно вычислил величину $B_{\infty,\overline{\Delta}}(3,3)$ и исследовал вопрос о реализации величины $B_{\infty,\overline{\Delta}}(s,n)$ линейным (относительно последовательности $y = \{y_k\}_{k=0}^{\infty}$)

методом, при этом процесс построения экстремальной функции f был локальным. Третье утверждение теоремы было доказано двумя способами: методом В. С. Рябенького [5, приложение] с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и методом статьи Ю. Н. Субботина и Н. И. Черных [6] с применением сплайнов с дополнительными нефиксированными узлами. Во всех случаях, когда величина $B_{\infty,\overline{\Delta}}(s,n)$ конечна, был предъявлен явный линейный индуктивный метод построения экстремальной функции $f \in F(y)$.

В данной работе мы, следуя идеям статьи [1], обобщаем все отмеченные в теореме исследования Ю. Н. Субботина на произвольные неравномерные сетки Δ (см. теоремы 1–4), заменяя конечные разности на разделенные. Отметим, что случай $n = 1$ в данной задаче неинтересен, поскольку он сводится к обычной интерполяции ломаными.

1. Случай $s \geq n \geq 3$

Теорема 1. *Для любой сетки Δ, удовлетворяющей условиям $\underline{h} > 0$, $\overline{h} < +\infty$, при $s \geq n \geq 3$ величина $B_{\infty,\Delta}(s,n)$ конечна.*

Доказательство. Рассмотрим два интерполяционных многочлена Лагранжа $P_{n-1,0}(x)$ и $P_{n-1,1}(x)$ степени $n-1$, удовлетворяющие условиям

$$P_{n-1,0}(x_k) = y_k \quad (k = \overline{0, n-1}), \qquad P_{n-1,1}(x_k) = y_k \quad (k = \overline{1, n}).$$

Хорошо известно, что эти многочлены можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_{n-1,0}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k \omega_0(x)}{(x - x_k)\omega_0'(x_k)}, \quad \omega_0(x) = \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j), \\ P_{n-1,1}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k \omega_1(x)}{(x - x_k)\omega_1'(x_k)}, \quad \omega_1(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Заметим, что поскольку мы считаем, что $s \geq n$, то значения $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ считаются заданными. Для любой последовательности $y \in Y$ функцию $f \in F(y)$ вначале построим на отрезке $[x_0; x_{n-1}]$, а затем на последующих отрезках $[x_{k-1}; x_k]$ $(k \geq n)$. При $x \in [x_0; x_{n-1}]$ положим

$$f(x) = P_{n-1,0}(x). \tag{1.2}$$

На отрезке $[x_{n-1}; x_n]$ функцию $f \in F(y)$ строим в виде полиномиального сплайна степени $n-1$ с узлами $x_{n-1} = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = x_n$ по формуле

$$f(x) = P_{n-1,0}(x) + \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x_{n-1}}^{x} (x - t)^{n-1} u(t)\, dt, \tag{1.3}$$

где функция $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = Z_k[y_n, \ldots, y_0], \quad t \in [t_{k-1}; t_k) \quad (k = \overline{1, n}). \tag{1.4}$$

Здесь $\{Z_k\}_{k=1}^{n}$ — неизвестные числа, которые подлежат дальнейшему определению. Мы их будем находить по схеме работы [6], посвященной аппроксимативным свойствам полиномиальных сплайнов с дополнительными узлами. Числа $\{t_k\}_{k=1}^{n-1}$ пока считаем фиксированными. Из (1.2) и (1.3) следует, что

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad x \in (x_0; x_{n-1}); \quad f^{(n)}(x) = u(x), \quad x \in (x_{n-1}; x_n).$$

Найдем числа $\{Z_k\}_{k=1}^n$, исходя из равенств

$$f^{(j)}(x_n) = P^{(j)}_{n-1,1}(x_n) \quad (j=\overline{0,n-1}). \tag{1.5}$$

Из (1.3) следует, что

$$f^{(j)}(x) = P^{(j)}_{n-1,0}(x) + \frac{1}{(n-j-1)!}\int\limits_{x_{n-1}}^{x} (x-t)^{n-j-1}u(t)\,dt \quad (j=\overline{0,n-1}). \tag{1.6}$$

Подставляя в (1.6) $x=x_n$, из (1.5) получаем систему уравнений

$$P^{(j)}_{n-1,1}(x_n) - P^{(j)}_{n-1,0}(x_n) = \frac{1}{(n-j-1)!}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} (x_n-t)^{n-j-1}u(t)\,dt \quad (j=\overline{0,n-1}).$$

Поскольку функция $u(t)$ имеет вид (1.4), то полученная система уравнений переписывается в виде

$$\frac{[y_n,\dots,y_0]}{(n-j)!}\bigl\{Z_1[(t_n-t_0)^{n-j}-(t_n-t_1)^{n-j}]+\dots+Z_n[(t_n-t_{n-1})^{n-j}-(t_n-t_n)^{n-j}]\bigr\}$$

$$= P^{(j)}_{n-1,1}(x_n) - P^{(j)}_{n-1,0}(x_n) \quad (j=\overline{0,n-1}).$$

Сделаем замену переменных

$$\lambda_1 = Z_1, \quad \lambda_2 = Z_2 - Z_1, \dots, \lambda_n = Z_n - Z_{n-1};$$

$$\tau_1 = t_n - t_0, \quad \tau_2 = t_n - t_1, \dots, \tau_n = t_n - t_{n-1}.$$

Таким образом, из равенств (1.5) выводим систему n линейных алгебраических уравнений относительно чисел $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ вида

$$[y_n,\dots,y_0]\bigl(\lambda_1\tau_1^{n-j}+\dots+\lambda_n\tau_n^{n-j}\bigr) = (n-j)!\bigl(P^{(j)}_{n-1,1}(x_n) - P^{(j)}_{n-1,0}(x_n)\bigr) \quad (j=\overline{0,n-1}). \tag{1.7}$$

Лемма 1. *Имеют место следующие равенства*:

$$P^{(j)}_{n-1,1}(x_n) - P^{(j)}_{n-1,0}(x_n) = c_j[y_n,\dots,y_0] \quad (j=\overline{0,n-1}), \tag{1.8}$$

где

$$c_j = (x_n-x_0)\omega^{(j)}(x_n), \quad \omega(x) = \prod_{m=1}^{n-1}(x-x_m).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $j=0$ и $j=n-1$ равенство (1.8) проверяется непосредственно с помощью несложных преобразований равенств (1.1) и формулы

$$[y_n,\dots,y_0] = \sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{\prod\limits_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{n}(x_k-x_m)}.$$

Поэтому будем считать, что $1\le j\le n-2$. Воспользуемся тем фактом, что левая и правая части равенства (1.8) представляют собой линейные функции от переменных $y_0,y_1,\dots,y_n$. Значит, для доказательства леммы достаточно установить совпадение коэффициентов при y_k $(k=\overline{0,n})$ в левой и правой частях равенства (1.8). Случаи $k=0$ и $k=n$ тривиальны.

Пусть теперь $1 \le k \le n-1$. Коэффициент при y_k в левой части равенства (1.8) можно записать в виде j-й производной в точке x_n от функции

$$\frac{\prod\limits_{m=1}^{n}(x-x_m)}{(x-x_k)(x_k-x_n)} - \frac{\prod\limits_{m=0}^{n-1}(x-x_m)}{(x-x_k)(x_k-x_0)},$$

а в правой части —

$$\frac{(x_n-x_0)\omega^{(j)}(x_n)}{(x_k-x_n)(x_k-x_0)}.$$

Равенство этих коэффициентов следует из формулы

$$(x_k-x_0)(x-x_n)-(x_k-x_n)(x-x_0)=(x-x_k)(x_n-x_0).$$

Лемма доказана. □

С учетом леммы 1 и еще одной замены переменных

$$X_1=\lambda_1\tau_1,\ldots,X_n=\lambda_n\tau_n \tag{1.9}$$

систему уравнений (1.7) переписываем в виде

$$\begin{gathered}
X_1+X_2+\cdots+X_n = 1!(x_n-x_0)\omega^{(n-1)}(x_n)=Y_1,\\
X_1\tau_1+X_2\tau_2+\cdots+X_n\tau_n = 2!(x_n-x_0)\omega^{(n-2)}(x_n)=Y_2,\\
\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\\
X_1\tau_1^{n-1}+X_2\tau_2^{n-1}+\cdots+X_n\tau_n^{n-1} = n!(x_n-x_0)\omega(x_n)=Y_n,
\end{gathered} \tag{1.10}$$

где

$$\omega(x)=\prod_{m=1}^{n-1}(x-x_m).$$

Для матрицы Вандермонда Λ, которая является матрицей системы (1.10), известна обратная матрица Λ^{-1} (см., например, [7, Ch. II]), элементы которой вычисляются явно по формуле

$$b_{ij}=(-1)^{n-1}\frac{\sigma^i_{n-j}}{\prod\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne i}}^{n}(\tau_\nu-\tau_i)} \quad (i,j=\overline{1,n}),$$

где $\sigma_m=\sigma_m(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ $(1\le m\le n)$ — элементарные симметрические многочлены переменных $\tau_1,\ldots,\tau_n$ и $\sigma_0=1$. Под нормой матрицы $\Lambda^{-1}=(b_{ij})$ будем понимать число

$$\|\Lambda^{-1}\|=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|.$$

В [8] доказано следующее неравенство

$$\|\Lambda^{-1}\|\le\max_{1\le i\le n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne i}}^{n}\frac{1+|\tau_\nu|}{|\tau_\nu-\tau_i|},$$

которое позволяет оценить решение $\{X_i\}_{i=1}^n$ системы (1.10) следующим образом:

$$\max_{1\le i\le n}|X_i|\le\|\Lambda^{-1}\|\max_{1\le i\le n}|Y_i|\le\max_{1\le i\le n}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1+|\tau_\nu|}{|\tau_\nu-\tau_i|}\cdot\max_{1\le i\le n}|Y_i|. \tag{1.11}$$

Сетку узлов $\{t_k\}_{k=0}^n$ на отрезке $[x_{n-1}; x_n]$ выберем равномерной, а именно, пусть

$$t_k = x_{n-1} + \frac{kh_{n-1}}{n} \quad (k = \overline{0, n}),$$

где $h_{n-1} = x_n - x_{n-1} = t_n - t_0$. Поскольку $\tau_k = t_n - t_{k-1} < h_{n-1}$ $(k = \overline{1, n})$, то

$$\max_{1 \le i \le n} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \ne i}}^{n} \frac{1 + |\tau_\nu|}{|\tau_\nu - \tau_i|} \le C_1(n)\Big(\frac{1 + h_{n-1}}{h_{n-1}}\Big)^{n-1} \le C_1(n)\Big(\frac{1 + \underline{h}}{\underline{h}}\Big)^{n-1};$$

здесь $C_1(n)$ — некоторая положительная константа, зависящая только от n. В силу определения чисел Y_i (см. (1.10)) и функции $\omega(x)$ имеем

$$|Y_j| \le K_j(n)\overline{h}^j \quad (j = \overline{1, n}),$$

где $K_j(n)$ $(j = \overline{1, n})$ — некоторые положительные константы. Таким образом, из равенств (1.9) и неравенства (1.11) получим, что

$$\max_{1 \le i \le n} |X_i| = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i \tau_i| \le C_2(n)\Big(\frac{1 + \underline{h}}{\underline{h}}\Big)^{n-1}\big(\max\{1; \overline{h}\}\big)^n;$$

$C_2(n)$ — некоторая положительная константа. Теперь ограниченность величин $|\lambda_i|$ $(i = \overline{1, n})$, а, значит, и чисел $|Z_i|$ $(i = \overline{1, n})$ следует из неравенств

$$\tau_i \ge \frac{h_{n-1}}{n} \ge \frac{\underline{h}}{n} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Поэтому из (1.4) и неравенства $|[y_n, \dots, y_0]| \le 1$ получаем, что функция $u(t) = f^{(n)}(t)$ ограничена на отрезке $[x_{n-1}; x_n]$. Продолжим процесс построения функции $f \in F(y)$ на следующих отрезках $[x_n; x_{n+1}]$, $[x_{n+1}; x_{n+2}], \dots$ по предложенной схеме. Если функция f уже построена на отрезке $[x_0; x_m]$, то на отрезке $[x_m; x_{m+1}]$ функцию f строим в виде полиномиального сплайна степени $n - 1$ с узлами $x_m = t_0^{(m)} < t_1^{(m)} < t_2^{(m)} < \dots < t_{n-1}^{(m)} < t_n^{(m)} = x_{m+1}$ (которые в дальнейшем считаем равномерными):

$$f(x) = P_{n-1,m-n+1}(x) + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_m}^{x} (x - t)^{n-1} u(t)\, dt.$$

Здесь $P_{n-1,m-n+1}(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n - 1$ такой, что

$$P_{n-1,m-n+1}(x_k) = y_k \quad (k = \overline{m - n + 1, m}),$$

и функция $u(t) = f^{(n)}(t)$ имеет вид

$$u(t) = Z_k^{(m)}[y_{m+1}, \dots, y_{m-n+1}], \quad t \in \big[t_{k-1}^{(m)}; t_k^{(m)}\big) \quad (k = \overline{1, n}).$$

При этом числа $\{Z_k^{(m)}\}_{k=1}^n$ определяются из равенств

$$f^{(j)}(x_{m+1}) = P_{n-1,m-n+2}(x_{m+1}) \quad (j = \overline{0, n - 1}),$$

где $P_{n-1,m-n+2}(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n - 1$ такой, что

$$P_{n-1,m-n+2}(x_k) = y_k \quad (k = \overline{m - n + 2, m + 1}).$$

Теорема полностью доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. Отметим, что лемму 1 можно получить из соотношения [4, § 13, равенство (11)], выписанного Ж. Фаваром в 1940 г.,

$$P_{n-1,1}(x) - P_{n-1,0}(x) = (x - x_1)\dots(x - x_{n-1})\big\{[y_n, \dots, y_1] - [y_{n-1}, \dots, y_0]\big\}.$$

Здесь же приведено доказательство этой леммы с помощью метода В. С. Рябенького [5, приложение].

2. Случай $s \le n-1$

Теорема 2. *Для любой сетки* Δ *при* $1 \le s \le n-1$ $(n \ge 2)$ *имеет место равенство* $B_{\infty,\Delta}(s,n) = +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим последовательность $y^* \in Y$ следующим образом:

$$y_0^* = y_1^* = \dots = y_{s-1}^* = 0, \quad y_k^* = a\prod_{j=0}^{s-1}(x_k - x_j) \ (k \ge s),$$

где a — произвольное положительное число. Заметим, что эту последовательность можно было определить и единообразно:

$$y_k^* = a\prod_{j=0}^{s-1}(x_k - x_j) \ \ (k \in \mathbb{Z}_+).$$

Пусть $g(x) = a\prod\limits_{j=0}^{s-1}(x - x_j)$ — многочлен степени s. Поскольку разделенные разности порядка n обращаются в ноль на многочленах степени $n-1$, то имеет место равенство

$$g[x_{k+n},\dots,x_k] = [y_{k+n}^*,\dots,y_k^*] = 0 \ \ (k \in \mathbb{Z}_+).$$

Значит, $y^* \in Y$. Теорему 2 вначале докажем при $s = n-1$. Рассмотрим любую n раз дифференцируемую функцию f такую, что $f(x_k) = y_k^*$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$. Существование такой функции следует из доказательства предыдущей теоремы. Пусть экстремальная функция f уже построена на отрезке $[x_0; x_{n-2}]$. Будем изучать ее поведение на отрезке $[x_{n-2}; x_{n-1}]$. Обозначим $\alpha_i = f^{(i)}(x_{n-2})$ $(i = \overline{0, n-1})$. Замечаем, что $\alpha_0 = f(x_{n-2}) = y_{n-2}^* = 0$.

По формуле Тейлора имеем

$$f(x) = f(x_{n-2}) + f'(x_{n-2})(x - x_{n-2}) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_{n-2})}{(n-1)!}(x - x_{n-2})^{n-1}$$
$$+ \int\limits_{x_{n-2}}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt, \quad x \in [x_{n-2}; x_{n-1}].$$

В этом равенстве положим $x = x_{n-1}$. Тогда

$$f(x_{n-1}) = \alpha_1 h_{n-2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!}h_{n-2}^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} (x_{n-1} - t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Поскольку $f(x_{n-1}) = y_{n-1}^* = a\prod\limits_{j=0}^{n-2}(x_{n-1} - x_j)$, то имеет место соотношение

$$a\prod_{j=0}^{n-2}(x_{n-1} - x_j) - \alpha_1 h_{n-2} - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!}h_{n-2}^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} (x_{n-1} - t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt,$$

из которого выводим неравенство

$$\Bigl| a h_{n-2}(h_{n-2} + h_{n-3}) \times \dots \times (h_{n-2} + \dots + h_0) - \alpha_1 h_{n-2} - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!}h_{n-2}^{n-1} \Bigr|$$
$$= \Bigl| \int\limits_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \frac{(x_{n-1}-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \Bigr| \le \|f^{(n)}\|_{L_\infty[x_{n-2};x_{n-1}]} \int\limits_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \frac{(x_{n-1}-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$
$$= \frac{h_{n-2}^n}{n!}\|f^{(n)}\|_{L_\infty[x_{n-2};x_{n-1}]}.$$

Устремляя число a к бесконечности, отсюда получаем, что $\|f^{(n)}\|_{L_\infty[x_0;+\infty)} \to +\infty$.

Доказательство теоремы 2 при $1 \le s < n-1$ по существу не меняется, надо только вместо отрезка $[x_{n-2}; x_{n-1}]$ провести оценку нормы функции $f^{(n)}$ на отрезке $[x_{s-1}; x_s]$.

Теорема полностью доказана. □

3. Случай $n = 2$

Теорема 3. *Для любой сетки Δ имеет место равенство*

$$B_{\infty,\Delta}(2,2) = (\sqrt{2}+1) \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{h_k + h_{k+1}}{h_{k+1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Оценка сверху. На отрезке $[x_0; x_1]$ функцию $f \in F(y)$ для любой последовательности $y \in Y$ строим следующим образом:

$$f(x) = \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{h_0} + \frac{y_1 - y_0}{h_0} x.$$

Тогда

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f'(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h_0}, \quad f''(x) = 0 \ \ (x \in (x_0; x_1)).$$

На следующем отрезке $[x_1; x_2]$ функцию f будем строить в виде параболического сплайна с одним внутренним узлом $x_1 + \gamma$ $(0 < \gamma < h_1)$, исходя из условий

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f'(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h_0}, \quad f'(x_2) = \frac{y_2 - y_1}{h_1},$$

$$f''(x) = \begin{cases} C[y_2, y_1, y_0], & x_1 \le x < x_1 + \gamma, \\ -C[y_2, y_1, y_0], & x_1 + \gamma \le x < x_2. \end{cases}$$

Эти условия задают систему уравнений относительно чисел γ и C. Нетрудно проверить, что все перечисленные условия выполнены, если

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} h_1, \quad C = (\sqrt{2}+1)\frac{h_0 + h_1}{h_1}.$$

Из построения функции f следует, что

$$\|f''\|_{L_\infty[x_1;x_2]} \le (\sqrt{2}+1)\frac{h_0 + h_1}{h_1},$$

поскольку $|[y_2, y_1, y_0]| \le 1$ в силу определения класса Y. Если функция f уже построена на отрезке $[x_0; x_{k-1}]$, то на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ ее строим в виде аналогичного параболического сплайна с одним внутренним узлом $x_{k-1} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} h_{k-1}$, исходя из равенства

$$f''(x) = \begin{cases} C^{(k)}[y_k, y_{k-1}, y_{k-2}], & x_{k-1} \le x < x_{k-1} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} h_{k-1}, \\ -C^{(k)}[y_k, y_{k-1}, y_{k-2}], & x_{k-1} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} h_{k-1} \le x < x_k, \end{cases}$$

где $C^{(k)} = (\sqrt{2}+1)\dfrac{h_{k-2} + h_{k-1}}{h_{k-1}}$. Таким образом, построенная функция f непрерывно дифференцируема на полуоси $[x_0; +\infty)$, $f(x_k) = y_k$, $f'(x_k) = \dfrac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$. При этом на каждом отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ $(k \geq 2)$ построена трехточечная схема линейной аппроксимации функции, заданной в точках сетки $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, локальным параболическим сплайном с дополнительными узлами. В силу построения функции f справедливо неравенство

$$\|f''\|_{L_\infty[x_{k-1};x_k]} \leq (\sqrt{2}+1)\frac{h_{k-2}+h_{k-1}}{h_{k-1}} \quad (k \geq 2).$$

Значит,

$$B_{\infty,\Delta}(2,2) \leq \|f''\|_{L_\infty[x_0;+\infty)} \leq (\sqrt{2}+1) \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{h_k+h_{k+1}}{h_{k+1}}.$$

Оценка снизу. Положим $y_0^* = y_1^* = 0$, $y_2^* = h_1(h_0+h_1)$. Тогда $[y_2^*, y_1^*, y_0^*] = 1$. Числа $y_3^*, y_4^*, \ldots$ найдем, исходя из равенств $[y_{k+2}^*, y_{k+1}^*, y_k^*] = 1$ $(k \in \mathbb{N})$. Обозначим $\alpha = f'(x_1)$ и рассмотрим вначале случай $\alpha \leq 0$. Докажем, что для любой функции $f \in F(y^*)$ имеет место неравенство

$$\|f''\|_{L_\infty[x_1;x_2]} \geq (\sqrt{2}+1)\frac{h_1+h_0}{h_1}. \tag{3.1}$$

По формуле Тейлора имеем

$$\begin{gathered} f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \int\limits_{x_1}^{x} (x-t)f''(t)\,dt, \\ f'(x) = f'(x_1) + \int\limits_{x_1}^{x} f''(t)\,dt. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Обозначим $\beta = f'(x_2)$. Поскольку $f(x_2) = y_2^* = h_1(h_0+h_1)$, то из (3.2) при $x = x_2$ следует система равенств

$$\begin{cases} h_1(h_1+h_0) - \alpha h_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2} (x_2-t)f''(t)\,dt, \\ \beta - \alpha = \int\limits_{x_1}^{x_2} f''(t)\,dt. \end{cases} \tag{3.3}$$

Доказательство неравенства (3.1) разобьем на два случая: 1) $\beta \leq h_0+h_1$, 2) $\beta > h_0+h_1$.

С л у ч а й 1. Умножим второе уравнение в (3.3) на $h_1\Big(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ и вычтем из первого уравнения полученное второе:

$$h_1(h_1+h_0) - \alpha h_1 - (\beta-\alpha)\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)h_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi_1(t)f''(t)\,dt, \tag{3.4}$$

где $\varphi_1(t) = x_2 - t - \Big(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)h_1$ — линейная функция по переменной t, обладающая свойствами

$$\varphi_1\Big(x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}h_1\Big) = 0, \quad \varphi_1(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}h_1 > 0, \quad \varphi_1(x_2) = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\Big)h_1 < 0.$$

Значит,

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi_1(t)f''(t)\,dt\right| \leq \|f''\|_{L_\infty[x_1;x_2]} \int\limits_{x_1}^{x_2} |\varphi_1(t)|\,dt = \Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)h_1^2\|f''\|_{L_\infty[x_1;x_2]}. \tag{3.5}$$

Обозначим через $\psi_1(\beta)$ левую часть равенства (3.4) и оценим снизу модуль функции $\psi_1(\beta)$ при $\beta \le h_0 + h_1$. Поскольку $\alpha \le 0$, то $\psi_1(h_0+h_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}h_1(h_1+h_0-\alpha) > 0$. Далее заметим, что $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\psi_1(\beta) = -\infty$ и поэтому

$$\psi_1(\beta) \ge \psi_1(h_0+h_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}h_1(h_1+h_0-\alpha) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}h_1(h_1+h_0). \tag{3.6}$$

Из полученных оценок (3.5), (3.6) и равенства (3.4) выводим неравенство

$$\frac{\sqrt{2}}{2}h_1(h_1+h_0) \le \Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)h_1^2\|f''\|_{L_\infty[x_1;x_2]},$$

которое эквивалентно неравенству (3.1).

С л у ч а й 2: $\beta > h_0 + h_1$. Покажем, что тогда величину $\|f''\|_{L_\infty[x_1;x_2]}$ можно оценить снизу меньшей константой, чем $(\sqrt{2}+1)\dfrac{h_1+h_0}{h_1}$. В системе равенств (3.3) умножим первое уравнение на $\Big(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$, а второе — на h_1, и вычтем из полученного первого уравнения второе:

$$h_1\Big[\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)(h_1+h_0-\alpha)-(\beta-\alpha)\Big] = \int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi_2(t)f''(t)\,dt, \tag{3.7}$$

где $\varphi_2(t) = \Big(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)(x_2-t)-h_1$ — линейная функция по переменной t, обладающая свойствами

$$\varphi_2(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}h_1, \quad \varphi_2(x_2) = -h_1.$$

Таким образом, $\varphi_2(t) < 0$ при $x_1 \le t \le x_2$ и поэтому

$$\Big|\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi_2(t)f''(t)\,dt\Big| \le \|f''\|_{L_\infty[x_1;x_2]}\int\limits_{x_1}^{x_2}(-\varphi_2(t))\,dt = \frac{2+\sqrt{2}}{4}h_1^2\|f''\|_{L_\infty[x_1;x_2]}. \tag{3.8}$$

Обозначим через $\psi_2(\beta)$ левую часть равенства (3.7) и оценим снизу модуль функции $\psi_2(\beta)$ при $\alpha \le 0$, $\beta > h_0+h_1$. Имеем $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\psi_2(\beta) = -\infty$, $\psi_2(h_0+h_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}h_1(h_1+h_0-\alpha) < 0$. Поэтому на полуоси $[h_0+h_1;+\infty)$ функция $\psi_2(\beta)$ является отрицательной и монотонно убывает. Значит, при $\beta > h_0+h_1$ справедливо неравенство

$$|\psi_2(\beta)| \ge |\psi_2(h_0+h_1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}h_1(h_1+h_0-\alpha) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}h_1(h_1+h_0). \tag{3.9}$$

Из оценок (3.8), (3.9) и равенства (3.7) получаем

$$\|f''\|_{L_\infty[x_1;x_2]} \ge \frac{(2\sqrt{2}-2)(h_1+h_0)}{h_1}. \tag{3.10}$$

Константа в правой части неравенства (3.10) меньше, чем $(\sqrt{2}+1)\dfrac{h_1+h_0}{h_1}$. Вывод из проведенных рассуждений: при $\alpha \le 0$ и любом значении числа $\beta \in \mathbb{R}$ для любой функции $f \in F(y^*)$ имеет место неравенство (3.1).

Для завершения доказательства теоремы 3 осталось рассмотреть случай $\alpha > 0$.

В случае равномерной сетки $\overline{\Delta}$, как пишет Ю. Н. Субботин [1], при $\alpha > 0$ нужно взять $[y_2^*, y_1^*, y_0^*] = -1$ (т. е. $y_2^* = -h_1(h_0 + h_1)$), заменить y_k^* на $-y_k^*$ и вместо функции $f(x)$ рассмотреть функцию $-f(x)$. Аналогичная процедура проходит и в общем случае для произвольной сетки Δ.

Покажем, что действуя подобным методом, можно получить при любом $k \geq 2$ неравенство

$$\|f''\|_{L_\infty[x_k;x_{k+1}]} \geq (\sqrt{2}+1)\frac{h_{k-1}+h_k}{h_k}. \tag{3.11}$$

Для этого положим $y_0^* = y_1^* = \cdots = y_k^* = 0$. Снова дальнейшее построение последовательности $y^* \in Y$ зависит от знака числа $\alpha = f'(x_k)$. Если $\alpha \leq 0$, то последующие значения $y_{k+1}^*, y_{k+2}^*, \dots$ определяем последовательно из равенств

$$[y_{k+1}^*, y_k^*, y_{k-1}^*] = 1, \quad [y_{k+2}^*, y_{k+1}^*, y_k^*] = 1, \dots .$$

Если же $\alpha < 0$, то действуем отмеченным методом Ю. Н. Субботина [1]. Таким образом, предложенная схема доказательства приводит к оценке (3.11).

Из (3.1) и (3.11) выводим оценку снизу для величины $B_{\infty,\Delta}(2,2)$:

$$B_{\infty,\Delta}(2,2) \geq (\sqrt{2}+1)\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{h_k+h_{k+1}}{h_{k+1}}.$$

Теорема полностью доказана. $\square$

Теорема 4. *Для любой сетки Δ при $s \geq 3$ справедливо неравенство*

$$B_{\infty,\Delta}(s,2) \leq \max\Big\{\frac{2h_1}{h_0}; A; B\Big\},$$

где

$$A = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{h_k+3h_{k+2}}{h_{k+1}}, \quad B = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{3h_k+h_{k+2}}{h_{k+1}}.$$

Доказательство. На отрезке $[x_0; x_1]$ строим квадратный трехчлен вида

$$f(x) = y_0 + \Big(\frac{y_2-y_0}{h_0+h_1} - 2h_1[y_2,y_1,y_0]\Big)(x-x_0) + \frac{h_1}{h_0}[y_2,y_1,y_0](x-x_0)^2.$$

Нетрудно проверить свойства этого трехчлена:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f'(x_1) = \frac{y_2-y_0}{h_0+h_1},$$

и если $y \in Y$, то

$$|f''(x)| \leq \frac{2h_1}{h_0}, \quad x \in (x_0; x_1). \tag{3.12}$$

На следующем отрезке $[x_1; x_2]$ функцию $f \in F(y)$ строим в виде параболического сплайна с одним внутренним узлом в середине $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ этого отрезка. Положим

$$f(x) = y_1 + \frac{y_2-y_0}{h_1+h_0}(x-x_1) + (x-x_1)^2\Big(\frac{3h_0}{2h_1}[y_2,y_1,y_0] - \frac{h_2}{2h_1}[y_3,y_2,y_1]\Big)$$
$$+ \Big(x - x_2 + \frac{h_1}{2}\Big)_+^2\Big(\frac{2h_2}{h_1}[y_3,y_2,y_1] - \frac{2h_0}{h_1}[y_2,y_1,y_0]\Big), \quad x \in [x_1; x_2],$$

где $t_+ = \max\{0; t\}$. Нетрудно проверить свойства этого сплайна:

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f'(x_1) = \frac{y_2-y_0}{h_0+h_1}, \quad f'(x_2) = \frac{y_3-y_1}{h_1+h_2}.$$

Если $y \in Y$, то справедливы неравенства

$$|f''(x)| \le \frac{3h_0 + h_2}{h_1}, \quad x \in \Big(x_1; x_1 + \frac{h_1}{2}\Big),$$

$$|f''(x)| \le \frac{h_0 + 3h_2}{h_1}, \quad x \in \Big(x_1 + \frac{h_1}{2}; x_2\Big).$$

Аналогично построим функцию $f \in F(y)$ на следующих отрезках. Если $f \in F(y)$ уже построена на отрезке $[x_0; x_k]$, то на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ эту функцию строим в виде пераболического сплайна с внутренним узлом в середине $\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ этого отрезка, исходя из условий

$$f(x_k) = y_k, \quad f(x_{k+1}) = y_{k+1}, \quad f'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{h_{k-1} + h_k}, \quad f'(x_{k+1}) = \frac{y_{k+2} - y_k}{h_k + h_{k+1}}.$$

Этими условиями однозначно определяется функция

$$f(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{h_{k-1} + h_k}(x - x_k) + (x - x_k)^2 \Big\{ \frac{3h_{k-1}}{2h_k}[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}] - \frac{h_{k+1}}{2h_k}[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] \Big\}$$

$$+ \Big(x - x_{k+1} + \frac{h_k}{2}\Big)_+^2 \Big\{ \frac{2h_{k+1}}{h_k}[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] - \frac{2h_{k-1}}{h_k}[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}] \Big\}, \quad x \in (x_k; x_{k+1}).$$

При этом ясно, что

$$|f''(x)| \le \max\Big\{ \frac{3h_k + h_{k+2}}{h_{k+1}}; \frac{h_k + 3h_{k+2}}{h_{k+1}} \Big\}, \quad x \in (x_k; x_{k+1}).$$

Теперь, если $y \in Y$, то из (3.11), (3.12) и последнего неравенства следует утверждение теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Subbotin Yu.N.** Some extremal problems of interpolation and interpolation in the mean // East J. Approx. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 155–167.
2. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
3. **Субботин Ю.Н., Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 25, № 2. С. 200–225.
4. **Favard J.** Sur I'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no. 9. P. 281–306.
5. **Рябенький В.С., Филиппов А.Ф.** Об устойчивости разностных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 171 с.
6. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Порядок наилучшей сплайн-аппроксимации некоторых классов функций // Мат. заметки. 1970. Т. 7, № 1. С. 31–42.
7. **Muir Th.** The theory of determinants. Vol. 1. NY : Preprinted in Dover Publ., 1960. 503 p.
8. **Gautschi W.** On inverses of Vandermonde and confluent Vandermonde matrices // Numer. Math. 1962. Vol. 4, no. 1. P. 117–123. doi: 10.1007/BF01386302 .

Поступила 17.02.2022
После доработки 19.08.2022
Принята к публикации 22.08.2022

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. Some extremal problems of interpolation and interpolation in the mean. *East J. Approx.*, 1996, vol. 2, no. 2, pp. 155–167.
2. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and corresponding derivatives. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
3. Subbotin Yu.N., Novikov S.I., Shevaldin V.T. Extremal functional interpolation and splines. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 200–225 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225 .
4. Favard J. Sur I'interpolation. *J. Math. Pures Appl.*, 1940, vol. 19, no. 9, pp. 281–306.
5. Ryaben'kii V.S., Filippov A.F. *Ob ustoichivosti raznostnykh uravnenii* [On the stability of difference equations]. Moscow: Gostehizdat, 1956, 171 p.
6. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Order of the best spline approximations of some classes of functions. *Math. Notes*, 1970, vol. 7, no. 1, pp. 20–26. doi: 10.1007/BF01093336 .
7. Muir Th. *The theory of determinants.* Vol. 1. N.-Y.: Preprinted in Dover Publication, 1960, 503 p.
8. Gautschi W. On inverses of Vandermonde and confluent Vandermonde matrices. *Numer. Math.*, 1962, vol. 4, no. 1, pp. 117–123. doi: 10.1007/BF01386302 .

Received February 17, 2022
Revised August 19, 2022
Accepted August 22, 2022

Valerii Trifonovich Shevaldin, Dr.Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. T. Shevaldin. On Yu. N. Subbotin's circle of ideas in the problem of local extremal interpolation on the semiaxis. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 237–249 .