ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.518.36

УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ СУММ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ РЯДОВ ФУРЬЕ — УОЛША ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ПРОСТРАНСТВАМ L^p

С. А. Теляковский, Н. Н. Холщевникова

В работе рассматривается вопрос: при каких условиях на строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ для всякой функции f ограниченной вариации сумма ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} c_k(f)w_k(x)\Bigg|,$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье — Уолша функции f, принадлежит пространству $L^p[0,1)$ при $p>1$. Для случая $p=\infty$ доказано, что такой последовательности не существует, а для конечных $p>1$ получены достаточные условия на последовательность $\{n_j\}$, аналогичные полученным первым автором в тригонометрическом случае.

Ключевые слова: ряды Фурье по системе Уолша, функции ограниченной вариации, L^p-пространства.

S. A. Telyakovskii, N. N. Kholshchevnikova. Conditions under which the sums of absolute values of blocks in the Fourier–Walsh series of functions of bounded variation belong to spaces L^p.

In this paper, the following question is considered: under what conditions on a strictly increasing sequence of natural numbers $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ does the sum of the series

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} c_k(f)w_k(x)\Bigg|,$$

where $c_k(f)$ are the Walsh–Fourier coefficients of a function f, belong to the space $L^p[0,1)$, $p>1$, for any function f of bounded variation? For the case $p=\infty$, it is proved that such a sequence does not exist. For finite $p>1$, sufficient conditions are obtained for the sequence $\{n_j\}$; these conditions are similar to the ones obtained by the first author in the trigonometric case.

Keywords: Walsh–Fourier series, functions of bounded variation, L^p-spaces.

MSC: 42C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-226-236

1. Введение

Рассмотрим, при каких условиях на строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ для всякой функции f ограниченной вариации сумма ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} c_k(f)w_k(x)\Bigg|,$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье — Уолша функции f, принадлежит пространству $L^p[0,1)$ при $p>1$.

Вопросы о сходимости по модулям блоков тригонометрических рядов Фурье функций ограниченной вариации были поставлены в работах С. А. Теляковского [1–3]. Как известно, ряд

Фурье 2π-периодической функции f ограниченной вариации сходится всюду; в точках непрерывности f — к ее значению, а в точках разрыва — к среднему арифметическому пределов слева и справа (теорема Жордана — Дирихле). Абсолютной сходимости такого ряда может не быть.

Для тригонометрических рядов Фурье запишем ряд по модулям блоков, определяемых последовательностью $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|, \tag{1}$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции f.

С. А. Теляковский доказал, что если последовательность $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ является объединением конечного числа лакунарных последовательностей, то ряд (1) для всякой функции ограниченной вариации всюду сходится. Получается сходимость более сильная, чем поточечная сходимость и более слабая, чем абсолютная сходимость. Затем в совместной работе А. С. Белова и С. А. Теляковского [4] было получено необходимое и достаточное условие на последовательность $\{n_j\}$, для того чтобы выполнялось условие сходимости ряда (1) для всякой функции ограниченной вариации, причем сумма ряда является ограниченной функцией. А именно, это условие

$$\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{n_j}\min(n_i,n_{j+1}-n_j)\le M,\quad i=1,2,\dots,$$

где M — некоторая абсолютная постоянная.

В статье [3] С. А. Теляковский доказал, что если для строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_j\}$ сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\ln\max(n_j,n_{j+1}-n_j+1)}{n_j},$$

то для всякой 2π-периодической функции f ограниченной вариации сходится ряд (1), и его сумма принадлежит L.

В 2007 г. Р. М. Тригуб [5] доказал, что это условие на последовательность $\{n_j\}$ является и необходимым в данном вопросе. При этом само условие, как показала О. И. Кузнецова (см. [5]), можно записать в эквивалентной форме

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\log(n_{j+1}-n_j+1)}{n_{j+1}}<\infty.$$

Интересно заметить, что в обоих сформулированных случаях возникала модельная функция, т. е. функция ограниченной вариации, для которой условие, необходимое для выполнения требуемого свойства на всем классе функций ограниченной вариации, является необходимым и для конкретно этой функции. Это функция

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k},\quad x\in(0,2\pi). \tag{2}$$

С. А. Теляковский предложил рассмотреть аналогичный вопрос для рядов по системе Уолша.

Система Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ рассматривается обычно на полуинтервале $[0,1)$ или на двоичной группе. Пусть n — неотрицательное целое число, имеющее двоичное разложение $n=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k 2^k$, где $\varepsilon_k=0$ или 1. Далее, пусть двоичное разложение числа $x\in[0,1)$ имеет вид

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{2^{k+1}},$$

где $x_k = 0$ или 1 — двоичные цифры числа x, причем в случае двоично-рационального числа x берется разложение, содержащее конечное число единиц. Тогда функции системы Уолша на $[0,1)$ в нумерации Пэли можно определить следующим образом:

$$w_n(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k x_k}, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{3}$$

Для случая $p = 1$ в статье [6] получен критерий, которому должна удовлетворять последовательность $\{n_j\}$ для того, чтобы сумма ряда Фурье функции ограниченной вариации

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Bigl| \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x) \Bigr| \tag{4}$$

принадлежала пространству L. Чтобы его сформулировать, введем еще несколько обозначений. *Вариацией* числа $n = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$ называется величина

$$V(n) = \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}| + \varepsilon_0.$$

Пусть n и m имеют двоичные разложения $n = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \dots + 2^{l_\nu} + 2^{l_{\nu+1}} + \dots + 2^{l_s}$, $m = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_\mu} + 2^{l_{\nu+1}} + \dots + 2^{l_s}$, где показатели записаны в возрастающем порядке, и $l_\nu \neq m_\mu$. Тогда положим $\tilde{n} = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \dots + 2^{l_\nu}$, $\tilde{m} = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_\mu}$,

$$V(n, m) = V(\tilde{n}) + V(\tilde{m}).$$

Справедлива

Теорема А. *Пусть $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Для того чтобы для каждой функции ограниченной вариации сумма ряда* (4)*, где c_n — коэффициенты Фурье — Уолша этой функции, принадлежала пространству $L[0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{V(n_j, n_{j+1})}{n_{j+1}}. \tag{5}$$

Условие на последовательность $\{n_j\}$, сформулированное в теореме, является необходимым для сходимости ряда из блоков уже для одной фиксированной функции ограниченной вариации: $f_0 = \chi_{[0,1/3)}$, т. е. она выступает в этой теореме как модельная функция.

Отметим еще, что условие на $\{n_j\}$ строго слабее, чем соответствующее условие в тригонометрическом случае.

Будем говорить, что натуральное число n лежит в k-й двоичной пачке, если $2^k \le n < 2^{k+1}$. Сходимость ряда (5) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{\{j\colon 2^k \le n_j < n_{j+1} < 2^{k+1}\}} V(n_j, n_{j+1}).$$

Доказательство теоремы существенно опиралось на оценку для констант Лебега ядер Дирихле в случае системы Уолша

$$\frac{V(n)+1}{3} \le L_n \le V(n);$$

множители $1/3$ и 1 в ней точны.

В работе В. П. Заставного [7] представлена более общая постановка вопроса, т. е. вместо последовательности $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ рассматриваются конечные подмножества, которые могут пересекаться. Сформулируем один из результатов этой работы в нашем случае сходимости по блокам. Оказывается, если при фиксированном $p \in [1, \infty]$ для модельной функции (2) выполняется условие принадлежности ряда модулей блоков ее ряда Фурье пространству L^p, то и для ряда Фурье произвольной функции f ограниченной вариации для той же последовательности номеров сумма ряда из модулей блоков ряда Фурье функции f принадлежит L^p. У А. С. Белова (2006) для модельной функции был получен критерий принадлежности пространствам L^p для $1 < p < \infty$, а в совместной работе А. С. Белова и С. А. Теляковского — для L^∞. Доказательство В. П. Заставного короткое и прозрачное, а условия на последовательность $\{n_j\}$ для модельной функции достаточно сложные. В связи с этим достаточные условия на последовательность тоже представляют интерес и были получены и С. А. Теляковским, и В. П. Заставным.

Вопросы, близкие тем, о которых здесь говорилось, рассматривались раньше В. Н. Темляковым [8] и затем А. П. Павловым [9]. В. Н. Темляков рассматривал сходимость тригонометрических рядов Фурье функций классов Липшица, причем кроме разбиения на блоки с помощью последовательности $\{n_k\}$ эти блоки умножались на степенные множители n_k^β. Продолжая исследования В. Н. Темлякова, А. П. Павлов рассмотрел не только тригонометрический случай, но и ряды по системе Уолша.

2. Случай L^∞

Мы рассматриваем систему Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ на полуинтервале $[0, 1)$.

Из формулы (3) сразу следуют два известных свойства функций Уолша, которыми мы будем пользоваться:

$$w_n(x)w_n(y) = w_n(x \oplus y), \quad w_n(x)w_m(x) = w_{n\oplus m}(x).$$

Здесь

$$x \oplus y = z, \quad z_k = x_k + y_k (\mathrm{mod} 2), \quad n \oplus m = s, \quad s_k = n_k + m_k (\mathrm{mod} 2).$$

Поскольку для двоично-рациональных чисел мы берем разложения с конечным числом единиц, считается, что сумма $x \oplus y$ не определена, если последовательноть z_k содержит бесконечное число единиц, идущих подряд. Для любого числа x множество чисел y, для которых не определена сумма $x \oplus y$, не более чем счетно, и поэтому оно никак не влияет на наши дальнейшие рассуждения.

Рассмотрим ядра Дирихле для системы Уолша

$$D_n = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

и приведем их свойства.

Подобно тригонометрическому случаю для частичных сумм ряда Фурье—Уолша функции $f(x)$ справедлива формула

$$S_n(x, f) = \int_0^1 f(t) D_n(x \oplus t)\, dt = \int_0^1 f(x \oplus t) D_n(t)\, dt.$$

Нетрудно видеть, что ядро Дирихле с номером 2^k равно 2^k на полуинтервале $[0, 1/2^k)$ и нулю в остальных точках из $[0, 1)$ (это утверждение называется леммой Пэли). Из равенства $w_{2^k+s} = w_{2^k} \cdot w_s$, $0 \le s \le 2^k - 1$, следует (см. [10, формула (1.4.11)]), что если $n = 2^k + l$, где $1 \le l \le 2^k$, то ядро Дирихле представляется в виде

$$D_n(x) = D_{2^k}(x) + w_{2^k}(x) D_l(x). \tag{6}$$

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые формулы, полученные в [6], которые мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть f — функция ограниченной вариации на* $[0,1)$*,* $c_n = c_n(f)$ *— ее коэффициенты Фурье — Уолша. Тогда*

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) w_n(t)\,dt = -\int_0^1 W_n(t)\,df(t),$$

где $W_n(t) = \int_0^t w_n(u)du$ *и выполняется равенство*

$$\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x) = -\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} w_n(x) \int_0^1 W_n(t)\,df(t) = -\int_0^1 df(t) \int_0^t \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} w_n(x) w_n(u)\,du$$

$$= -\int_0^1 df(t) \int_0^t (D_{n_{j+1}}(x \oplus u) - D_{n_j}(x \oplus u))\,du.$$

В лемме первое равенство получается интегрированием по частям. Во втором функция $W_n(t)$ записывается через интеграл и меняется порядок интегрирования, причем внешний интеграл Лебега — Стилтьеса, в последнем суммы произведений функций Уолша выражены через ядра Дирихле.

Докажем теперь лемму, на которую будем опираться в теоремах 1 и 2.

Лемма 2. *Если* $2^k \le n < 2^{k+1}$ *и*

$$x \in \Big[\frac{\nu}{2^k}, \frac{\nu+1}{2^k}\Big),$$

то

$$\int_0^x D_n(x \oplus u)\,du = \int_{\nu/2^k}^x D_n(x \oplus u)\,du.$$

Доказательство. Известно (см., например, утверждение 1.2.1 из [10]), что если $x \in [0,1)$ фиксировано, а u пробегает двоичный интервал $\Big[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\Big)$, то $x \oplus u$ тоже, за исключением, быть может, счетного множества точек, пробегает двоичный интервал того же ранга $\Big[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\Big)$. Так как x по условию принадлежит двоичному интервалу $\Big[\frac{\nu}{2^k}, \frac{\nu+1}{2^k}\Big)$, то при $\frac{\nu}{2^k} \le u < \frac{\nu+1}{2^k}$ получим $0 \le x \oplus u < 1/2^k$, так как $x \oplus x = 0$ лежит именно в этом двоичном интервале. Следовательно, функция $D_{2^k}(x \oplus u)$ равна 2^k на $[\nu/2^k, (\nu+1)/2^k)$ и равна нулю на его дополнении в $[0,1)$. Функция w_{2^k} на каждом двоичном интервале длины $1/2^k$ принимает значения $+1$ на одной его половине и -1 на второй, а функция D_{n-2^k} принимает постоянное значение на каждом двоичном интервале длины $1/2^k$, так как является суммой функций w_m с номерами, меньшими 2^k. Поэтому интеграл от произведения w_{2^k} и D_{n-2^k} по каждому двоичному интервалу ранга k равен нулю. Следовательно, $\int_{[0,1)\setminus[\nu/2^k,(\nu+1)/2^k)} D_n(x \oplus u)\,du = 0$ и выполняется утверждение леммы.

Пусть f — функция ограниченной вариации на промежутке $[0,1)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x)$ — ее ряд Фурье — Уолша. В случае системы Уолша такие ряды сходятся в каждой точке непрерывности функции f (и даже в точках, где выполняется более слабое условие непрерывности), но могут расходиться в точках разрыва, хотя и ограниченно. Пусть $\{n_j\}$ — строго возрастающая последовательность номеров.

Для рядов по системе Уолша в случае $p = \infty$ получается совсем другой результат, чем в тригонометрическом случае, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда найдется функция f ограниченной вариации, для которой существенная верхняя грань величины*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x)\right|,$$

где $c_n = c_n(f)$ — коэффициенты Фурье — Уолша функции f, равна бесконечности.

Доказательство. Заметим, что если для функции ограниченной вариации f конечна величина

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n(f) w_n(x)\right|,$$

то это справедливо и для любой подпоследовательности $\{n_j\}$. Выберем такую подпоследовательность последовательности $\{n_j\}$, обозначая ее по-прежнему $\{n_j\}$, что если $2^{k_j} \le n_j < 2^{k_j+1}$, то $2^{k_{j+1}} \le n_{j+1} < 2^{k_{j+1}+1}$, где $k_{j+1} \ge k_j + 4$.

Определим последовательность вложенных двоичных интервалов $\Delta_j := \Big[\dfrac{\nu_j}{2^{k_j}}, \dfrac{\nu_j+1}{2^{k_j}}\Big)$, задаваемых числами $\{\nu_j\}$. Положим $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Пусть построено четное число $j = 2m$ вложенных интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_{2m}$. Выберем ν_{j+1} и ν_{j+2} так, чтобы выполнялись условия

$$\Delta_{j+1} \subset \Big[\frac{\nu_j}{2^{k_j}} + \frac{3}{2^{k_j+2}}, \frac{\nu_j}{2^{k_j}} + \frac{7}{2^{k_j+3}}\Big) \tag{7}$$

и

$$\Delta_{j+2} \subset \Big[\frac{\nu_{j+1}}{2^{k_{j+1}}}, \frac{\nu_{j+1}}{2^{k_{j+1}}} + \frac{1}{2^{k_{j+1}+3}}\Big). \tag{8}$$

В силу неравенства $k_{j+1} \ge k_j + 4$ это возможно. Затем построение повторяется. Пусть

$$\{x\} = \bigcap_{j=1}^{\infty}\Big[\frac{\nu_j}{2^{k_j}}, \frac{\nu_{j+1}}{2^{k_j}}\Big].$$

В силу теоремы Кантора это пересечение непусто и, так как длины отрезков стремятся к нулю, состоит из одной точки. Из построения следует, что x не может быть двоично-рациональной точкой. Действительно, пусть $l/2^m$ — двоично-рациональное число. Так как длины отрезков Δ_j стремятся к нулю при $j \to \infty$, а концы их двоично-рациональны, то для отрезка с большим номером j число $l/2^m$ может быть только концом этого отрезка. Но тогда на шаге $j+1$ или $j+2$ точка $l/2^m$ не войдет в пересечение промежутков Δ_{j+1} и Δ_{j+2} в силу построения.

Пусть $f(t) = \chi_{[0,x)}(t)$ — характеристическая функция промежутка $[0,x)$, где x — построенная точка из $[0,1)$. В этом случае согласно лемме 1

$$\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x) = -\int_0^1 d\chi_{[0,x)}(t)\int_0^t \big(D_{n_{j+1}}(x\oplus u) - D_{n_j}(x\oplus u)\big)\,du$$

$$= \int_0^x \big(D_{n_{j+1}}(x\oplus u) - D_{n_j}(x\oplus u)\big)\,du.$$

Покажем, что справедлива оценка

$$\left|\int_0^x \big(D_{n_{j+1}}(x\oplus u) - D_{n_j}(x\oplus u)\big)\,du\right| \ge \frac{1}{4}.$$

Имеем в силу леммы 2 для четных j и формул (7) и (6)

$$\int_0^x D_{n_j}(x \oplus u)\,du = \int_{\nu_j/2^{k_j}}^x D_{n_j}(x \oplus u)\,du = \int_{\nu_j/2^{k_j}}^x \big(D_{2^{k_j}}(x \oplus u) + w_{2^{k_j}}(x \oplus u) D_{n_j - 2^{k_j}}(x \oplus u)\big)\,du$$

$$\geq 2^{k_j}\Big(x - \frac{\nu_j}{2^{k_j}}\Big) - \frac{n_j - 2^{k_j}}{2^{k_j+2}} \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Действительно, так как точка x принадлежит также Δ_{j+1}, то расстояние от левого конца промежутка Δ_j, равного $\dfrac{\nu_j}{2^{k_j}}$, до точки x не меньше, чем $\dfrac{3}{2^{k_j+2}}$. Первое слагаемое под интегралом $D_{2^{k_j}}$ принимает на промежутке интегрирования $\Big[\dfrac{\nu_j}{2^{k_j}}, x\Big)$ значение 2^{k_j}. Значит, интеграл от первого слагаемого больше или равен $3/4$.

Рассмотрим второе слагаемое. Отображение $u \mapsto x \oplus u$ сохраняет меру и переводит Δ_j в $\Big[0, \dfrac{1}{2^{k_j}}\Big)$. Следовательно, $D_{n_j - 2^{k_j}}(x \oplus u) = n - 2^{k_j}$ на Δ_j. Далее, правая половина Δ_j переходит в левую половину $\Big[0, \dfrac{1}{2^{k_j}}\Big)$, так как $x \mapsto 0$, а левая половина Δ_j — в правую половину $\Big[0, \dfrac{1}{2^{k_j}}\Big)$. Таким образом, если u пробегает $\Big[\dfrac{\nu_j}{2^{k_j}}, x\Big]$, то $w_{2^{k_j}}(x \oplus u)$ принимает значение -1 на отрезке длины $\dfrac{1}{2}2^{-k_j}$ и значение $+1$ на множестве меры $\geq \dfrac{1}{4}2^{-k_j}$. В результате получается, что интеграл от второго слагаемого не меньше, чем $-\dfrac{n_j - 2^{k_j}}{2^{k_j+2}} \geq -1/4$.

Оценим далее, учитывая (8), интеграл

$$\int_0^x D_{n_{j+1}}(x \oplus u)\,du = \int_{\nu_{j+1}/2^{k_{j+1}}}^x D_{n_{j+1}}(x \oplus u)\,du \leq \frac{n_{j+1}}{2^{k_{j+1}+3}} \leq \frac{2^{k_{j+1}+1}}{2^{k_{j+1}+3}} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда следует приведенная выше оценка для модуля разности этих интегралов для четных j. В силу этого для функции $f(t) = \chi_{[0,x)}(t)$ имеем

$$\sum_j \Bigg| \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n(f) w_n(x) \Bigg| = \sum_j \Bigg| \int_0^x D_{n_{j+1}}(x \oplus u) - D_{n_j}(x \oplus u)\,du \Bigg| = \infty.$$

Так как x не является двоично-рациональным числом и сумма ряда в x равна бесконечности, то для произвольно большого M найдется номер N такой, что частичная сумма этого ряда с номером N будет больше M в точке x, а тогда и в некоторой окрестности x в силу определения функций Уолша. Отсюда заключаем, что сумма ряда не принадлежит пространству L^∞. В силу произвольности первоначально взятой последовательности $\{n_j\}$ теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В доказательстве этой теоремы существенную роль сыграла специфика ядер Дирихле для системы Уолша.

3. Достаточность для $p > 1$

Рассмотрим далее, при каких условиях на строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ для всякой функции ограниченной вариации f сумма ряда

$$\sum_{j=1}^\infty \Bigg| \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n(f) w_n(x) \Bigg|, \tag{9}$$

где $c_n(f)$ — коэффициенты Фурье—Уолша функции f, принадлежит пространству $L^p[0,1)$ при конечных $p>1$.

Норма функции f в $L^p[0,1)$ $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$. Обозначим через A_k множество натуральных чисел из k-й двоичной пачки, т. е. $A_k = \{n\colon 2^k \le n < 2^{k+1}\}$.

Лемма 3. *Пусть числа $n > m$ натуральные и $1 < p < \infty$. Тогда*

$$\|D_n - D_m\|_p := \left(\int\limits_0^1 |D_n(x) - D_m(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le C_p(n-m)^{1-1/p}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения ядер Дирихле следует, что $|D_n(x) - D_m(x)| \le n-m$ на $[0,1)$. С другой стороны, известно, что $|D_n(x)| \le x^{-1}$, $x \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ (см., например, [10, § 1.4, (1.4.6)]). Применяя первое неравенство при $0 \le x < (n-m)^{-1}$ и неравенство $|D_n(x) - D_m(x)| \le |D_n(x)| + |D_m(x)| \le 2x^{-1}$ при $x \ge (n-m)^{-1}$, получаем

$$\|D_n - D_m\|_p^p = \int\limits_0^1 |D_n(x) - D_m(x)|^p\,dx \le \int\limits_0^{1/(n-m)} (n-m)^p\,dx + \int\limits_{1/(n-m)}^1 (2/x)^p\,dx$$

$$= (n-m)^{p-1} + 2^p\frac{(n-m)^p - 1}{p-1} \le (n-m)^{p-1}\Big(1 + \frac{2^p}{p-1}\Big),$$

т. е. выполняется требуемая оценка.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Для того чтобы для каждой функции f ограниченной вариации сумма ряда по блокам*

$$\sum_{j=1}^\infty \Bigg|\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x)\Bigg|, \tag{10}$$

где c_n — коэффициенты Фурье — Уолша этой функции, принадлежала пространству $L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$, достаточно, чтобы сходился ряд из разностей ядер Дирихле

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_{j+1}}\|D_{n_{j+1}} - D_{n_j}\|_p \tag{11}$$

или равносходящийся с ним ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \sum_{\{j\colon 2^k \le n_j < n_{j+1} < 2^{k+1}\}} \|D_{n_{j+1}} - D_{n_j}\|_p. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, выполнено условие (12). Добавим в последовательность $\{n_j\}$ те числа $2^k - 1$ и 2^k $(k = 1, 2, \ldots)$, которых в ней нет. Докажем, что ряд из блоков по расширенной последовательности принадлежит L_p, и тем более лежит в L_p исходный ряд (10). Выведем из леммы 3, что условие (12) выполнено и для расширенной последовательности. Действительно, сумма слагаемых, которые добавятся в (12), не превосходит $C\sum_k 2^{-k}2^{k(1-1/p)} \le C(p)$. Будем далее обозначать через $\{n_j\}$ расширенную последовательность.

Теперь, если в новой последовательности числа n_j и n_{j+1} лежат в разных двоичных пачках, то $n_j = 2^k - 1$, а $n_{j+1} = 2^k$ для некоторого k. Соответствующий блок $|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} c_k(f)w_k(x)|$ состоит из одного слагаемого, равного $|c_{2^k}|$. Коэффициенты Фурье — Уолша функции ограниченной вариации на $[0,1)$ оцениваются формулой $|c_n(f)| \le \dfrac{1}{n}V_{[0,1)}(f)$ (см. [10, утверждение 2.7.5]). Отсюда следует, что сумма ряда из коэффициентов $|c_{2^k}(f)|$ не превосходит вариации f.

Теперь рассмотрим блок с номерами n_j и n_{j+1} из k-й пачки

$$\Big|\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n\Big|, \quad 2^k \le n_j < n_{j+1} < 2^{k+1}. \tag{13}$$

Мы воспользуемся леммой 1:

$$\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x) = -\int_0^1 df(t)\int_0^t \big(D_{n_{j+1}}(x\oplus u) - D_{n_j}(x\oplus u)\big)\,du.$$

Аналогично рассуждениям при доказательстве теоремы 1 получаем равенство

$$\int_0^t \big(D_{n_{j+1}}(x\oplus u) - D_{n_j}(x\oplus u)\big)\,du = \int_{l_k(t)}^t \big(D_{n_{j+1}}(x\oplus u) - D_{n_j}(x\oplus u)\big)\,du,$$

где $l_k(t) = [2^k t]/2^k$, $[l]$ — целая часть числа l для $t \in [0,1)$, причем $t \in [l_k(t), l_k(t) + 1/2^k)$. Теперь мы можем оценить норму блока (13), применяя в последнем неравенстве обобщенное неравенство Минковского:

$$\Big\|\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(\cdot)\Big\|_p = \Big\|\int_0^1 df(t)\int_0^t \big(D_{n_{j+1}}(\cdot\oplus u) - D_{n_j}(\cdot\oplus u)\big)\,du\Big\|_p$$

$$= \Big\|\int_0^1 df(t)\int_{l_k(t)}^t \big(D_{n_{j+1}}(\cdot\oplus u) - D_{n_j}(\cdot\oplus u)\big)\,du\Big\|_p$$

$$\le \Big\|\int_0^1 dv(t)\Big|\int_{l_k(t)}^t \big(D_{n_{j+1}}(\cdot\oplus u) - D_{n_j}(\cdot\oplus u)\big)du\Big|\Big\|_p$$

$$\le \int_0^1 dv(t)\int_{l_k(t)}^t \big\|D_{n_{j+1}}(\cdot\oplus u) - D_{n_j}(\cdot\oplus u)\big\|_p\,du \le V(1)2^{-k}\|D_{n_{j+1}} - D_{n_j}\|_p.$$

Суммируя полученные неравенства по j и применяя (12), получим, что ряд (10) лежит в L_p.

Эквивалентность условий (11) и (12) нетрудно вывести из леммы 3.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Надо заметить, что в случае $p = 1$ теорему А можно было сформулировать тоже с использованием норм разностей ядер Дирихле, что следует из доказанной там же теоремы 3. Причем в случае $p = 1$ достаточное условие является и необходимым.

Следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы 2 и леммы 3.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — *строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(n_{j+1} - n_j)^{(p-1)/p}}{n_{j+1}} < \infty$$

является достаточным для того, чтобы для всякой функции f *ограниченной вариации сумма ряда* (9) *принадлежала пространству* $L^p[0,1)$.

Замечания рецензента и обсуждение работы с Ю. В. Малыхиным были весьма полезны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Теляковский С.А.** О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 378–386.
2. **Теляковский С.А.** О равномерной сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 318–326.
3. **Telyakovskii S.A.** Some properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approx. 2004. Vol. 10, no. 1–2. P. 215–218.
4. **Белов А.С., Теляковский С.А.** Усиление теорем Дирихле — Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 6. С. 25–40.
5. **Trigub R.M.** A note on the paper of Telyakovski “Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation” // East J. Approx. 2007. Vol. 13, no. 1. P. 1–6.
6. **Малыхин Ю.В., Теляковский С.А., Холщевникова Н.Н.** Интегрируемость суммы модулей блоков рядов Фурье — Уолша функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. С. 323–334.
7. **Заставный В.П.** Оценки сумм из модулей блоков тригонометрических рядов Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 166–179.
8. **Temlyakov V.N.** On absolute summation of Fourier series by subsequences // Analysis Math. 1982. Vol. 8. P. 71–77. doi: 10.1007/BF02073773.
9. **Павлов А.П.** Об абсолютной суммируемости рядов Фурье функций из классов $Lip(\alpha, p)$ // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 1. С. 74–83.
10. **Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.** Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987. 344 с.

Поступила 04.06.2022
После доработки 23.09.2022
Принята к публикации 26.09.2022

Теляковский Сергей Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Математический институт имени В.А. Стеклова РАН
г. Москва
Холщевникова Наталья Николаевна
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный технологический университет “Станкин”
г. Москва
e-mail: kholshchevnikova@gmail.com

REFERENCES

1. Telyakovskii S.A. On partial sums of Fourier series of functions of bounded variation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 219, pp. 372–381.
2. Telyakovskii S.A. On the uniform convergence of the Fourier series of functions of bounded variation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, vol. 232, pp. 310–318.
3. Telyakovskii S.A. Some properties of Fourier series of functions with bounded variation. *East J. Approx.*, 2004, vol. 10, pp. 215–218.

4. Belov A.S., Telyakovskii S.A. Refinement of the Dirichlet–Jordan and Young's theorems on Fourier series of functions of bounded variation. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 6, pp. 777–791. doi: 10.1070/SM2007v198n06ABEH003860 .
5. Trigub R.M. A note on the paper of Telyakovski "Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation". *East J. Approx.*, 2007, vol. 13, no. 1, pp. 1–6.
6. Malykhin Yu.V., Telyakovskii S.A., Kholshchevnikova N.N. Integrability of the sum of absolute values of blocks of the Fourier–Walsh series for functions of bounded variation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 290, no. 1, pp. 306–317. doi: 10.1134/S0081543815060279 .
7. Zastavnyi V.P. Estimates for sums of moduli of blocks from trigonometric Fourier series. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. S190–S204. doi: 10.1134/S0081543811050208 .
8. Temlyakov V.N. On absolute summation of Fourier series by subsequences. *Anal. Math.*, 1982, vol. 8, no. 1, pp. 71–77. doi: 10.1007/BF02073773 .
9. Pavlov A.P. Absolute summability of Fourier series of functions in the classes $Lip(\alpha, p)$. *Math. Notes*, 1991, vol. 50, no. 1, pp. 707–713. doi: 10.1007/BF01156606 .
10. Golubov B.I., Efimov A.V., Skvortsov V.A. *Walsh series and transforms: Theory and applications.* Dordrecht: Springer, 1991, 368 p. doi: 10.1007/978-94-011-3288-6 . Original Russian text published in Golubov B.I., Efimov A.V., Skvortsov V.A. *Ryady i preobrazovaniya Uolsha: Teoriya i primeneniya*, Moscow: Nauka Publ., 1987, 344 p.

Received June 4, 2022
Revised September 23, 2022
Accepted September 26, 2022

Sergei Alexandrovich Telyakovskii†, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia .

Natalia Nikolaevna Kholshchevnikova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State University of Technology "STANKIN", Moscow, 127055 Russia, e-mail: kholshchevnikova@gmail.com .

Cite this article as: S. A. Telyakovskii, N. N. Kholshchevnikova. Conditions under which the sums of absolute values of blocks in the Fourier–Walsh series of functions of bounded variation belong to spaces L^p. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 226–236 .