ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 519.853

МЕТОД КВАЗИРЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ В АНАЛИЗЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Д. Скарин

Работа посвящена построению возможных аппроксимаций для несобственных задач выпуклого программирования на основе применения одного из классических подходов к регуляризации некорректных экстремальных задач — метода квазирешений В. К. Иванова. Если обычно ограничения исходной задачи в методе квазирешений агрегируются с помощью внешних штрафных функций, то в настоящей работе с этой целью используется одна из модификаций внутреннего штрафа, а именно, обобщенная обратная барьерная функция. Специфика задачи предопределяет введение в минимизируемую барьерную функцию ряда новых управляющих параметров. Наряду с коэффициентами штрафа и параметром регуляризации рассматриваются параметры, обеспечивающие корректность применения метода барьеров, прежде всего, наличие внутренних точек области определения метода. В работе обсуждаются вопросы существования решений возникающих задач коррекции, исследуется влияние параметров барьерной функции на сходимость предлагаемой модификации метода квазирешений для несобственных задач.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод квазирешений, методы барьерных функций.

V. D. Skarin. The method of quasi-solutions based on barrier functions in the analysis of improper convex programming problems.

The paper is devoted to the construction of possible approximations for improper problems of convex programming based on the application of a classical approach to the regularization of ill-posed extremal problems, namely, V. K. Ivanov's method of quasi-solutions. While usually the constraints of the original problem in the method of quasi-solutions are aggregated with the help of exterior penalty functions, in this paper we use for this purpose a generalized inverse barrier function, which is a modification of interior penalty. Due to the specifics of the problem, we introduce a number of new control parameters into the minimized barrier function. Along with the penalty coefficients and the regularization parameter, we consider parameters that ensure the correctness of the application of the barrier method, first of all, the presence of interior points of the domain of the method. We also discuss the existence of solutions to emerging correction problems and analyze the influence of the parameters of the barrier function on the convergence of the proposed modification of the method of quasi-solutions for improper problems.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, method of quasi-solutions, barrier function methods.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-201-215

Введение

Под несобственной понимается (см. [1]) задача выпуклого программирования (ВП), для которой не выполняются классические соотношения двойственности, что чаще всего является следствием несовместности системы ограничений в исходной модели. Противоречивость ограничений могут вызывать погрешности в задании исходной информации, дефицит ресурсов, завышенные требования к качеству решений и т. п. Для устранения противоречий производится коррекция ограничений — чаще всего исходной задаче сопоставляется параметрическое семейство разрешимых моделей, в котором отыскивается оптимальная относительно значения параметра модель. Решение найденной модели (оптимальной коррекции) принимается за обобщенное решение исходной несобственной задачи (НЗ).

Постановка и анализ НЗ ВП существенно зависят от точности задания функций, описывающих исходную модель, поэтому требуется принять особые меры для обеспечения устойчивости получаемых решений. С этой целью представлется естественным использовать при рассмотрении НЗ ВП идеи стандартных методов регуляризации из теории некорректных оптимизационных задач, таких как методы стабилизирующих функций, невязки и квазирешений (см. [2; 3]).

Обычно методы регуляризации основаны на сведении оптимизационной задачи с ограничениями к задачам параметрической безусловной минимизации. В качестве нового критерия оптимизации используется та или иная модификация функций внешнего штрафа (см. [3; 4]). В данной работе с этой целью применяется обратная барьерная функция. Метод барьерных функций является стандартным (см. [5–7]) в теории математического программирования, на его основе построены эффективные численные алгоритмы решения, например, задач линейного программирования (см. [8]). В то же время попытки применить метод барьерных функций для коррекции НЗ ВП были единичными (см., например, [9; 10]).

Поскольку допустимое множество НЗ ВП чаще всего пусто, а барьерные функции должны определяться на внутренних точках допустимого множества, то требуется провести предварительную коррекцию исходной задачи и применить один из названных выше методов регуляризации. Кроме того, необходимо с помощью введения дополнительного параметра обеспечить применимость барьерных функций. В качестве регуляризирующего алгоритма в данной работе выбран известный метод квазирешений [3].

В предлагаемой статье исследуются варианты методов коррекции НЗ ВП, основанные на последовательной минимизации некоторой модификации барьерной функции, зависящей от четырех скалярных параметров. В их числе σ — параметр коррекции исходной задачи, характеризующий степень "расширения" допустимого множества; α — параметр, обеспечивающий непустоту внутренности допустимого множества; ε — штрафной коэффициент в методе барьеров; d — параметр регуляризации в методе квазирешений.

Основное внимание в работе уделяется вопросам разрешимости возникающих задач, исследованию влияния вводимых параметров на сходимость предлагаемых численных процедур.

Из работ отечественных авторов, примыкающих к рассматриваемой тематике, отметим статьи [11–16]; близкие вопросы поднимались и зарубежными исследователями (см., например, [17; 18]).

1. Постановка задачи, метод квазирешений

Рассмотрим задачу ВП
$$\min\{f_0(x)\colon x \in X\}, \tag{1}$$
где $X = \{x\colon f(x) \leqslant 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, f_i — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$.

Пусть в (1) $X = \varnothing$. В этом случае задача (1) — НЗ ВП, и для нее требуется выбрать аппроксимацию в классе разрешимых задач ВП. Естественный способ (оптимальной) коррекции НЗ ВП состоит в рассмотрении задачи
$$\min\{f_0(x)\colon x \in X_{\bar{\xi}_p}\}, \tag{2}$$
где $X_\xi = \{x\colon f(x) \leqslant \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, $\bar{\xi}_p = \arg\min\{\|\xi\|_p\colon \xi \in E\}$, $E = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+\colon X_\xi \neq \varnothing\}$, $\|\cdot\|_p$ — символ некоторой векторной нормы в пространстве $\mathbb{R}^m$. Ниже будут использованы нормы: евклидова $\|z = [z_1, \ldots, z_m]\| = \|z\|_2 = \bigl(\sum\limits_{i=1}^{m} z_i^2\bigr)^{1/2}$ и чебышевская $\|z\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |z_i|$.

Если в задаче (1) $X \neq \varnothing$, то $\bar{\xi}_p = 0$ и задачи (1) и (2) совпадают. В противном случае оптимальный вектор задачи (2) принимается за обобщенное решение НЗ (1).

Заметим, что для корректности постановки (2) (существования вектора $\bar{\xi}_p$) достаточно, например, непустоты и ограниченности множества X_ξ для некоторого $\xi = \xi_0$ (в этом случае множество E будет выпуклым и замкнутым). Обозначим $\bar{X}_p = \operatorname{Arg}\min \|f^+(x)\|_p$. Нетрудно видеть, что в (2) в качестве $\bar{\xi}_p$ можно взять вектор $\bar{\xi}_p = f^+(\bar{x})$, где $\bar{x} \in \bar{X}_p$. Если $p = 2$, то $\bar{X}_2 = X_{\bar{\xi}_2}$, в случае $p = \infty$ справедливо $X_{\bar{\xi}_\infty} \subset \bar{X}_\infty$. При этом $\bar{\xi}_\infty = [\bar{\sigma}, \ldots, \bar{\sigma}] \in \mathbb{R}^m_+$, $\bar{\sigma} = \min\limits_x \|f^+(x)\|_\infty$. Поэтому для $p = \infty$ можно обозначать $X_{\bar{\xi}_\infty}$ как

$$X_{\bar{\sigma}} = \{x\colon f_i(x) \leqslant \bar{\sigma},\ i = 1, \ldots, m\}.$$

При численном решении задач (1) и (2) в целях преодоления негативного влияния неточного задания функций $f_i(x)$ обычно используют специальные методы регуляризации. Наибольшее распространение получили три основные метода: стабилизирующих функций, невязки и квазирешений.

Метод квазирешений в упрощенной постановке имеет дело с задачей

$$\min\{f_0(x)\colon x \in X \cap Q_d\}, \tag{3}$$

где $Q_d = \{x\colon \Omega(x) \leqslant d\}$, $d > 0$, $\Omega(x)$ — стабилизатор задачи (1), представляющий из себя определенную на $\mathbb{R}^n$ выпуклую неотрицательную функцию, для которой множество Q_d ограничено при произвольном d. В данной работе используется наиболее часто употребляемый стабилизатор $\Omega(x) = \|x\|_2^2$.

Если в исходной задаче (1) $X \neq \varnothing$, то задача (3) разрешима при произвольном

$$d \geqslant \bar{d} = \min\{\|x\|^2\colon x \in X\},$$

в то время как (1) может не иметь решения. Если же оптимальное множество X^* задачи (1) непусто, то множеством решений задачи (3) является $X^* \cap Q_d$ при

$$d \geqslant d^* = \min\{\|x\|^2\colon x \in X^*\}.$$

Пусть в (1) $X = \varnothing$. Тогда метод квазирешений для НЗ ВП (1) будет заключаться в анализе задачи

$$\min\{f_0(x)\colon x \in X_{\bar{\sigma}} \cap Q_d\}, \tag{4}$$

разрешимость которой зависит от того, достижимо ли значение $\bar{\sigma} = \min\limits_x \|f^+(x)\|_\infty$ и достаточно ли велико значение параметра d. Оба этих вопроса будут сняты, если рассмотреть два отличных от (4) способа коррекции задачи (3).

Первый способ предполагает в (4) вместо $\bar{\sigma}$ взять величину $\bar{\sigma}_d = \min\{\|f^+(x)\|_\infty\colon x \in Q_d\}$, $d > 0$. Тогда возникает задача

$$\min\{f_0(x)\colon f_i(x) \leqslant \bar{\sigma}_d,\ i = 1, \ldots, m;\ x \in Q_d\}, \tag{5}$$

которая всегда имеет решение.

Второй способ коррекции заключается в рассмотрении задачи

$$\min\{f_0(x)\colon g_i(x) \leqslant \tilde{\sigma},\ i = 1, \ldots, m+1\}, \tag{6}$$

где $g_i(x) = f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$; $g_{m+1}(x) = \|x\|^2 - d$, $\tilde{\sigma} = \min \|g^+(x)\|_\infty$.

Специфику постановок (1)–(6) можно проиллюстрировать на простом примере задачи ВП в пространстве $\mathbb{R}^2$.

П р и м е р. Рассмотрим задачу (1) в пространстве $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$, где $f_0(x) = x_1 + x_2^2$, $X = \{x\colon f_1(x) \leqslant 0,\ f_2(x) \leqslant 0\}$, $f_1(x) = -x_1 + x_2 - 2$, $f_2(x) = x_1 - x_2 + 4$.

Здесь $X = \varnothing$ и (1) — НЗ ВП. Образуем задачу (2), находим для этого $\bar{\sigma} = \min\limits_x \|f^+(x)\|_\infty$. Получаем $\bar{\sigma} = 1$ и множество $X_{\bar{\sigma}} = \{x\colon -x_1 + x_2 = 3\}$. Задача (2) $\min\{x_1 + x_2^2\colon -x_1 + x_2 = 3\}$

имеет решение $x^* = [-7/2, -1/2]$. Построим задачу (4): $\min\{x_1 + x_2^2\colon -x_1 + x_2 = 3,\ x_1^2 + x_2^2 \le d\}$. Очевидно, что эта задача разрешима при произвольном $d \geqslant \bar{d} = 9/2$. Если $d = \bar{d}$, то решение задачи (4) единственно: $\bar{x} = [-3/2, 3/2]$. При $d > d^* = \|x^*\|^2 = 25/2$ ее решением станет точка x^*.

Задача (5) имеет решение для любого $d > 0$. Положим $d = 1$ и вычислим величину $\bar{\sigma}_d = \min\{\|f^+(x)\|_\infty\colon x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$. Непосредственно находим $\bar{\sigma}_d = 4 - \sqrt{2}$, $\bar{\sigma}_d = \|f^+(\bar{x}_d\|_\infty$, где $\bar{x}_d = [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$. В итоге задача (5) примет вид: $\min\{x_1 + x_2^2\colon -x_1 + x_2 \leqslant 6 - \sqrt{2},\ x_1 - x_2 \leqslant -\sqrt{2},\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$. Допустимое множество задачи состоит из единственной точки $\bar{x}_d$.

Выпишем задачу (6) при $d = 1$: $\min\{f_0(x)\colon g(x) \leqslant \tilde{\sigma}\}$, где $g(x) = [-x_1 + x_2 - 2,\ x_1 - x_2 + 4,\ x_1^2 + x_2^2 - 1]$. Вычислим $\tilde{\sigma} = \min\limits_x \|g^+(x)\|_\infty$, получим $\tilde{\sigma} = 1.69$. Допустимое множество этой задачи $\{x\colon -x_1 + x_2 \leqslant 3.69,\ x_1 - x_2 \leqslant -2.31,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2.69\}$ состоит из единственной точки $\tilde{x}_d = [-1.16, 1.16]$.

В дальнейшем, как правило, в качестве коррекции НЗ ВП (1) будет рассматриваться задача (6). Данная модель представляется более перспективной в сравнении с (5), поскольку она позволяет высказывать определенные рекомендации по управлению параметром d в методе квазирешений.

Выше уже отмечалось, что применение методов регуляризации характерно для случая, когда информация о задаче (1) задана неточно. Пусть в задаче (1) вместо $f_i(x)$ известны их приближения — непрерывные функции $f_i^\delta(x)$ такие, что

$$|f_i^\delta(x) - f_i(x)| \leqslant \varphi_i(x, \delta) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad i = 0, 1, \ldots, m, \tag{7}$$

где функции $\varphi_i(x, \delta) \geqslant 0\ \ \forall \delta > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$; $\lim\limits_{\delta \to 0} \varphi_i(x, \delta) = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \ldots, m$).

Ограничения задачи (1) будут агрегироваться с помощью некоторой штрафной функции, например, $P(x, \delta) = \sum_{i=1}^m \bigl(f_i^\delta\bigr)^{+q}(x)$, $q > 0$ (типичные представители функции $P(x, \delta)$ — точная штрафная функция при $q = 1$ и квадратичная штрафная функция при $q = 2$).

Таким образом, метод квазирешений может быть сведен к задаче нахождения точки $x_\delta \in Q_d$ такой, что

$$\Phi_\delta(x_\delta) \leqslant \Phi_\delta^* + \gamma(\delta), \quad \text{где} \ \ \Phi_\delta(x) = f_0^\delta(x) + rP(x, \delta),$$
$$\gamma(\delta) > 0 \ \ (\forall \delta > 0), \quad r > 0, \quad \Phi_\delta^* = \inf_x\{\Phi_\delta(x)\colon x \in Q_d\}.$$

Требуется найти управление параметрами $r, \delta, \gamma(\delta)$, при котором последовательность $\{x_\delta\}$ будет сходиться к решению задачи (6).

Основная задача данной работы состоит в построении метода квазирешений для НЗ ВП, в котором вместо функций внешнего штрафа $P(x, \delta)$ для решения задачи (6) будет применен аналог классического метода обратной барьерной функции (метода внутреннего штрафа; см. [3; 5–7]).

2. Метод барьерной функции и проблема коррекции НЗ ВП

Метод (обратной) барьерной функции применительно к задаче ВП (1) состоит в нахождении

$$\inf_{x \in X^0}\Bigl\{B(x, \varepsilon) = f_0(x) - \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{f_i(x)}\Bigr\}, \tag{8}$$

где $X^0 = \{x\colon f_i(x) < 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, $\varepsilon > 0$. При выполнении ряда условий (прежде всего, непустоты множеств X^0 и X^*, где $X^* = \operatorname{Arg}\min\{f_0(x)\colon x \in X\}$) можно показать, что задача (8) разрешима в некоторой точке $x(\varepsilon)$, при этом $B_\varepsilon^* = B\bigl(x(\varepsilon), \varepsilon\bigr) \to f^*$, $\rho\bigl(x(\varepsilon), X^*\bigr) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$, где f^* — оптимальное значение задачи (1), $\rho(z, X^*) = \inf\{\|z - y\|\colon y \in X^*\}$.

Применим метод (8) к задаче (6). Вначале рассмотрим случай, когда функции задачи (1) известны точно, т. е. если в (7) $\varphi_i(x, \delta) = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n,\ i = 0, 1, \ldots, m$).

Лемма 1. *Задача* (6) *разрешима для любого* $d > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $\mathcal{M}_s = \{x\colon g(x) \leqslant s\}$ непусто для некоторого $s = s_0 = [s_1^0, \ldots, s_{m+1}^0] \in \mathbb{R}_+^{m+1}$. Если $x' \in \mathcal{M}_{s_0}$, то $\|x'\|^2 \leqslant s_{m+1}^0 + d$, т. е. множество $\mathcal{M}_{s_0}$ ограничено. Тогда ограниченным будет и множество $\mathcal{M}_s$ для любого $s > s_0$. Легко проверить, что $E = \{s\colon \mathcal{M}_s \neq \varnothing\}$ будет выпуклым замкнутым множеством в $\mathbb{R}^{m+1}$. Тогда существует вектор $\bar{s}_p$ — решение задачи $\min\{\|s\|_p\colon s \in E\}$.

Нетрудно видеть, что при $p = \infty$ справедливо $\bar{s}_\infty = \bar{s} = [\tilde{\sigma}, \ldots, \tilde{\sigma}] \in \mathbb{R}^{m+1}$, где $\tilde{\sigma} = \|g^+(\bar{x})\|_\infty$, $\bar{x} \in \bar{\mathcal{M}} = \operatorname{Arg}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|g^+(x)\|_\infty$. В самом деле, для $i = 1, \ldots, m+1$ выполняется $g_i(\bar{x}) \leqslant g_i^+(\bar{x}) \leqslant \|g^+(\bar{x})\|_\infty = \tilde{\sigma}$, т. е. $\bar{s} \in E$. Для любого другого $s' = [\sigma', \ldots, \sigma'] \in E$ и $x' \in \mathcal{M}_{s'}$ имеем $\tilde{\sigma} = \|g^+(\bar{x})\|_\infty \leqslant \|g^+(x')\|_\infty \leqslant \sigma'$. Окончательно разрешимость задачи (6) следует из компактности множества $\mathcal{M}_{\bar{s}}$. □

В дальнейшем вместо обозначения $\mathcal{M}_{\bar{s}}$, где $\bar{s}$ — вектор с равными компонентами $\tilde{\sigma}$, будем по аналогии с задачей (2) применять и способ записи $\mathcal{M}_{\tilde{\sigma}} = \{x\colon g_i(x) \leqslant \tilde{\sigma},\ i = 1, \ldots, m+1\}$.

Для применимости метода (8) к задаче (6) требуется непустота множества

$$\mathcal{M}_{\tilde{\sigma}}^0 = \{x\colon g_i(x) < \tilde{\sigma},\ i = 1, \ldots, m+1\}.$$

Часто (это показывает и пример из разд. 1) множество $\mathcal{M}_{\tilde{\sigma}}$ состоит из единственной точки, и $\mathcal{M}_{\tilde{\sigma}}^0$ заведомо пусто. Чтобы гарантировать возможность применения метода (8), рассмотрим семейство близких к (6) задач вида

$$\min\{f_0(x)\colon g_i(x) \leq \tilde{\sigma} + \alpha,\ i = 1, \ldots, m+1\}, \tag{9}$$

где $\alpha > 0$. У задач (9) множество внутренних точек

$$\mathcal{M}_{\tilde{\sigma}+\alpha}^0 = \{x\colon g_i(x) < \tilde{\sigma} + \alpha,\ i = 1, \ldots, m+1\} \tag{10}$$

всегда непусто, и задача (9) разрешима в некоторой точке $\bar{x}_\alpha$ для любого $\alpha > 0$.

“Близость” задач (9) и (6) устанавливается следующим утверждением.

Лемма 2. *Справедливо равенство* $\lim\limits_{\alpha\to 0} \bar{f}_\alpha = \bar{f}$, *где* $\bar{f}_\alpha = f_0(\bar{x}_\alpha)$, $\bar{f}$ — *оптимальное значение задачи* (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha_0 \geqslant \alpha_1 > \alpha_2 > 0$. Тогда $\mathcal{M}_{\tilde{\sigma}+\alpha_1} \supset \mathcal{M}_{\tilde{\sigma}+\alpha_2} \supset \mathcal{M}_{\tilde{\sigma}}$ и, следовательно, $\bar{f} \geqslant \bar{f}_{\alpha_2} \geqslant \bar{f}_{\alpha_1}$. Последовательность $\{\bar{f}_\alpha\}$ не убывает при $\alpha \searrow 0$ и ограничена сверху величиной $\bar{f}$. Поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0} \bar{f}_\alpha = \tilde{f}$, где $\bar{f} \geqslant \tilde{f}$. С другой стороны, $\bar{x}_\alpha \in \mathcal{M}_{\tilde{\sigma}+\alpha_0}$ для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$, т. е. $\{\bar{x}_\alpha\}$ — ограниченная последовательность. Обозначим через $\tilde{x}$ ее предельную точку при $\alpha \to 0$. Имеем $\tilde{x} \in \mathcal{M}_{\tilde{\sigma}}$ и $\tilde{f} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \bar{f}_\alpha = f_0(\tilde{x}) \geqslant \bar{f}$. Таким образом, $\tilde{f} = \bar{f}$, и задачи (9) близки к (6) в том смысле, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} \bar{f}_\alpha = \bar{f}$. □

Если к (9) применить метод барьерных функций, то возникает задача вида (8), в которой вместо $B(x, \varepsilon)$ будет минимизироваться функция $\tilde{B}(x, q) = f_0(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m+1} (\tilde{\sigma} + \alpha - g_i(x))^{-1}$ на множестве (10) при $q = [\varepsilon, \tilde{\sigma}, \alpha, d]$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{\sigma}, d$ — из (6), $\alpha \in (0, 1]$.

Когда величина $\tilde{\sigma}$ известна и фиксированы значения α и d, новая задача представляет собой один из стандартных методов решения задачи ВП (9) (см., например, [3; 6; 7]). Поэтому алгоритмы коррекции НЗ ВП на основе применения методов квазирешений и барьерных функций должны строиться для произвольного значения параметра q и находить в том числе оптимальные значения этого параметра.

Наряду с задачей (6) рассмотрим обобщение

$$\min\{f_0(x)\colon g_i(x) \leqslant \sigma,\ i = 1, \ldots, m+1\}, \quad \sigma \geq \tilde{\sigma}. \tag{11}$$

Применим идею метода (8) для анализа задачи (11). В результате в качестве объекта дальнейшего исследования получим проблему нахождения

$$B_q^* = \inf_{x \in \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}^0} \Big\{ B(x,q) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{\sigma+\alpha-f_i(x)} \Big\}, \tag{12}$$

где $\mathcal{M}_{\sigma+\alpha}^0 = \{x\colon g_i(x) < \sigma+\alpha,\ i=1,\dots,m+1\}$, $q=[\varepsilon,\sigma,\alpha,d]$, $\varepsilon \in (0,1]$, $\sigma \geqslant \tilde\sigma$, $\alpha \in (0,1]$, $d > 0$.

Сразу отметим, что при такой постановке (регуляризирующий) параметр d входит только в состав допустимого множества $\mathcal{M}_{\sigma+\alpha}^0$ и отсутствует в конструкции функции $B(x,q)$.

Теорема 1. *Для любого $q = \bar q$ существует точка $\bar x(\bar q)$ — решение задачи* (12).

Доказательство. Пусть $\sigma \geqslant \tilde\sigma$ (например, $\sigma = \|g^+(x')\|_\infty$, где x' — некоторый вектор из $\mathbb{R}^n$). Обозначим через $\bar x_d$ решение задачи (6), которое существует согласно лемме 1. Так как $g_i(\bar x_d) \leqslant \tilde\sigma < \sigma+\alpha$, $i=1,\dots,m+1$, то $\mathcal{M}_{\sigma+\alpha}^0 \neq \varnothing$, и, следовательно, функция $B(x,q)$ определена в некоторой окрестности множества $\mathcal{M}_{\sigma+\alpha}^0$. В силу ограничения $g_{m+1}(x) = \|x\|^2 - d \leqslant \tilde\sigma$ множество $\mathcal{M}_{\sigma+\alpha}^0$ ограничено. Поскольку тогда $\mathcal{M}_{\sigma+\alpha} = \{x\colon g_i(x) \leqslant \sigma+\alpha,\ i=1,\dots, m+1\}$ будет компактным множеством, то существует точка $\bar x(\bar q) = \arg\min\limits_{x \in \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}} B(x,\bar q)$. Для задачи ВП (1) при $X^0 \neq \varnothing$ справедливо следующее условие регулярности (см., например, [3, § 5.18, теорема 3]):

$$\inf_{x \in X^0} f_0(x) = \min_{x \in X} f_0(x). \tag{13}$$

Поэтому $\inf\limits_{x \in \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}^0} B(x,\bar q) = \min\limits_{x \in \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}} B(x,\bar q) = B(\bar x(\bar q),\bar q)$. □

3. Сходимость метода (12) при $\varepsilon \to 0$

Сначала рассмотрим зависимость решения задачи (12) от вариации параметра ε, считая фиксированными параметры $\sigma \geqslant \tilde\sigma$, $\alpha > 0$, $d > 0$. Соответствующую функцию $B(x,q)$ обозначим через $B_\varepsilon(x,\tilde q) = f_0(x) + \varepsilon b(x,\tilde q)$, где

$$\varepsilon > 0, \quad b(x,\tilde q) = \sum_{i=1}^{m} (\sigma+\alpha-f_i(x))^{-1}, \quad \tilde q = [\sigma,\alpha,d], \quad x \in \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}^0.$$

Пусть задана последовательность значений параметра ε: $\varepsilon_0 > \varepsilon_k > \varepsilon_{k+1} > 0$, $k = 1,2,\dots$. Положим $x^k = \bar x(\varepsilon_k) = \arg\inf\limits_{x \in \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}^0} B_{\varepsilon_k}(x,\tilde q)$, $B_k^* = B_{\varepsilon_k}(x^k,\tilde q)$,

$$\bar f_{\tilde q} = \min\{f_0(x)\colon x \in \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}\}. \tag{14}$$

Лемма 3. *Последовательность $\{x^k\}$ удовлетворяет соотношениям* $(k = 1,2,\dots)$

1) $B_{k+1}^* \leqslant B_k^*$;

2) $b(x^{k+1},\tilde q) \geqslant b(x^k,\tilde q)$;

3) $\bar f_{\tilde q} \leqslant f_0(x^{k+1}) \leqslant f_0(x^k) \leqslant B_k^*$.

Доказательство. Из определения точки x^k имеем соотношение п. 1):

$$B_{k+1}^* = B_{\varepsilon_{k+1}}(x^{k+1},\tilde q) \leqslant B_{\varepsilon_{k+1}}(x^k,\tilde q) = f_0(x^k) + \varepsilon_{k+1}\, b(x^k,\tilde q) < f_0(x^k) + \varepsilon_k\, b(x^k,\tilde q)$$

$$= B_{\varepsilon_k}(x^k,\tilde q) = B_k^*.$$

Если из неравенства $B_{\varepsilon_{k+1}}(x^{k+1},\tilde{q}) \leqslant B_{\varepsilon_{k+1}}(x^k,\tilde{q})$ вычесть неравенство $B_{\varepsilon_k}(x^{k+1},\tilde{q}) \geqslant B_{\varepsilon_k}(x^k,\tilde{q})$, то получим $(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})b(x^{k+1},\tilde{q}) \geqslant (\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})b(x^k,\tilde{q})$, т.е. соотношение п. 2): $b(x^{k+1},\tilde{q}) \geqslant b(x^k,\tilde{q})$. Учитывая 2), имеем

$$B^*_{k+1} = f_0(x^{k+1})+\varepsilon_{k+1}\, b(x^{k+1},\tilde{q}) \leqslant B_{\varepsilon_{k+1}}(x^k,\tilde{q}) = f_0(x^k)+\varepsilon_{k+1}\, b(x^k,\tilde{q}) \leqslant f_0(x^k)+\varepsilon_{k+1}\, b(x^{k+1},\tilde{q}).$$

Применяя далее условие регулярности (13), при $X = \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}$ получим утверждение 3). □

Теорема 2. *Любая предельная точка последовательности $\{x^k\}$ при $\varepsilon_k \to 0$ является решением задачи* (14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1 для любого ε_k существует точка $x^k = \bar{x}(\varepsilon_k)$. По определению $x^k \in \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}$, где $\mathcal{M}_{\sigma+\alpha}$ — компактное множество ($k = 1,2,\ldots$). Поэтому существует $\tilde{x}$ — предельная точка последовательности $\{x^k\}$ при $\varepsilon_k \to 0$. Так как $x^k \in \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}$, то $f_0(x^k) \geqslant \bar{f}_{\bar{q}}$, и согласно лемме 3 $f_0(\tilde{x}) \geqslant \bar{f}_{\bar{q}}$. С другой стороны, если $x^*_{\bar{q}}$ — решение задачи (14), то

$$f_0(x^k) < B_{\varepsilon_k}(x^k,\bar{q}) = B^*_k = \min_{x\in\mathcal{M}_{\sigma+\alpha}} B_{\varepsilon_k}(x,\bar{q}) \leqslant B_{\varepsilon_k}(x^*_{\bar{q}},\bar{q}) = f_0(x^*_{\bar{q}}) + \varepsilon_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma+\alpha-f_i(x^*_{\bar{q}})},$$

что влечет

$$f_0(\tilde{x}) = \lim_{k\to\infty} f_0(x^k) \leqslant \lim_{k\to\infty} B^*_k \leqslant \bar{f}_{\bar{q}}.$$ □

Теорема 3. *Существуют константы $\bar{\varepsilon} > 0$ и $C > 0$ такие, что для любых $\varepsilon_k \in (0,\bar{\varepsilon}]$ справедлива оценка*

$$0 < B^*_k - \bar{f}_{\tilde{q}} \leqslant C\sqrt{\varepsilon_k}\,. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как множество $\mathcal{M}^0_{\sigma+\alpha}$ непусто при фиксированном $\tilde{q} = [\sigma,\alpha,d]$ ($\sigma \geqslant \tilde{\sigma},\ \alpha > 0,\ d > 0$), то найдется число $\bar{\varepsilon} > 0$ такое, что множество $G_\varepsilon = \{x\colon g_i(x) < \sigma+\alpha-\sqrt{\varepsilon},\ i = 1,\ldots,m+1\}$ будет непусто для $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}]$ (можно положить, например, $\bar{\varepsilon} = \alpha^2/4$, тогда $\mathcal{M}_{\sigma+\alpha/2} \subset G_{\bar{\varepsilon}} \subset G_\varepsilon \subset \mathcal{M}_{\sigma+\alpha}$).

Обозначим $f^*_\varepsilon = \inf\{f_0(x)\colon x \in G_\varepsilon\}$. Пусть для точки $x_\varepsilon \in G_\varepsilon$ выполняется неравенство $f_0(x_\varepsilon) < f^*_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$ и $0 < \varepsilon = \varepsilon_k \leqslant \bar{\varepsilon}$. Так как $\sigma+\alpha-f_i(x_{\varepsilon_k}) > \sqrt{\varepsilon_k} > 0$, то

$$B^*_k = \inf_{x\in\mathcal{M}^0_{\sigma+\alpha}} B_{\varepsilon_k}(x,\tilde{q}) \leqslant \inf_{x\in G_{\varepsilon_k}} B_{\varepsilon_k}(x,\tilde{q}) \leqslant B_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k},\tilde{q})$$

$$= f_0(x_{\varepsilon_k}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{\sigma+\alpha-f_i(x_{\varepsilon_k})} < f^*_\varepsilon + (m+1)\sqrt{\varepsilon_k}. \tag{16}$$

Определим для задачи (14) функцию чувствительности $\varphi(u) = \inf\{f_0(x)\colon \tilde{g}(x) \leqslant u\}$, $\tilde{g}(x) = [g_i(x)-\sigma-\alpha,\ i = 1,\ldots,m+1]$, $u \in \mathbb{R}^{m+1}$. Легко показать (см. также [7]), что $\varphi(u)$ — выпуклая на $\mathbb{R}^{m+1}$ функция. Поэтому на любом ограниченном множестве из своей области определения $\varphi(u)$ удовлетворяет (см., например, [3]) условию Липшица с некоторой константой $L > 0$. Следовательно,

$$|\varphi(-\tilde{\varepsilon}) - \varphi(0)| = f^*_\varepsilon - \bar{f}_{\tilde{q}} \leqslant L\|\tilde{\varepsilon}\|_\infty = L\sqrt{\varepsilon}, \tag{17}$$

где $\tilde{\varepsilon} = [\sqrt{\varepsilon},\ldots,\sqrt{\varepsilon}] \in \mathbb{R}^{m+1}$, $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Так как $B_{\varepsilon_k}(x,\tilde{q}) > f_0(x) \geqslant \bar{f}_{\tilde{q}}$ $(\forall x \in \mathcal{M}^0_{\sigma+\alpha})$, то из (16), (17) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ получаем оценку (15), где $C = L+m+1$:

$$0 < B^*_k - \bar{f}_{\tilde{q}} \leqslant B^*_k - f^*_{\varepsilon_k} + f^*_{\varepsilon_k} - \bar{f}_{\tilde{q}} \leqslant (L+m+1)\sqrt{\varepsilon_k}.$$ □

4. Сходимость метода (12) в случае неточной информации

Обратимся к вопросу о том, как изменятся полученные выше результаты о сходимости метода (12), если функции задачи (1) заданы с некоторой погрешностью.

Пусть для задачи (1) выполнены условия (7). Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда $\varphi_i(x,\delta) \equiv \delta \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, считаем, что в задаче (1) вместо $f_i(x)$ заданы непрерывные функции $f_i^\delta(x)$, для которых

$$|f_i^\delta(x) - f_i(x)| \leqslant \delta \quad (i = 0, 1, \dots, m), \quad \delta > 0. \tag{18}$$

Тогда задача (6) приобретет форму

$$\inf\{f_0^\delta(x)\colon g_i^\delta(x) \leqslant \tilde{\sigma}^\delta,\ i = 1, \dots, m+1\},$$

где $g_i^\delta(x) = f_i^\delta(x)$ при $i = 1, \dots, m$; $g_{m+1}^\delta(x) = g_{m+1}(x) = \|x\|^2 - d$, $\tilde{\sigma}^\delta = \inf\limits_x \|g^{\delta+}(x)\|_\infty$.

Лемма 4. *Пусть значение $\tilde{\sigma}$ определено в соответствии с* (6). *Тогда*

1) *для любого $0 < \delta < \tilde{\sigma} = \min \|g^+(x)\|_\infty$ справедливы неравенства*

$$|\tilde{\sigma}^\delta - \tilde{\sigma}| < \delta, \quad \tilde{\sigma}^\delta > 0; \tag{19}$$

2) *значение $\tilde{\sigma}^\delta$ есть решение задачи*

$$\inf\{\sigma\colon \sigma \in \Sigma\}, \tag{20}$$

где $\Sigma = \{\sigma\colon \mathcal{M}^\delta(\sigma) \neq \varnothing\}$, $\mathcal{M}^\delta(\sigma) = \{x\colon g_i^\delta(x) \leqslant \sigma,\ i = 1, \dots, m+1\}$.

Доказательство. 1) Из неравенств (18) следует $|f_i^{\delta+}(x) - f_i^+(x)| \leqslant \delta$, что влечет выполнение неравенства $\|g^+(x)\|_\infty < \|g^{\delta+}(x)\|_\infty + \delta$ при произвольном $x \in \mathbb{R}^n$. Поэтому $\tilde{\sigma} = \min \|g^+(x)\|_\infty < \inf\limits_x \|g^{\delta+}(x)\|_\infty + \delta = \tilde{\sigma}^\delta + \delta$. Аналогично справедливо и неравенство $\tilde{\sigma}^\delta < \tilde{\sigma} + \delta$.

2) По определению $\tilde{\sigma}^\delta$ существуют последовательности чисел $\gamma_0 \geqslant \gamma_k > 0$ и точек x_{γ_k} такие, что $\|g^{\delta+}(x_{\gamma_k})\|_\infty < \tilde{\sigma}^\delta + \gamma_k$. Все точки x_{γ_k} лежат в компактном множестве $\{x\colon \|x\|^2 \leqslant d + \tilde{\sigma}^\delta + \gamma_0\}$.

Обозначим через $\tilde{x}$ предельную точку последовательности $\{x_{\gamma_k}\}$ при $\gamma_k \to 0$. Так как $\|g^{\delta+}(\tilde{x})\|_\infty \leqslant \tilde{\sigma}^\delta$, то $\tilde{x} \in \mathcal{M}^\delta(\tilde{\sigma}^\delta)$ и, следовательно, $\|g^{\delta+}(\tilde{x})\|_\infty = \tilde{\sigma}^\delta$. Для любого другого $\sigma' \in \Sigma$ и $x' \in \mathcal{M}^\delta(\sigma')$ справедливо $\tilde{\sigma}^\delta = \inf\limits_x \|g^{\delta+}(x)\|_\infty \leqslant \|g^{\delta+}(x')\|_\infty \leqslant \sigma'$, т. е. $\tilde{\sigma}^\delta$ — решение задачи (20). □

Сформулируем аналог задачи (12) в случае, когда функции исходной задачи (1) удовлетворяют условию (18):

$$\inf_{x \in \mathcal{M}^\delta} \Big\{ B^\delta(x,q) = f_0^\delta(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\sigma + \alpha - f_i^\delta(x)} \Big\}, \tag{21}$$

где $M^\delta = \{x\colon g_i^\delta(x) < \tilde{\sigma}^\delta + \alpha,\ i = 1, \dots, m+1\}$, $q = [\varepsilon, \sigma, \alpha, d]$, $\varepsilon \in (0,1]$, $\sigma \geqslant \tilde{\sigma}^\delta$, $\alpha \in (0,1]$, $d > 0$, $\delta > 0$.

Теорема 4. *Пусть в задаче* (21) $\sigma \geqslant \tilde{\sigma} + \alpha$, $\alpha > 2\delta$. *Тогда оптимальное значение $\widetilde{B}^\delta$ этой задачи удовлетворяет оценке*

$$0 \leqslant \bar{B}_q - \widetilde{B}^\delta \leqslant \delta \Big(1 + \frac{\varepsilon\, m}{(\alpha - \delta)(\alpha - 2\delta)} \Big), \tag{22}$$

где $\bar{B}_q = \min\limits_{x \in \mathcal{M}^0_{\sigma+\alpha+2\delta}} B(x,q)$, $\mathcal{M}^0_{\sigma+\alpha+2\delta} = \{x\colon g_i(x) < \sigma + \alpha + 2\delta,\ i = 1, \dots, m+1\}$, $B(x,q) = f_0(x) + \varepsilon \sum\limits_{i=1}^m (\sigma + \alpha - f_i(x))^{-1}$.

Доказательство. Так как $\alpha > 2\delta > 0$, то множество $\mathcal{M}^0_{\tilde\sigma+\alpha-2\delta} = \{x\colon g_i(x) < \tilde\sigma + \alpha - 2\delta,\ i = 1,\dots,m+1\}$ непусто. Учитывая неравенства (18) и (19), заключаем, что $\mathcal{M}^0_{\tilde\sigma+\alpha-2\delta} \subset \mathcal{M}^\delta \subset \mathcal{M}^0_{\tilde\sigma+\alpha+2\delta}$. Отсюда следует, что множество $\mathcal{M}^\delta$ непусто и ограничено. Далее для $x' \in \mathcal{M}^\delta$ оценим

$$B(x',q) = f_0(x') + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\sigma+\alpha-f_i(x')} = f_0^\delta(x') + f_0(x') - f_0^\delta(x')$$

$$+ \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\sigma+\alpha-f_i^\delta(x')} + \varepsilon\sum_{i=1}^m\Big[\frac{1}{\sigma+\alpha-f_i(x')} - \frac{1}{\sigma+\alpha-f_i^\delta(x')}\Big]$$

$$\leqslant B^\delta(x',q) + \delta + \varepsilon\sum_{i=1}^m\Big[\frac{1}{\sigma+\alpha-f_i(x')} - \frac{1}{\sigma+\alpha-f_i^\delta(x')}\Big]. \tag{23}$$

Из условий теоремы 4 для $x' \in \mathcal{M}^\delta$ следует

$$\sigma+\alpha-f_i(x') > \tilde\sigma + 2\alpha - f_i^\delta(x') - \delta > \tilde\sigma^\delta + \alpha - f_i^\delta(x') + \alpha - 2\delta > \alpha - 2\delta > 0,$$

$$\sigma+\alpha-f_i^\delta(x') > \tilde\sigma + 2\alpha - f_i^\delta(x') > \tilde\sigma^\delta + \alpha - f_i^\delta(x') + \alpha - \delta > \alpha - \delta > 0.$$

Из этих соотношений вытекает

$$\frac{1}{\sigma+\alpha-f_i(x')} < \frac{1}{\alpha-2\delta}, \qquad \frac{1}{\sigma+\alpha-f_i^\delta(x')} < \frac{1}{\alpha-\delta},$$

поэтому

$$\frac{1}{\sigma+\alpha-f_i(x')} - \frac{1}{\sigma+\alpha-f_i^\delta(x')} = \frac{f_i(x') - f_i^\delta(x')}{(\sigma+\alpha-f_i(x')(\sigma+\alpha-f_i^\delta(x'))} < \frac{\delta}{(\alpha-\delta)(\alpha-2\delta)}.$$

Таким образом, из (23) получаем для произвольного $x' \in \mathcal{M}^\delta$

$$B(x',q) < B^\delta(x',q) + \delta\Big(1 + \frac{m\varepsilon}{(\alpha-\delta)(\alpha-2\delta)}\Big).$$

Окончательно имеем

$$\min_{x\in\mathcal{M}^0_{\tilde\sigma+\alpha+2\delta}} B(x,q) \leqslant \inf_{x\in\mathcal{M}^\delta} B(x,q) < \inf_{x\in\mathcal{M}^\delta} B^\delta(x,q) + \delta\Big(1 + \frac{m\varepsilon}{(\alpha-\delta)(\alpha-2\delta)}\Big),$$

т. е. оценку (22). □

Сформулируем общую теорему о сходимости метода квазирешений (12) для случая неточного задания функций $f_i(x)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда*

$$\lim_{\substack{\delta\to0\\ \varepsilon\to0}} \inf_{x\in\mathcal{M}^\delta} B_\varepsilon^\delta(x,\tilde q) = \bar f_{\tilde q}, \tag{24}$$

где $\bar f_{\tilde q}$ — оптимальное значение задачи (14), $\tilde q = [\sigma,\alpha,d]$, $B_\varepsilon^\delta(x,\tilde q) = f_0^\delta(x) + \sum\limits_{i=1}^m \dfrac{\varepsilon}{\sigma+\alpha-f_i^\delta(x)}$.

Доказательство. Учитывая условия на параметры $\tilde q = [\sigma,\alpha,d]$, $\delta > 0$ и соотношения (18) и (19), получаем для $x' \in \mathcal{M}^\delta$

$$\sigma+\alpha-g_i^\delta(x') \geqslant \tilde\sigma + 2\alpha - g_i^\delta(x') \geqslant \sigma^\delta - \delta + 2\alpha - g_i^\delta(x') = \sigma^\delta + \alpha - g_i^\delta(x') + (\alpha-\delta) > \alpha - \delta > 0.$$

Поэтому

$$B_\varepsilon^\delta(x',q)=f_0^\delta(x')+\sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\sigma+\alpha-f_i^\delta(x')}<f_0(x')+\delta+\frac{m\,\varepsilon}{\alpha-\delta},$$

а также

$$\inf_{x\in\mathcal{M}^\delta} f_0(x)-\delta<\inf_{x\in\mathcal{M}^\delta} B_\varepsilon^\delta(x,\tilde q)<\inf_{x\in\mathcal{M}^\delta} f_0(x)+\delta+\frac{m\,\varepsilon}{\alpha-\delta}. \tag{25}$$

Поскольку $\mathcal{M}^0_{\tilde\sigma+\alpha-2\delta}\subset\mathcal{M}^\delta\subset\mathcal{M}^0_{\tilde\sigma+\alpha+2\delta}$, то

$$\inf_{x\in\mathcal{M}^0_{\tilde\sigma+\alpha+2\delta}} f_0(x)\leqslant\inf_{x\in\mathcal{M}^\delta} f_0(x)\leqslant\inf_{x\in\mathcal{M}^\delta_{\tilde\sigma+\alpha-2\delta}} f_0(x). \tag{26}$$

Рассмотрим подробнее левую задачу в (26): $\inf\limits_{x\in G_\delta} f_0(x)$, где $G_\delta=\mathcal{M}^0_{\tilde\sigma+\alpha+2\delta}$. Пусть

$$\bar x_\delta=\arg\min\{f_0(x)\colon g_i(x)\leqslant\tilde\sigma+\alpha+2\delta,\ i=1,\dots,m+1\},\qquad \bar f_\delta=f_0(\bar x_\delta).$$

Если $0<\delta_2<\delta_1$, то $G_0\subset G_{\delta_2}\subset G_{\delta_1}$, где $G_0=\mathcal{M}_{\tilde\sigma+\alpha}$. Поэтому $\bar f_{\tilde q}\geqslant\bar f_{\delta_2}\geqslant\bar f_{\delta_1}$, т. е. при $\delta_k>\delta_{k+1}>0$ последовательность чисел $\bar f_k=\bar f_{\delta_k}$ будет монотонно возрастать, оставаясь ограниченной сверху величиной $\bar f_{\tilde q}$. Тогда при $\delta_k\to 0$ $(k\to\infty)$ существует $\lim\limits_{k\to\infty}\bar f_k=\bar f\leqslant\bar f_{\tilde q}$. Точки $x_k=\bar x_{\delta_k}$ лежат в компактном множестве $\bar G_{\delta_1}$ (замыкании множества G_{δ_1}) при $k=1,2,\dots$. Пусть $\tilde x$ — предельная точка для $\{x_k\}$ при $k\to\infty$. Так как $g_i(x_k)\leqslant\tilde\sigma+\alpha+2\delta_k$, то $\tilde x\in G_0$ и $f_0(\tilde x)\geqslant\bar f_{\tilde q}$. Таким образом, $\bar f=f_0(\tilde x)=\bar f_{\tilde q}$ и $\lim\limits_{\delta\to0}\inf\limits_{x\in G_\delta} f_0(x)=\bar f_{\tilde q}$.

Проведя аналогичное рассуждение для правой задачи в (26), будем иметь

$$\lim_{\delta\to0}\inf_{x\in\mathcal{M}^0_{\tilde\sigma+\alpha-2\delta}} f_0(x)=\bar f_{\tilde q}.$$

Два последних предела и (26) в итоге дают

$$\lim_{\delta\to0}\inf_{x\in\mathcal{M}^\delta} f_0(x)=\bar f_{\tilde q}.$$

Отсюда и из (25) получаем требуемое соотношение (24). □

5. Управление параметром α в методе (12)

Рассмотрим задачу (11)

$$\min\{f_0(x)\colon g_i(x)\leqslant\sigma,\ i=1,\dots,m+1\},\quad \sigma\geqslant\tilde\sigma.$$

Из доказательства леммы 1 вытекает непустота и ограниченность ее допустимого множества, так что существует $\bar x_\sigma$ — решение (11). Обозначим $\bar f_\sigma=f_0(\bar x_\sigma)$.

Предположим далее, что в задаче (12) минимизации барьерной функции $B(x,q)$ параметры σ и d фиксированы ($\sigma\geqslant\tilde\sigma$, $d>0$), тогда как $\varepsilon\to0$, $\alpha\to0$, причем $\varepsilon=o(\alpha)$.

В соответствии с этими условиями зададим последовательности значений параметров ε и α: $\varepsilon_0>\varepsilon_k>\varepsilon_{k+1}>0$, $\alpha_k=\varepsilon_k^\gamma$, $0<\gamma<1$, $k=1,2,\dots$, $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$. Определим

$$\bar x^k=\bar x(\varepsilon_k)=\arg\inf_{x\in G_k^0} B_1(x,\varepsilon_k), \tag{27}$$

где $B_1(x,\varepsilon_k)=f_0(x)+\varepsilon_k\sum\limits_{i=1}^m(\sigma+\varepsilon_k^\gamma-f_i(x))^{-1}$, $G_k^0=\{x\colon g_i(x)<\sigma+\varepsilon_k^\gamma,\ i=1,\dots,m+1\}$.

Теорема 6. *Пусть в задаче* (27) $\varepsilon_k\to0$ $(k\to\infty)$. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} f_0(\bar x^k)=\lim_{k\to\infty} B_1(\bar x^k,\varepsilon_k)=\bar f_\sigma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из непустоты и ограниченности множеств $G_k^{0\cdot}$ $(\forall k)$ следует разрешимость задачи (27) для любого $k = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{\bar{x}^k\}$ имеет при $\varepsilon_k \to 0$ предельную точку $\tilde{x}$, которая будет допустимой в задаче (11) и $f_0(\tilde{x}) \geqslant \bar{f}_\sigma$.

Обозначим далее через x'_k решение задачи

$$\min\left\{f_0(x)\colon g_i(x) \leqslant \sigma + (1/2)\,\varepsilon_k^\gamma,\ i = 1, \ldots, m+1\right\} \tag{28}$$

(как и $\bar{x}^k$, оно существует для любого k). Поскольку $g_i(x'_k) < \sigma + \varepsilon_k^\gamma$ $(i = 1, \ldots, m+1)$, то $x'_k \in G_k^0$ и справедливы соотношения

$$f_0(\bar{x}^k) < B_1(\bar{x}^k, \varepsilon_k) = \inf_{x \in G_k^0} B_1(x, \varepsilon_k) \leqslant B_1(x'_k, \varepsilon_k) = f_0(x'_k) + \varepsilon_k \sum_{i=1}^m (\sigma + \varepsilon_k^\gamma - f_i(x'_k))^{-1}. \tag{29}$$

Так как $g_i(x'_k) \leq \sigma + \varepsilon_k^\gamma/2$, то $\sigma + \varepsilon_k^\gamma - g_i(x'_k) \geqslant \varepsilon_k^\gamma/2$. Учитывая эту оценку в (29), получим $f_0(\bar{x}^k) < B_1(\bar{x}^k, \varepsilon_k) < f_0(x'_k) + 2m\varepsilon_k^{1-\gamma}$. Отсюда при $\varepsilon_k \to 0$ выполняются соотношения

$$\bar{f}_\sigma \leqslant \lim_{k\to\infty} f_0(\bar{x}^k) \leqslant \lim_{k\to\infty} B_1(\bar{x}^k, \varepsilon_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} f_0(x'_k). \tag{30}$$

Обратимся теперь к лемме 2. Очевидно, что она останется справедливой, если вместо (6) рассмотреть задачу (11) для некоторого фиксированного значения σ, а вместо (9) — задачу (28). Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x'_k) = \bar{f}_\sigma$, и из (30) будет следовать справедливость теоремы. □

Для задачи (11) можно ввести аппроксимацию

$$\min\{f_0(x)\colon g_i(x) \leqslant \sigma + \bar{\alpha},\ i = 1, \ldots, m+1\}, \quad \sigma \geqslant \tilde{\sigma}, \quad \bar{\alpha} > 0. \tag{31}$$

Если $\bar{x}_{\sigma+\bar{\alpha}}$ — решение (31), $\bar{f}_{\sigma+\bar{\alpha}} = f_0(\bar{x}_{\sigma+\bar{\alpha}})$, то согласно лемме 2 для задачи (11) $\bar{f}_{\sigma+\bar{\alpha}} \to \bar{f}_\sigma$ при $\bar{\alpha} \to 0$. Таким образом, параметр $\bar{\alpha}$ характеризует уровень требуемой точности при решении задачи (11).

Адаптируем метод (27) для решения задачи (31). Зададим последовательность значений параметров ε и α: $1 \geqslant \varepsilon_0 > \varepsilon_k > \varepsilon_{k+1} > 0$, $\alpha_k = \bar{\alpha} + \varepsilon_k^\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$, $k = 1, 2, \ldots$; $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \bar{\alpha}$.

Определим

$$\tilde{x}_k = \arg \inf_{x \in \bar{G}_k^0} B_2(x, \varepsilon_k), \tag{32}$$

где $B_2(x, \varepsilon_k) = f_0(x) + \varepsilon_k \sum\limits_{i=1}^m (\sigma + \bar{\alpha} + \varepsilon_k^\gamma - f_i(x))$, $k = 1, 2 \ldots,$; $\bar{G}_k^0 = \{x\colon g_i(x) < \sigma + \bar{\alpha} + \varepsilon_k^\gamma,\ i = 1, \ldots, m+1\}$.

Теорема 7. *Если в задаче* (32) $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} f_0(\tilde{x}_k) = \lim_{k\to\infty} B_2(\tilde{x}_k, \varepsilon_k) = \bar{f}_{\sigma+\bar{\alpha}}. \tag{33}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для вывода равенств (33) достаточно с небольшими естественными изменениями повторить доказательство предыдущей теоремы. Роль задачи (28) будет при этом играть задача

$$\min\left\{f_0(x)\colon g_i(x) \leqslant \sigma + \bar{\alpha} + (1/2)\,\varepsilon_k^\gamma,\ i = 1, \ldots, m+1\right\}.$$

Ее решение x''_k лежит во множестве $\bar{G}_k^0$. Отсюда

$$\sigma + \bar{\alpha} + \varepsilon_k^\gamma - g_i(x''_k) = \sigma + \bar{\alpha} + (1/2)\,\varepsilon_k^\gamma - g_i(x''_k) + (1/2)\,\varepsilon_k^\gamma > (1/2)\,\varepsilon_k^\gamma,$$

и, следовательно,

$$f_0(\tilde{x}_k) < B_2(\tilde{x}_k, \varepsilon_k) \leqslant f_0(x''_k) + 2m\varepsilon_k^{1-\gamma},$$

что при $\varepsilon_k \to 0$ ведет к выполнению аналога (30)

$$\bar{f}_{\sigma+\bar{\alpha}} \leqslant \lim_{k\to\infty} f_0(\tilde{x}^k) \leqslant \lim_{k\to\infty} B_2(\tilde{x}^k, \varepsilon_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} f_0(x''_k). \tag{34}$$

Учитывая лемму 2, сформулированную для задачи (31), от (34) приходим к равенствам (33). □

6. Общая схема метода квазирешений для НЗ ВП

Пусть в исходной задаче (1) $X = \varnothing$, $X_{\bar\sigma} \neq \varnothing$, где $X_\sigma = \{x\colon f_i(x) \leqslant \sigma,\ i = 1,\ldots,m\}$, $\bar\sigma = \min\{\sigma\colon X_\sigma \neq \varnothing\}$. Оптимальная коррекция для НЗ ВП (1) представляет из себя задачу (2)

$$\min\{f_0(x)\colon x \in X_{\bar\sigma}\},$$

при этом $\bar\sigma = \|f^+(\bar x)\|_\infty$, $\bar x = \arg\min \|f^+(x)\|_\infty$. С учетом особенностей метода квазирешений (4) более естественной оптимальной коррекцией для (1) становится задача (6)

$$\min\{f_0(x)\colon g_i^d(x) \leqslant \tilde\sigma,\ i = 1,\ldots,m+1\},$$

где $g_i^d(x) = f_i(x)$, $i = 1,\ldots,m$; $g_{m+1}^d(x) = \|x\|^2 - d$, $\tilde\sigma = \tilde\sigma_d = \min \|g^{d^+}(x)\|_\infty$.

Рассматриваемый в настоящей работе вариант метода квазирешений сводит решение задачи (6) к анализу модели (12):

$$\inf_{x\in\mathcal{M}^0_{\sigma+\alpha}} \Big\{B(x,q) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\sigma+\alpha-f_i(x)}\Big\},$$

где $q = [\varepsilon,\sigma,\alpha,d]$, $\mathcal{M}^0_{\sigma+\alpha} = \{x\colon g_i^d(x) < \sigma+\alpha,\ i = 1,\ldots,m+1\}$, $\varepsilon \in (0,1]$, $\sigma \geqslant \tilde\sigma$, $\alpha \in (0,1]$, $d > 0$.

В разд. 3–5 были найдены условия на параметр q, обеспечивающие эквивалентность задач (6) и (12). Как правило, эта эквивалентность зависела от изменения параметров ε и α при постоянных $\sigma \geqslant \tilde\sigma$ и $d > 0$. Из анализа полученных результатов следовало, что предпочтительным является выбор $\sigma = \bar\sigma$ и $d = \bar d$, где $\bar d = \|\bar x\|^2 = \min\{\|x\|^2\colon x \in X_{\bar\sigma}\}$. В этом случае точка $\bar x$ будет единственным обобщенным решением исходной постановки (1). Поэтому естественными представляются способы задания параметров σ и d в виде итеративных последовательностей σ_k и d_k таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = \bar\sigma$, $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = \bar d$.

Обозначим

$$B_k(x) = B(x,q_k) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k+\alpha_k-f_i(x)},$$

где $q_k = [\varepsilon_k,\sigma_k,\alpha_k,d_k]$, $\varepsilon_k > 0$, $\sigma_k \geqslant \bar\sigma$, $\alpha_k > 0$, $d_k > 0$ $(\forall k)$, и рассмотрим задачу

$$\inf\{B_k(x)\colon x \in \mathcal{M}^0_k\}, \tag{35}$$

где $\mathcal{M}^0_k = \{x\colon f_i(x) < \sigma_k+\alpha_k,\ i = 1,\ldots,m;\ \|x\|^2 < d_k+\sigma_k+\alpha_k\}$. Сформулируем также задачу (6) при $d = \bar d$.

Так как $\tilde\sigma_{\bar d} = \min\limits_x \|g^{\bar d^+}(x)\|_\infty \leqslant \|g^{\bar d^+}(\bar x)\|_\infty = \|f^+(\bar x)\|_\infty = \bar\sigma$, то задача (6) может быть записана как

$$\min\{f_0(x)\colon x \in \widetilde{\mathcal{M}}\};$$

здесь $\widetilde{\mathcal{M}} = \{x\colon f_i(x) \leqslant \bar\sigma,\ i = 1,\ldots,m;\ \|x\|^2 \leqslant \bar d + \bar\sigma\}$. Очевидно, что $\widetilde{\mathcal{M}} = \{\bar x\}$.

Согласно теореме 1 для любого набора параметров q_k существует точка $x_k = \bar x(q_k)$ — решение задачи (35): $x_k = \arg\min\{B_k(x)\colon x \in \mathcal{M}^0_k\}$.

Теорема 8. *Пусть в задаче* (35) $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k/\alpha_k = 0$, $\sigma_k \geqslant \bar\sigma$ $(\forall k)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = \bar\sigma$, $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = \bar d$. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{x\in\mathcal{M}^0_k} B_k(x) = f_0(\bar x), \quad \lim_{k\to\infty} x_k = \bar x. \tag{36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из ограниченности последовательностей $\{\sigma_k\}$, $\{\alpha_k\}$ и $\{d_k\}$ следует ограниченность множеств $\mathcal{M}_k^0$. Поэтому можно считать, что все точки последовательности $\{x_k\}$ лежат в некотором компактном множестве $\mathcal{M}$. Обозначим через $\tilde{x}$ предельную точку $\{x_k\}$ при $k \to \infty$. Очевидно, $f(\tilde{x}) \leqslant \bar{\sigma}$, $\|x\|^2 \leqslant \bar{d} + \bar{\sigma}$, т.е. $\tilde{x} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $\lim x_k = \bar{x}$.

Определим множество $\widetilde{\mathcal{M}}_k = \{x\colon f_i(x) \leqslant \sigma_k + \alpha_k/2,\ \|x\|^2 \leqslant d_k + \sigma_k + \alpha_k/2\}$. Функция $B_k(x)$ определена в точках множества $\widetilde{\mathcal{M}}_k \subset \mathcal{M}_k^0$ $(\forall k)$. Пусть $\tilde{x}_k = \arg\min\limits_{x \in \widetilde{\mathcal{M}}_k} B_k(x)$. Так как $\sigma_k + \alpha_k - g_i(\tilde{x}_k) = \sigma_k + \alpha_k/2 - g_i(\tilde{x}_k) + \alpha_k/2 > \alpha_k/2 > 0$, то $\varepsilon_k/(\sigma_k + \alpha_k - g_i(\tilde{x}_k)) < 2\varepsilon_k/\alpha_k$.

Справедливы соотношения

$$f_0(x_k) < B_k(x_k) = \inf_{x \in \mathcal{M}_k^0} B_k(x) \leqslant \min_{x \in \widetilde{\mathcal{M}}_k} B_k(x)$$

$$= f_0(\tilde{x}_k) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k + \alpha_k - f_i(\tilde{x}_k)} < f_0(\tilde{x}_k) + \frac{2m\varepsilon_k}{\alpha_k}. \tag{37}$$

Очевидно, что последовательность $\{\tilde{x}_k\}$ имеет при $k \to \infty$ ту же предельную точку $\bar{x}$, что и $\{x_k\}$. Поэтому из (37) с учетом того, что $\varepsilon_k/\alpha_k \to 0$ $(k \to \infty)$, получаем равенства (36). □

Заключение

Работа посвящена построению способов коррекции НЗ ВП на основе применения одного из стандартных методов регуляризации некорректных экстремальных задач — метода квазирешений. Использование идеи регуляризации позволяет снять многие вопросы, связанные с существованием решений возникающих задач минимизации, со сходимостью предлагаемых итерационных процедур и устойчивостью решений по отношению к неточному заданию исходных данных.

Обычно в структуре метода квазирешений ограничения исходной задачи агрегируются с помощью некоторой модификации внешней штрафной функции (например, точной или квадратичной; см. [4;5]). В этой статье для данной цели используется функция внутреннего штрафа — обратная барьерная функция. Эта функция по сравнению с функциями внешнего штрафа обладает более хорошими свойствами гладкости, что в свою очередь расширяет спектр возможных алгоритмов при численной реализации метода. В то же время имеются сложности с областью определения барьерной функции, которая предполагает наличие внутренних точек для допустимого множества решаемой задачи. Для широкого круга НЗ ВП последнее требование заведомо не выполняется. Поэтому в ряде случаев необходимо модифицировать само понятие коррекции несобственной задачи, вводить в определение барьерной функции новые управляющие параметры и находить условия применения этих параметров для обеспечения сходимости в целом итерационного процесса. Основными новыми параметрами являются параметр коррекции σ, который характеризует степень расширения допустимого множества, параметр α, обеспечивающий непустоту множества определения барьерной функции, d — параметр регуляризации, определяющий вместе с σ допустимое множество корректирующей задачи.

В работе рассматриваются особенности построения задач коррекции для НЗ ВП, обсуждаются вопросы существования решений у возникающих задач, исследуется влияние параметров барьерной функции на сходимость конкретной модификации метода квазирешений для НЗ ВП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
3. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: кн. 1,2. МЦНМО, 2011. 1056 с.

4. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 196 с.
5. **Фиакко А., Мак-Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
6. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
7. **Эльстер К.-Х., Рейнгарт Р., Шойбле М., Донат Г.** Введение в нелинейное программирование. М.: Наука, 1985. 264 с.
8. **Gill P.E., Murray W., Sunders M.S., Tomlin J.A., Wright M.H.** On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projected methods // Math. Prog. 1986. Vol. 36, no. 2. P. 183–209. doi: 10.1007/BF02592025 .
9. **Скарин В.Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.
10. **Попов Л.Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. Т. 3. С. 3–11.
11. **Скарин В.Д.** О некоторых универсальных методах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Автоматика и телемеханика. 2012. Т. 2. С. 99–110.
12. **Попов Л.Д., Скарин В.Д.** Лексикографическая регуляризация и двойственность для несобственных задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 279–291.
13. **Skarin V.** On parameter control of the residual method for the correction of improper problems // Discrete Optimization and Operations Research (DOOR 2016) / eds. Kochetov, Yu. et all. P. 441–451. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9869). doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_35 .
14. **Волков В.В., Ерохин В.И., Красников А.С., Разумов А.В., Хвостов М.Н.** Минимальная по евклидовой норме матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, № 11. С. 1788–1803. doi: 10.7868/S0044466917110151.
15. **Муравьева О.В.** Определение радиусов совместности и несовместности систем линейных уравнений и неравенств по матричной норме // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 6. С. 873–882. doi: 10.7868/S0044466918060029 .
16. **Васильев Ф.П., Потапов М.М., Артемьева Л.А.** Экстраградиентный метод коррекции противоречивых задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 12. С. 1992–1998. doi: 10.31857/S004446690003547-2 .
17. **Golub G.N., Hansen P.C., O'Leary D.P.** Tikhonov regularization and total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1999. Vol. 2, no. 1. P. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432 .
18. **Renaut R., Guo N.** Efficient algorithms for solution of regularized total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. Vol. 26, no. 2. P. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889 .

Поступила 2.08.2022
После доработки 25.08.2022
Принята к публикации 29.08.2022

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: skavd@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Eremin I.I., Mazurov Vl.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper problems of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 336 p.
2. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.
3. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii. T.* 1, 2. [Optimization methods. Vol. 1, 2]. Moscow: MTsNMO Publ., 2011, 1056 p. ISBN: 978-5-94057-707-2, 978-5-94057-708-9 .

4. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 196 p.
5. Fiacco A.V., McCormick G.P. *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques.* Classics in applied mathematics, vol. 4. Philadelphia: SIAM, 1987, 226 p. ISBN: 0898712548. Translated to Russian under the title *Nelineinoe programmirovanie. Metody posledovatel'noi bezuslovnoi minimizatsii.* Moscow: Mir Publ., 1972, 240 p.
6. Evtushenko Yu.G. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach i ikh primenenie v sistemakh optimizatsii* [Methods of solving extremal problems and their application in optimization systems]. Moscow: Nauka Publ., 1982, 432 p.
7. Elster K.H., Reinhardt R., Schäuble M., Donath G. *Einführung in die nichtlineare Optimierung.* Leipzig: Teubner, 1977, 299 p. Translated to Russian under the title *Vvedenie v nelineinoe programmirovanie.* Moscow: Nauka Publ., 1985, 264 p. ISBN: 9782763785233.
8. Gill P.E., Murray W., Saunders M.A., Tomlin J.A., Wright M.H. On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projective method. *Math. Program.*, 1986, vol. 36, no. 2, pp. 183–209. doi: 10.1007/BF02592025.
9. Skarin V.D. Barrier function method and correction algorithms for improper convex programming problems. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2008, vol. 263, suppl. 2, pp. S120–S134. doi: 10.1134/S0081543808060126.
10. Popov L.D. Use of barrier functions for optimal correction of improper problems of linear programming of the 1st kind. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 417–424. doi: 10.1134/S0005117912030010.
11. Skarin V.D. On some universal methods of correction of the improper convex programming problems. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 2, pp. 300–309. doi: 10.1134/S0005117912020087.
12. Popov L.D., Skarin V.D. Lexicographic regularization and duality for improper linear programming problems. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2016, vol. 295, suppl. 1, pp. 131–144. doi: 10.1134/S0081543816090145.
13. Skarin V.D. On the parameter control of the residual method for the correction of improper problems of convex programming. In: Kochetov Y., Khachay M., Beresnev V., Nurminski E., Pardalos P. (eds.), *Discrete Optimization and Operations Research. DOOR 2016*, Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9869, Springer, 2016, pp. 441–451. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_35.
14. Volkov V.V., Erokhin V.I., Krasnikov A.S., Razumov A.V., Khvostov M.N. Minimum-Euclidean-norm matrix correction for a pair of dual linear programming problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2017, vol. 57, no. 11, pp. 1757–1770. doi: 10.1134/S0965542517110148.
15. Murav'eva O.V. Determination of consistency and inconsistency radii for systems of linear equations and inequalities using the matrix l_1 norm. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 6, pp. 840–849. doi: 10.1134/S0965542518060106.
16. Vasil'ev F.P., Potapov M.M., Artem'eva L.A. Extragradient method for correction of inconsistent linear programming problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 12, pp. 1919–1925. doi: 10.1134/S0965542518120163.
17. Golub G.H., Hansen P.C., O'Leary D.P. Tikhonov regularization and total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1999, vol. 21, no. 1, pp. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432.
18. Renaut R.A., Guo N. Efficient algorithms for solution of regularized total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2005, vol. 26, no. 2, pp. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889.

Received August 2, 2022
Revised August 25, 2022
Accepted August 29, 2022

Vladimir Dmitrievich Skarin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: skavd@imm.uran.ru.

Cite this article as: V. D. Skarin. The method of quasi-solutions based on barrier functions in the analysis of improper convex programming problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 201-215.