ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 519.642.5

О НОВОМ КЛАССЕ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ[1]

С. В. Солодуша

В статье рассматриваются линейные двумерные интегральные уравнения Вольтерра I рода с переменным нижним и верхним пределами интегрирования, возникающие при описании переходных процессов нелинейной динамической системы, представленной в виде конечного отрезка (полинома) интегро-степенного ряда Вольтерра. Приведен новый способ идентификации симметричных ядер в квадратичном полиноме Вольтерра, в котором входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы — скалярные функции времени. Тестовые сигналы, используемые для решения этой задачи, выбраны из класса кусочно-линейных функций, что объясняется спецификой исследуемых технических систем типа “вход-выход”. Данная постановка развивает подход на базе тестовых сигналов в виде комбинаций функций Хевисайда, реализованный в публикациях А. С. Апарцина. Для выделенного класса неклассических уравнений Вольтерра I рода получена явная формула обращения. Доказаны утверждения о существовании и единственности решения соответствующих интегральных уравнений.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, идентификация, уравнения Вольтерра.

S. V. Solodusha. On a new class of two-dimensional Volterra integral equations of the first kind with variable limits of integration.

The paper deals with linear two-dimensional Volterra integral equations of the first kind with variable lower and upper limits of integration. Such equations arise when describing the transient processes of a nonlinear dynamic system, represented as a finite segment (a polynomial) of the Volterra integro-power series. A new method for identifying symmetric kernels in the quadratic Volterra polynomial is presented, in which the input $x(t)$ and output $y(t)$ signals are scalar functions of time. The test signals used to solve this problem are chosen from the class of piecewise linear functions, which is explained by the specifics of the studied technical systems of the “input–output” type. This statement develops the approach based on test signals in the form of combinations of Heaviside functions and presented in the publications of A. S. Apartsyn. An explicit inversion formula is derived for a selected class of nonclassical Volterra equations of the first kind. Results about the existence and uniqueness of solutions of the corresponding integral equations are proved.

Keywords: nonlinear dynamic system, identification, Volterra equations.

MSC: 45D05

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-216-225

Введение

Существенную роль в исследовании динамики систем играют модели вида “вход-выход”, при построении которых используются интегральные уравнения Вольтерра I рода. Это объясняется их универсальностью, а также удобством описания таких динамических процессов, применение к которым дифференциальных уравнений затруднено [1]. При изучении нелинейных свойств динамических систем достаточно часто (как самостоятельный аппарат, так и совместно с другими методами математического моделирования) используется представление отклика системы на внешнее возмущение в виде отрезка интегро-степенного ряда (полинома) Вольтерра [2].

[1]Исследование выполнено в Институте динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00173), https://rscf.ru/project/22-11-00173/ .

Пусть входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы являются скалярными функциями времени t, тогда полином Вольтерра N-й степени $P_N(x(t))$ имеет вид

$$y(t) = P_N(x(t)) \equiv \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \dots \int_0^t K_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i=1}^{n} x(t-\lambda_i) d\lambda_i, \quad t \in [0, T], \tag{0.1}$$

где ядра Вольтерра K_n являются симметричными функциями относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (т. е. инвариантными относительно замены переменных λ_i [3]). К настоящему времени разработано достаточно много способов построения моделей на основе (0.1), но их широкому применению в приложениях препятствует нетривиальная проблема идентификации функций n переменных $K_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ [4; 5]. Решение этой задачи в статье выполняется в рамках активного эксперимента. В отличие от пассивного [6] он обеспечивает возможность редукции исходной проблемы к решению специальных n-мерных уравнений Вольтерра I рода относительно искомой функции K_n, оба предела интегрирования в которых являются переменными.

Исследованиям уравнений вольтерровского типа посвящено огромное количество работ (см., например, монографию [7] и список библиографических источников в ней). Однако, как отмечено в [8, с. 134], уравнения Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования являются мало изученными за исключением некоторых частных случаев. Тем не менее они занимают важное место в приложениях, например, в макроэкономике [9; 10], в электроэнергетике [11], при решении ряда краевых задач [12], а также при моделировании динамических развивающихся систем [13; 14]. Кроме того, объединение конечномерных (алгебраических) уравнений и различных классов интегральных уравнений Вольтерра нередко приводит к качественно новым математическим объектам, описываемым, в том числе, интегро-алгебраическими уравнениями с переменными пределами интегрирования [15; 16]. Таким образом, развитие теории и методов решения неклассических (по терминологии [14]) уравнений типа Вольтерра I рода имеет несомненную ценность.

Настоящая работа развивает подход [14] к идентификации квадратичных полиномов Вольтерра (0.2) на базе тестовых сигналов специального вида. Предположим, что при фиксированном $N = 2$ в (0.1) задача декомпозиции отклика

$$y(t) = P_2(x(t)) \equiv \int_0^t K_1(\lambda_1) x(t-\lambda_1) d\lambda_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(\lambda_1, \lambda_2) x(t-\lambda_1) x(t-\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \ \ t \in [0, T], \tag{0.2}$$

на компоненты y_i, $i = 1, 2$, т. е. $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, которые обусловлены вкладом i-го слагаемого из $P_2(x(t))$, решена (например, с помощью методики [17]). Цель данной статьи — рассмотреть новый класс линейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра I рода к решению которых может быть сведена задача идентификации симметричного ядра $K_2(\lambda_1, \lambda_2)$, $0 \le \lambda_1,\ \lambda_2 \le T$, такого что

$$y_2(t) = \int_0^t \int_0^t K_2(\lambda_1, \lambda_2) x(t-\lambda_1) x(t-\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \quad t \in [0, T]. \tag{0.3}$$

Здесь $y_2(t)$ — отдельная составляющая отклика системы $y(t)$ на входной сигнал $x(t)$, которая соответствует второму слагаемому из (0.2).

Структура статьи состоит из введения, двух разделов и заключения. В первом разделе рассмотрены два способа идентификации симметричной функции $K_2(\lambda_1, \lambda_2)$ из (0.3). Подраздел 1.1 носит вспомогательный характер. В нем указаны краткие сведения из работ [14; 19], основанные на применении тестовых входных сигналов кусочно-постоянного вида. В подразделе 1.2 описан новый способ, базирующийся на использовании иных сигналов $x(t)$ из класса кусочно-линейных функций. Для лучшего понимания специфики выделенных двумерных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования в подразделах 1.1 и 1.2 используется единая терминология. Данные уравнения допускают явные формулы обращения. В разд. 2 указаны необходимые условия, обеспечивающие существование функции K_2 в классе C_Ω симметричных функций, непрерывных на $\Omega = \{\lambda_1,\, \lambda_2\colon 0 \le \lambda_1,\, \lambda_2 \le T\}$. В заключении сформулированы основные результаты работы.

1. О задаче идентификации ядра Вольтерра K_2 в (0.3)

Полагая, что функция $y_2(t)$ в (0.3) достаточно гладкая для проведения необходимых вычислений и $y_2(0) = 0$, рассмотрим новый способ идентификации функции K_2, основанный на использовании кусочно-линейных тестовых сигналов. Такая постановка возникает при учете специфики задания тестовых сигналов для технических (энергетических) объектов.

Отметим, что на практике [18, с. 8] входное воздействие условно считается скачкообразным, если нарастание сигнала по длительности не превосходит 10% от исследуемого временного диапазона T. Как правило, при этом переходят к рассмотрению кусочно-постоянного входа $x(t)$. Обратимся к известным результатам, связанным со спецификой (0.3), в котором $x(t)$ представлен в виде линейных комбинаций функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом.

1.1. Об уравнении (0.3) с кусочно-постоянными тестовыми сигналами

Для иллюстрации особенностей методики идентификации двумерного континуума неизвестных значений функции $K_2(\lambda_1, \lambda_2)$ рассмотрим один из способов задания семейства тестовых возмущений в виде

$$x_\nu(t) = e(t) - e(t-\nu), \quad 0 \le \nu \le t \le T, \tag{1.1}$$

$e(t)$ — функция Хевисайда. Введем далее замену переменных

$$s_1 = t, \quad s_2 = t - \nu. \tag{1.2}$$

Подставляя (1.1) в (0.3), с учетом (1.2) и симметричности K_2 для $0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le T$ приходим к интегральному уравнению

$$\iint\limits_{\Omega_2} K_2(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 = \int\limits_{s_2}^{s_1}\int\limits_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 = f_1(s_1, s_1 - s_2), \tag{1.3}$$

в котором через $f_1(s_1, s_1 - s_2)$ обозначен отклик системы на входные сигналы (1.1). Область интегрирования $\Omega_2 = \{\lambda_1,\, \lambda_2\colon s_2 \le \lambda_1,\, \lambda_2 \le s_1\}$ проиллюстрирована на рис. 1.

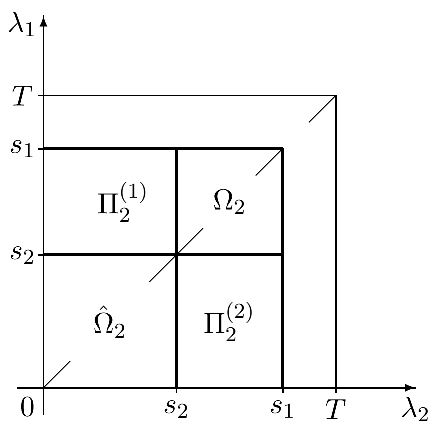

Рис. 1. Области интегрирования Ω_2, $\hat{\Omega}_2$, $\Pi_2^{(1)}$, $\Pi_2^{(2)}$.

Как показано в теореме 2.1 из [19], решение (1.3) в классе непрерывных симметричных функций определяется формулой

$$K_2^*(s_1, s_2) = -\frac{1}{2}\big(f_1(s_1, s_1 - s_2)\big)''_{s_1 s_2}, \tag{1.4}$$

при этом необходимые и достаточные условия для существования единственного решения $K_2^*(s_1, s_2)$ (см. теорему 3.11.1 из [14]) имеют следующий вид:

$$\big(f_1(s_1, s_1 - s_2)\big)''_{s_1 s_2} \in C_\Delta, \quad \Delta = \{s_1,\, s_2\colon 0 \le s_2 \le s_1 \le T\}, \tag{1.5}$$

$$f_1(s, 0) = 0 \ \ \forall s \in [0, T], \tag{1.6}$$

$$f_1(s_2, s_2 - s_1) = f_1(s_1, s_1 - s_2), \tag{1.7}$$

$$\big(f_1(s_1, s_1 - s_2)\big)'_{s_2}\big|_{s_1 = s_2 = s} = 0. \tag{1.8}$$

Отметим, что (1.5) является стандартным условием на гладкость исходных данных. Выполнение (1.6), (1.7) обеспечивает справедливость тождественного равенства $V_2 K_2^*(s_1, s_2) \equiv f_1$ при непосредственной подстановке (1.4) в (1.3) (здесь V_2 — оператор, определяемый левой частью (1.3)). Условия (1.6), (1.8) гарантируют тривиальность решения однородного уравнения $\big(\psi(s_1, s_1 - s_2)\big)''_{s_1 s_2} = 0$, в котором $\psi = V_2 K_2 - f_1$.

1.2. Уравнение (0.3) в случае тестовых сигналов из класса кусочно-линейных функций

Развивая методику, представленную в [19], перейдем к рассмотрению тестовых сигналов из класса кусочно-линейных функций вида (см. [20])

$$x(\lambda) \equiv x_\nu(\lambda) = \begin{cases} 0, \ \lambda \le 0, \\ \dfrac{\lambda}{\nu}, \ 0 < \lambda \le \nu, \\ 1, \ \nu < \lambda. \end{cases} \tag{1.9}$$

Подстановка (1.9) в (0.3) в новых переменных (1.2) приводит к уравнению

$$\iint\limits_{\Omega_2} K_2(\lambda_1, \lambda_2) \prod_{i=1}^{2} z(\lambda_i) d\lambda_i + \iint\limits_{\hat{\Omega}_2} K_2(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$+ 2 \iint\limits_{\Pi_2^{(i)}} K_2(\lambda_1, \lambda_2) z(\lambda_i) d\lambda_1 d\lambda_2 = f_2(s_1, s_1 - s_2) \equiv p(s_1, s_2), \tag{1.10}$$

в котором $i = 1 \vee 2$, $z(\lambda) = \dfrac{s_1 - \lambda}{s_1 - s_2}$, $f_2(s_1, s_1 - s_2) \equiv p(s_1, s_2)$ — отклик динамической системы на вход (1.9),

$$\iint\limits_{\Omega_2} K_2(\lambda_1, \lambda_2) \prod_{i=1}^{2} z(\lambda_i) d\lambda_i = \int\limits_{s_2}^{s_1} \int\limits_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1, \lambda_2) \prod_{i=1}^{2} z(\lambda_i) d\lambda_i,$$

$$\iint\limits_{\hat{\Omega}_2} K_2(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 = \int\limits_{0}^{s_2} \int\limits_{0}^{s_2} K_2(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2,$$

$$\iint\limits_{\Pi_2^{(1)}} K_2(\lambda_1, \lambda_2) z(\lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 = \iint\limits_{\Pi_2^{(2)}} K_2(\lambda_1, \lambda_2) z(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$= \int\limits_0^{s_2} d\lambda_2 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2) z(\lambda_1) d\lambda_1 = \int\limits_0^{s_2} d\lambda_1 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2) z(\lambda_2) d\lambda_2.$$

Области интегрирования Ω_2, $\hat{\Omega}_2$, $\Pi_2^{(i)}$ $(i=1,2)$ изображены на рис. 1.

Лемма. *Пусть в уравнении* (1.10) *относительно непрерывной функции* $K_2(\lambda_1,\lambda_2)$, *симметричной на* $\Omega = \{\lambda_1,\, \lambda_2 \colon 0 \le \lambda_1,\, \lambda_2 \le T\}$, *правая часть* $p(s_1,s_2) \in C_\Delta^{(2)}$, $\Delta = \{s_1,\, s_2 \colon 0 \le s_2 \le s_1 \le T\}$ *и, кроме того,*

$$p(0,0) = 0. \tag{1.11}$$

При условии существования $p(s_1,s_2)$ *такой, что справедливо*

$$p(s_1,s_2) - \frac{1}{2}(s_1-s_2)^2 \big(p(s_1,s_2)\big)''_{s_1 s_2} + (s_1-s_2)\Big(\big(p(s_1,s_2)\big)'_{s_1} - \big(p(s_1,s_2)\big)'_{s_2}\Big) = g(s_1,s_2), \tag{1.12}$$

уравнение (1.10) *эквивалентно*

$$\int\limits_0^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_0^{s_2} K_2(\lambda_1,\lambda_2) d\lambda_2 = g(s_1,s_2). \tag{1.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условия леммы выполняются. Покажем, что уравнение (1.10) с помощью эквивалентных преобразований может быть сведено к (1.13), в котором функция $K_2(\lambda_1,\lambda_2)$ является симметричной на Ω (в силу (1.11) операция дифференцирования в (1.12) законна).

Продифференцируем (1.10) по s_1. С учетом симметричности K_2 имеем

$$\big(p(s_1,s_2)\big)'_{s_1} = \frac{2}{s_1-s_2}\Bigg(\int\limits_{s_2}^{s_1}\int\limits_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2) z(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 - \int\limits_{s_2}^{s_1}\int\limits_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2) \prod_{i=1}^{2} z(\lambda_i) d\lambda_i$$

$$+ \int\limits_0^{s_2} d\lambda_1 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2) d\lambda_2 - \int\limits_0^{s_2} d\lambda_1 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2) z(\lambda_2) d\lambda_2\Bigg). \tag{1.14}$$

Суммируя (1.10) с (1.14), домноженным на $\dfrac{s_1-s_2}{2}$, приходим к интегральному уравнению

$$\int\limits_0^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2) z(\lambda_2) d\lambda_2 + \int\limits_0^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_0^{s_2} K_2(\lambda_1,\lambda_2) d\lambda_2 = q(s_1,s_2), \tag{1.15}$$

в котором

$$q(s_1,s_2) = \frac{(s_1-s_2)}{2}\big(p(s_1,s_2)\big)'_{s_1} + p(s_1,s_2). \tag{1.16}$$

Дифференцируя (1.15) по s_2, получим

$$\int\limits_0^{s_1} d\lambda_1 \int\limits_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2) z(\lambda_2) d\lambda_2 = (s_1-s_2)\big(q(s_1,s_2)\big)'_{s_2}. \tag{1.17}$$

Далее, вычитая (1.17) из (1.15), получаем уравнение (1.13), в котором

$$g(s_1,s_2) = q(s_1,s_2) - (s_1-s_2)\big(q(s_1,s_2)\big)'_{s_2}. \tag{1.18}$$

Наконец, учитывая обозначение (1.16), вместо (1.18) имеем (1.12). $\square$

З а м е ч а н и е. В условиях леммы функция p в уравнении (1.10), полученная из (1.13), автоматически удовлетворяет условию (1.11). Следует отметить, что в силу

$$\int_{s_2}^{s_1}\int_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2)\prod_{i=1}^{2} z(\lambda_i)d\lambda_i \to 0 \quad \text{при} \quad s_1\to s,\ s_2\to s,$$

$$\int_0^{s_2} d\lambda_2 \int_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2)z(\lambda_1)d\lambda_1 \to 0 \quad \text{при} \quad s_1\to s,\ s_2\to s,$$

$$\int_0^{s_2} d\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} K_2(\lambda_1,\lambda_2)z(\lambda_2)d\lambda_2 \to 0 \quad \text{при} \quad s_1\to s,\ s_2\to s$$

условие (1.11) выполняется.

2. О существовании и единственности решения уравнений (1.10), (1.13)

Исследуем вопросы существования и единственности решения уравнений (1.10), (1.13).

Теорема 1. *Соотношения*

$$\big(g(s_1,s_2)\big)''_{s_1s_2} \in C_\Delta, \quad \Delta=\{s_1,s_2\colon 0\le s_2\le s_1\le T\}, \tag{2.1}$$

$$g(s,0)=0 \ \ \forall s\in[0,T], \tag{2.2}$$

$$g(s_2,s_1)=g(s_1,s_2), \quad s_1,\ s_2\in\Delta, \tag{2.3}$$

$$\big(g(s_1,s_2)\big)'_{s_2}\big|_{s_1=0} = \big(g(s_1,s_2)\big)'_{s_1}\big|_{s_2=0}=0 \tag{2.4}$$

необходимы и достаточны для существования решения уравнения (1.13) *в классе симметричных непрерывных на* Ω *функций. Решение* (1.13) *единственно в указанном классе и определяется формулой*

$$K_2^*(s_1,s_2)=\big(g(s_1,s_2)\big)''_{s_1s_2}, \quad s_1,\ s_2\in\Delta. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что условия (2.1)–(2.4) относительно функции $g(s_1,s_2)$ согласуются с условиями (1.5)–(1.8) для $f_1(s_1,s_1-s_2)$. Конструктивная схема доказательства также соответствует аналогичной теореме 3.11.1 из [14] о разрешимости уравнения (1.3). Поэтому остановимся на принципиальных моментах.

Существование. Достаточность. Если (2.1), (2.3) имеют место, то (2.5) определяет симметричную непрерывную функцию на Ω. Прямая подстановка (2.5) в (1.13) в условиях теоремы (2.2), (2.3) обращает (1.13) в тождество (при подстановке дополнительно используется свойство симметричности функции (2.5)).

Необходимость. Пусть решение (2.5) в классе непрерывных симметричных функций на Ω существует (обозначим его через $K_2^*(s_1,s_2)$). Это значит, что

$$g(s_1,s_2)=\int_0^{s_1} d\lambda_1\int_0^{s_2} K_2^*(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_2. \tag{2.6}$$

Выполнение (2.2)–(2.4) очевидно. Из (2.6) следует

$$\big(g(s_1,s_2)\big)'_{s_1}=\int_0^{s_2} K_2^*(s_1,\lambda)d\lambda,$$

что обеспечивает (2.1) в силу непрерывности K_2^* на Ω.

Единственность. Для доказательства достаточно показать, что в условиях теоремы (2.2), (2.4) однородное уравнение

$$\big(\psi(s_1, s_2)\big)''_{s_1 s_2} = 0,$$

где $\psi = V_2 K_2 - g$, V_2 — оператор, определяемый левой частью (1.13), имеет только тривиальное решение. □

Проиллюстрируем на конкретном примере, что правая часть уравнения (1.13) удовлетворяет условиям теоремы 1.

П р и м е р. Пусть $K_2(s_1, s_2) = s_1 s_2$. Функцию $g(s_1, s_2)$ можно получить непосредственно из (1.13):

$$g(s_1, s_2) = \frac{1}{4} s_1^2 s_2^2. \tag{2.7}$$

С другой стороны, из (1.10) имеем

$$p(s_1, s_2) = \frac{1}{36}\left(s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2\right)^2, \tag{2.8}$$

далее, следуя лемме, и с учетом (1.12) приходим к (2.7). Откуда

$$g(s, 0) = 0, \quad g(s_2, s_1) = \frac{1}{4} s_2^2 s_1^2 = g(s_1, s_2),$$

$$\big(g(s_1, s_2)\big)'_{s_2}\big|_{s_1=0} = \frac{1}{2} s_1^2 s_2\big|_{s_1=0} = \big(g(s_1, s_2)\big)'_{s_1}\big|_{s_2=0} = \frac{1}{2} s_1 s_2^2\big|_{s_2=0} = 0.$$

Теперь обратимся к уравнению (1.10).

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1.10) *относительно функции* $K_2(\lambda_1, \lambda_2)$*, непрерывной и симметричной на* $\Omega = \{\lambda_1,\, \lambda_2 \colon 0 \le \lambda_1,\, \lambda_2 \le T\}$*, правая часть*

$$p(s_1, s_2) \in C_\Delta^{(4)}, \quad \Delta = \{s_1, s_2 :\ 0 \le s_2 \le s_1 \le T\},$$

и, кроме того, выполнено равенство (1.11) *и условия теоремы* 1 *применительно к линейной комбинации* $p(s_1, s_2)$ *и ее производных вида* (1.12)*. Тогда решение уравнения* (1.10) *существует и единственно в классе симметричных непрерывных на* Ω *функций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя (1.10), перейдем к эквивалентному (по лемме) интегральному уравнению (1.13). С учетом выполнения условий данной теоремы существует непрерывное решение уравнения (1.13) (согласно теореме 1), а значит, и уравнения (1.10).

Единственность решения уравнения (1.10) следует (в силу леммы) из единственности решения уравнения (1.13), которая показана в теореме 1. □

Заключение

В статье рассмотрены уравнения (1.10), (1.13) с двумя переменными пределами интегрирования, возникающие в задаче идентификации ядра Вольтерра $K_2(s_1, s_2)$, $0 \le s_1, s_2 \le T$. Изучены вопросы существования и единственности решения представленных интегральных уравнений в классе симметричных функций, непрерывных на Ω. Сформулированы и доказаны соответствующие утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верлань А.Ф., Сизиков В.С.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 543 с.
2. **Вольтерра В.** Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 302 с.
3. **Boyd S., Chua L.O., Desoer C.A.** Analytical foundations of Volterra series // IMA J. Math. Control. Inf. 1984. Vol. 1, no. 3. P. 243–282. doi: 10.1093/IMAMCI/1.3.243 .
4. **Cheng C.M., Peng Z.K., Zhang W.M., Meng G.** Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review // Mech. Syst. Signal Process. 2017. Vol. 87. P. 340–364. doi: 10.1016/j.ymssp.2016.10.029 .
5. **Солодуша С.В., Гражданцева Е.Ю.** Тестовое полиномиальное уравнение Вольтерра I рода в задаче идентификации входных сигналов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 161–174. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-161-174 .
6. **Абас В.М.А., Арутюнян Р.В.** Анализ и оптимизация нелинейных систем с памятью на основе интегро-функциональных рядов Вольтерра и методов Монте-Карло // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2021. № 3(211). С. 30–34. doi: 10.17213/1560-3644-2021-3-30-34 .
7. **Brunner H.** Volterra integral equations: an introduction to theory and applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 387 p. doi: 10.1017/9781316162491 .
8. **Асанов А.А., Чоюбеков С.М.** Решение неклассических интегральных уравнений Вольтерра I рода с вырожденным нелинейным ядром // Междунар. науч.-исслед. журнал. 2018. № 4(70). С. 134–138. doi: 10.23670/IRJ.2018.70.029 .
9. **Глушков В.М.** Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. 1977. № 2. С. 3–6.
10. **Бойков И.В., Тында А.Н.** Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений теории развивающихся систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 9. С. 1214–1223.
11. **Markova E.V., Sidler I.V.** Numerical solution of the age structure optimization problem for basic types of power plants // Yugosl. J. Oper. Res. 2019. Vol. 29, no. 1. P. 81–92. doi: 10.2298/YJOR171015009M .
12. **Волкодавов В.Ф., Родионова И.Н.** Формулы обращения некоторых двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Известия высших учебных заведений. Математика. 1998. № 9. С. 30–32.
13. **Апарцин А.С.** Об интегральных уравнениях Вольтерра I рода в теории развивающихся систем // Численные методы оптимизации и анализа. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1992. С. 58–67.
14. **Апарцин А.С.** Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.
15. **Bulatov M.V., Machkhina M.N., Phat V.N.** Existence and uniqueness of solutions to nonlinear integral-algebraic equations with variable limits of integrations // Commun. Appl. Nonlinear Anal. 2014. Vol. 21, no. 1. P. 65–76.
16. **Ботороева М.Н., Булатов М.В.** Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования // Известия Иркут. гос. ун-та. Серия Математика. 2017. Т. 20. С. 3–16. doi: 10.26516/1997-7670.2017.20.3 .
17. **Апарцин А.С.** Новый алгоритм моделирования нелинейных динамических систем на базе полиномов Вольтерра // Оптимизация, управление, интеллект. 2000. № 5. С. 26–32.
18. **Новиков С.П.** Практическая идентификация динамических характеристик объектов управления теплоэнергетического оборудования. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. 64 с.
19. **Апарцин А.С.** О новых классах линейных многомерных уравнений I рода типа Вольтерра // Известия высших учебных заведений. Математика. 1995. № 11. С. 28–41.
20. **Solodusha S.V.** New classes of Volterra integral equations of the first kind related to the modeling of the wind turbine dynamics // 15th Intern. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). 2020. Art. no. 9140662. doi: 0.1109/STAB49150.2020.914066 .

Поступила 31.07.2022
После доработки 12.10.2022
Принята к публикации 17.10.2022

Солодуша Светлана Витальевна
д-р техн. наук, доцент
Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН;
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН
г. Иркутск
e-mail: solodusha@isem.irk.ru

REFERENCES

1. Verlan' A.F., Sizikov V.S. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1986, 543 p.
2. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations.* Mineola, N.Y: Dover Publ., 1959, 288 p. ISBN: 0486442845 . Original Russian text published in Vol'terra V. *Teoriya funktsionalov, integral'nykh integro-differentsial'nykh uravnenii*, Moscow: Nauka Publ., 1982, 302 p.
3. Boyd S.P., Chua L., Desoer C. Analytical foundations of Volterra series. *IMA J. Math. Control. Inf.*, 1984, vol. 1, no. 3, pp. 243–282. doi: 10.1093/IMAMCI/1.3.243 .
4. Cheng C.M., Peng Z.K., Zhang W.M., Meng G. Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2017, vol. 87, pp. 340–364. doi: 10.1016/j.ymssp.2016.10.029 .
5. Solodusha S.V., Grazhdantseva E.Yu. Test polynomial Volterra equation of the first kind in the problem of input signal identification. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 161–174 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-161-174 .
6. Abas W.M.A., Harutyunyan R.V. Analysis and optimization of nonlinear systems with memory based on Volterra integro-functional series and Monte-Carlo methods. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus region. Technical Sciences*, 2021, no. 3(211), pp. 30–34 (in Russian).
7. Brunner H. *Volterra integral equations: an introduction to theory and applications.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017, 387 p. doi: 10.1017/9781316162491 .
8. Asanov A.A., Choyubekov S.M. Solution of nonclassical integral Volterra equations of first kind with degenerate nonlinear kernel. *Mezhdunar. nauch.-issled. zhurnal*, 2018, no. 4(70), pp. 134–138 (in Russian).
9. Glushkov V.M. On a class of dynamic macroeconomic models. *Upr. Sist. Mash.*, 1977, no. 2, pp. 3–6 (in Russian).
10. Boikov I.V., Tynda A.N. Approximate solution of nonlinear integral equations of the theory of developing systems. *Diff. Equat.*, 2003, vol. 39, no. 9, pp. 1277–1288. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000012695.06431.c4 .
11. Markova E.V., Sidler I.V. Numerical solution of the age structure optimization problem for basic types of power plants. *Yugosl. J. Oper. Res.*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 81–92. doi: 10.2298/YJOR171015009M .
12. Volkodavov V.F., Rodionova I.N. Inversion formulas for some two-dimensional Volterra integral equations of the first kind. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1998, vol. 42, no. 9, pp. 28–30.
13. Apartsin A.S. On Volterra integral equations of the first kind in the theory of developing systems. In: Vasin V.V. et al. (eds.), *Numerical methods of optimization and analysis.* Novosibirsk: Nauka Publ., 1992, pp. 58–67 (in Russian). ISBN: 5-02-029944-8 .
14. Apartsyn A.S. *Nonclassical linear Volterra equations of the first kind.* Utrecht; Boston: VSP, 2003, 168 p. ISBN: 90-6764-375-0 . Original Russian text published in Apartsin A.S. *Neklassicheskie uravneniya Vol'terra I roda: teoriya i chislennye metody.* Novosibirsk: Nauka Publ., 1999, 193 p.
15. Bulatov M.V., Machkhina M.N., Phat V.N. Existence and uniqueness of solutions to nonlinear integral-algebraic equations with variable limits of integrations. *Commun. Appl. Nonlinear Anal.*, 2014, vol. 21, no. 1, pp. 65–76.
16. Botoroeva M.N., Bulatov M.V. Applications and methods for the numerical solution of a class of integer-algebraic equations with variable limits of integration. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2017, vol. 20, pp. 3–16 (in Russian).
17. Apartsyn A.S. New algorithm for nonlinear dynamic modeling systems based on the Volterra polynomials. *Optimizaciya, upravlenie, intellekt*, 2000, no. 5, pp. 26–32 (in Russian).
18. Novikov S.P. *Prakticheskaya identifikaciya dinamicheskih harakteristik ob'ektov upravleniya teploenergeticheskogo oborudovaniya* [Practical identification of dynamic characteristics of control objects of thermal power equipment]. Novosibirsk: NGTU Publ., 2004, 64 p.

19. Apartsyn A.S. On new classes of linear multidimensional equations of the first kind of Volterra type. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1995, vol. 39, no. 11, pp. 25–37.

20. Solodusha S.V. New classes of Volterra integral equations of the first kind related to the modeling of the wind turbine dynamics. In: *15th Intern. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference)*. 2020, art. no. 9140662, 3 p. doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140662 .

Received July 31, 2022
Revised October 12, 2022
Accepted October 17, 2022

Funding Agency: This work was carried out at Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00173).

Svetlana Vital'evna Solodusha, Dr. Technic. Sci., Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science; Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia,
e-mail: solodusha@isem.irk.ru .

Cite this article as: S. V. Solodusha. On a new class of two-dimensional Volterra integral equations of the first kind with variable limits of integration. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 216–225 .