Том 28 № 4 2022

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-17-22

СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ТЕЛЯКОВСКИЙ

(*Светлой памяти ученого*)

В. И. Бердышев, О. В. Бесов, Б. С. Кашин, С. В. Конягин, Ю. В. Малыхин, К. И. Осколков, А. С. Теляковский, Д. С. Теляковский, В. Н. Темляков, Н. Н. Холщевникова

5 мая 2020 г. ушел из жизни доктор физико-математических наук, профессор Сергей Александрович Теляковский.

С. А. Теляковский родился 22 декабря 1932 г. в Саратове. Его отец, Александр Николаевич Теляковский, работал инженером на Саратовском заводе комбайнов. В 1938 г. он был репрессирован и расстрелян; реабилитирован посмертно. Мать, Галина Ивановна, работала на том же заводе экономистом. Свою жизнь она посвятила детям — Сергею Александровичу и Нине Александровне. Приезжая в Саратов на Саратовские научные школы, Сергей Александрович всегда навещал маму и сестру.

В 1950 г. Сергей Александрович окончил школу, поступил на механико-математический факультет Саратовского университета и окончил его в 1955 году. В научную работу Сергея Александровича вовлек известный математик, работавший в Саратовском университете Николай Петрович Купцов, который был и руководителем его дипломной работы. На 5-м курсе С. А. Теляковский получал стипендию имени Н. Г. Чернышевского.

Вся дальнейшая жизнь С. А. Теляковского связана с Математическим институтом имени В. А. Стеклова РАН. Сначала он учился в МИАН в аспирантуре, где его научным руководителем стал профессор Сергей Борисович Стечкин, выдающийся математик, организатор науки, педагог и человек. В 1958 г. Сергей Александрович был принят на работу в отдел теории функций МИАН. Кандидатскую диссертацию он защитил в 1959 г., докторскую — в 1967 г.

В первые годы существования института отделом заведовал академик Н. Н. Лузин, тогда и позже в отделе работали многие ученики и ученики учеников Н. Н. Лузина и среди них такие легендарные математики, как Д. Е. Меньшов и С. М. Никольский. В настоящее время отдел возглавляет академик Б. С. Кашин.

Большое внимание С. А. Теляковский уделял педагогической деятельности. С 1963 г. на протяжении 33 лет, одновременно с работой в МИАН, он читал лекции по аналитической геометрии и по математическому анализу в Московском физико-техническом институте. Двое его учеников К. И. Осколков и В. Н. Темляков, с которыми он начал заниматься, когда они были студентами МФТИ, окончили аспирантуру в МИАН, защитили кандидатские, а затем докторские диссертации, стали известными учеными, сотрудниками отдела.

Сергей Александрович вел семинар по теории приближений в МИАН, а также был непременным участником семинара С. Б. Стечкина. Сергей Борисович называл Сергея Александровича “цензором”, обращался к нему для справедливого урегулирования спорных вопросов и предлагал в конце каждого доклада произнести резюме. В 1990 г., когда число участников катастрофически уменьшилось, эти два семинара объединились. С 1996 г. семинаром руководил С. А. Теляковский, а участники иногда спорили, на каком именно семинаре они присутствуют.

Участвовал Сергей Александрович и в работе многих математических конференций, зимних и летних школ и, конечно, на школах С. Б. Стечкина, куда нередко приезжал с сыновьями, Алексеем Сергеевичем и Дмитрием Сергеевичем, тоже математиками.

В 2012 г., в год своего 80-летия, Сергей Александрович не захотел устраивать конференцию в свою честь, как его уговаривали в Математическом институте, а блестяще провел семинар-конференцию, на которой тоже выступил с докладом. Еще один доклад был сделан его другом, с которым они написали 15 совместных научных работ, Юрием Николаевичем Субботиным. Доклад о результатах С. А. Теляковского, связанных с приближением функций многих переменных, был сделан учеником В. Н. Темлякова кандидатом физико-математических наук Н. Н. Пустовойтовым — "научным внуком" Сергея Александровича.

В 1996–2006 гг. С. А. Теляковский читал лекции в МГУ на механико-математическом факультете. По этому курсу он написал лекции, которые были изданы механико-математическим факультетом в виде четырех книжек для I–IV семестров в 2001–2004 гг. Второе, переработанное, издание курса в трех томах было выпущено Математическим институтом имени В. А. Стеклова в серии "Лекционные курсы НОЦ" в 2009–2013 гг. В 2010 г. С. А. Теляковский и Ю. Н. Субботин в составе команды соредакторов подготовили книгу "Изложение лекций С. Б. Стечкина по теории приближений".

Почти 20 лет Сергей Александрович был одним из помощников директора МИАН академика Ивана Матвеевича Виноградова. В 1978 г. по поручению И. М. Виноградова, возглавившего комиссию Отделения математики АН СССР для исправления положения со школьными программами, С. А. Теляковский редактировал школьные учебники по алгебре для 7, 8, 9 классов. Они получили высокую оценку учителей, стали победителями Всесоюзного конкурса учебников 1988 г. и широко используются в средней школе по настоящее время.

С. А. Теляковский более 20 лет был ученым секретарем диссертационного совета МИАН. С основания в 1974 г. международного журнала "Analysis Mathematica", издаваемого до 1991 г. (включительно) совместно Академией наук СССР и Венгерской Академией наук, а начиная с 1992 г. — совместно Российской и Венгерской Академиями наук, Сергей Александрович более 30 лет являлся заместителем главного редактора журнала. Он неоднократно участвовал в работе по грантам РФФИ, включая руководство некоторыми из них. В 1998 г. он получил премию конкурса научно-популярных статей РФФИ.

Приведем некоторые научные результаты С. А. Теляковского. Один из них установлен в 1997 г. и заключается в следующем.

Пусть $\{n_j\}$ *— строго возрастающая последовательность натуральных чисел*

$$n_1 = 1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \quad \text{и} \quad \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{n_j} \le \frac{A}{n_i}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

(*это эквивалентно тому, что* $\{n_j\}$ *является объединением конечного числа лакунарных последовательностей*). *Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \Big| \le CA,$$

где C *— абсолютная постоянная. Кроме того, для любой функции ограниченной вариации* f *сумма модулей блоков ряда Фурье равномерно ограничена:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \Big| \le CA \operatorname{Var}(f),$$

где a_k, b_k *— коэффициенты Фурье функции* f.

Данный результат является усилением классической теоремы Янга о равномерной ограниченности частных сумм ряда Фурье функций ограниченной вариации.

Вслед за этим изучались необходимые и достаточные условия на последовательность $\{n_j\}$ для принадлежности суммы модулей блоков ряда Фурье пространствам L^p для класса функций ограниченной вариации.

С. А. Теляковский получил в 2004 г. достаточное условие на $\{n_j\}$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log \min(n_j, n_{j+1} - n_j + 1)}{n_j} < \infty$$

для интегрируемости суммы ряда по блокам. Р. М. Тригуб доказал в 2007 г., что это условие является также и необходимым. В дальнейшем А. С. Белов и С. А. Теляковский установили критерий принадлежности ряда по блокам пространству L^∞. А. С. Беловым получен также критерий принадлежности пространствам L^p, $1 < p < \infty$. В 2010 г. В. П. Заставный решил ряд близких задач в более общей постановке. Аналогичные вопросы рассматривались С. А. Теляковским с соавторами для рядов по системе Уолша.

Некоторые тонкие оценки тригонометрических полиномов были получены Сергеем Александровичем и потом успешно применены в теории приближений. Так, в задаче о приближении функций класса W^r_∞ суммами Фурье А. Н. Колмогоров получил асимптотику погрешности, считая r фиксированным числом; вопрос о зависимости остаточного члена от r не рассматривался. С. А. Теляковский показал, что

$$\sup_{f \in W^r_\infty} \|f - S_n(f)\|_\infty = \frac{4}{\pi^2} n^{-r} \ln \frac{n}{\min(r+1, n)} + O(n^{-r}),$$

где константа в $O(\cdot)$ абсолютная. Этот результат высоко ценил Сергей Михайлович Никольский.

Упомянем еще один сюжет в творчестве С. А. Теляковского, относящийся к теории приближений — относительные поперечники. Теляковский совместно с Ю. Н. Субботиным изучал вопрос о равенстве колмогоровского и относительного поперечников классов гладких функций, по этой теме ими написан ряд совместных статей (1999–2012). Рассмотрим случай равномерной метрики; вопрос состоит в том, при каких M выполнено равенство

$$K_n(W^r_\infty, MW^j_\infty, L_\infty) = d_n(W^r_\infty, L_\infty).$$

В относительном поперечнике K_n, в отличие от колмогоровского, класс W^r_∞ приближается только теми элементами n-мерного пространства, которые лежат в MW^j_∞, т. е. удовлетворяют условию $\|g^{(j)}\|_\infty \le M$. В случае $j = r$ было доказано, что при $M \ge (4/\pi^2) \ln \min\{n, r\} + C$ поперечники совпадают. При $j < r$ было установлено, что минимально возможное число $M = M(n)$, при котором достигается равенство, стремится к константе Фавара $\mathcal{K}_{r-j}$ при $n \to \infty$. При $j > r$ был найден правильный порядок роста $M \asymp n^{j-r}$.

Многие работы Сергея Александровича посвящены тригонометрическим рядам

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

с монотонными коэффициентами $a_1 \ge a_2 \ge \dots$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, и их обобщениям. Его исследованиям предшествовали классические результаты известных математиков Юнга, Сидона, Колмогорова, Мура, Чезари, Боаса.

С. А. Теляковский доказал следующую теорему.

Теорема (Теляковский С. А., 1964). *Пусть коэффициенты ряда* $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ *обладают следующими свойствами:* $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и*

$$\sum_n |\Delta a_n| < \infty, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{|\Delta a_{n-k} - \Delta a_{n+k}|}{k} < \infty, \quad \textit{где} \quad \Delta a_n = a_n - a_{n+1}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\pi \Big|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos(nx)\Big|dx \le C\Big(\sum_{n=0}^\infty|\Delta a_n|+\sum_{n=2}^\infty\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{|\Delta a_{n-k}-\Delta a_{n+k}|}{k}\Big).$$

Близкое утверждение Сергей Александрович доказал и для синус-рядов.

В своей работе 1973 г. С. А. Теляковский предлагает достаточное условие нового типа, для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье:

Если $a_k\to 0$ и существуют числа $A_k\downarrow 0$ такие, что $\sum_k A_k<\infty$ и $|\Delta a_k|\le A_k$, то ряд $\sum a_k\cos kx$ является рядом Фурье. Если, кроме того, $\sum|a_k|/k<\infty$, то ряд из синусов $\sum a_k\sin kx$ также является рядом Фурье.

Эти условия являются легко формулируемыми и прозрачными и усиливают известные ранее достаточные условия. На эту работу имеется множество ссылок. Укажем некоторых авторов, у которых было несколько ссылок на нее: Ч. Станоевич (Stanojević, 1976, 1980, 1981, 1987), Л. Лейндлер (Leindler, 2000, 2001, 2002, 2014), Ж. Томовски (Tomovski, 2000, 2001, 2002, 2003), И.Р. Лифлянд (Liflyand, 2001, 2012, 2014), Р.М. Тригуб (2012, 2014).

По этой тематике С. А. Теляковский проводил также совместные исследования. В частности, в 1975 г. была опубликована с Г. А. Фоминым статья о сходимости в метрике L рядов Фурье с квазимонотонными коэффициентами. Эта работа имеет высокий уровень цитируемости. В начале 2000-х Сергей Александрович опубликовал несколько совместных работ с А. Ю. Поповым (подробнее см. статью А. Ю. Попова “О научных контактах с Сергеем Александровичем Теляковским” в данном номере журнала).

В теории приближений алгебраическими многочленами С. А. Теляковский получил важный результат, а для его описания напомним известный результат А. Ф. Тимана (1951):

Пусть $f\in C^r[-1,1]$ и $\omega(\delta)=\omega(f^{(r)},\delta)$. Тогда для любого n существует алгебраический многочлен степени не выше n такой, что для всех $x\in[-1,1]$

$$|f(x)-p_n(x)|\le R\Big(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^r\omega\Big(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\Big), \qquad (*)$$

где число R зависит только от r.

Сформулированный результат А. Ф. Тимана является обобщением и уточнением более раннего результата С. М. Никольского (1946). Особенностью неравенства $(*)$ является улучшение порядка аппроксимации вблизи конечных точек отрезка. Благодаря этому улучшению стало возможным получить соответствующие обратные теоремы для аппроксимации алгебраическими полиномами. В. К. Дзядык (1956) показал, что если $(*)$ имеет место с $\omega(\delta)=\delta^\alpha$, $0<\alpha<1$, то $f\in C^r[-1,1]$ и f удовлетворяет условию Липшица порядка α.

С. А. Теляковский усилил результат А. Ф. Тимана.

Теорема (Теляковский С. А., 1966). *Пусть $f\in C^r[-1,1]$ и $\omega(\delta)=\omega(f^{(r)},\delta)$. Тогда для любого n существует алгебраический многочлен степени не выше n такой, что для всех $x\in[-1,1]$*

$$|f(x)-p_n(x)|\le R\Big(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\Big)^r\omega\Big(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\Big),$$

где число R зависит только от r.

Этот результат был развит во многих направлениях.

С. А. Теляковский внес фундаментальный вклад в развитие теории приближения функций многих переменных. Его работы по свойствам тригонометрических полиномов многих переменных с гармониками из гиперболического креста

$$\Gamma(N):=\Big\{k=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d:\prod_{j=1}^d\max(|k_j|,1)\le N\Big\}$$

стали классическими. В 1963 г. он доказал следующее неравенство:

$$\Big|\sum_{k\in\Gamma(N)}\frac{\sin k_1x_1\cdots\sin k_dx_d}{k_1\cdots k_d}\Big|\le C(d).$$

Полиномы подобного вида по гиперболическим крестам носят имя “полиномы Теляковского”. Сергей Александрович использовал эти полиномы для получения точных неравенств Бернштейна для тригонометрических полиномов с гармониками из гиперболического креста. Теория приближения периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболического креста активно развивается в работах как российских, так и зарубежных математиков. Отметим, что доказательство проходит и в более общем случае множеств $\Gamma\subset\mathbb{Z}^d$, которые вместе с каждой точкой $(k_1,\dots,k_d)$ содержат все точки $(l_1,\dots,l_d)$ с $|l_j|\le|k_j|$, $j=1,\dots,d$.

Сергей Александрович Теляковский опубликовал более 140 работ. Список его статей размещен на сайте Математического института имени В. А. Стеклова РАН на русском и английском языках. Многочисленные ссылки на работы С. А. Теляковского показывают, что он исследовал действительно актуальные математические проблемы.

Сергей Александрович обладал многими замечательными качествами, прежде всего отметим его ответственное отношение к любому делу, за которое он брался, честность и принципиальность.

Светлая память о Сергее Александровиче Теляковском — замечательном человеке и ученом навсегда сохранится в наших сердцах.

Поступила 9.09.2022
Принята к публикации 9.09.2022

Бердышев Виталий Иванович
академик РАН
научный руководитель
Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Бесов Олег Владимирович
д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН
главный научный сотрудник
Математический институт
имени В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
e-mail: besovn@mi-ras.ru

Кашин Борис Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик РАН
заведующий отделом
главный научный сотрудник
Математический институт
имени В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
e-mail: kashin@mi-ras.ru

Конягин Сергей Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик РАН
заведующий отделом
главный научный сотрудник
Математический институт
имени В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
e-mail: konyagin@mi-ras.ru

Малыхин Юрий Вячеславович
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Математический Институт
имени В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
e-mail: malykhin@mi-ras.ru

Осколков Константин Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
внештатный сотрудник
Математический Институт
имени В. А. Стеклова РАН,
г. Москва,
e-mail: kooskolkov@gmail.com

Теляковский Алексей Сергеевич
PhD, профессор
университет Невады в Рино
Рино, Невада, США
e-mail: alekseyt@unr.edu

Темляков Владимир Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
внештатный сотрудник
Математический институт
имени В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
e-mail: temlyak@math.sc.edu

Теляковский Дмитрий Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Национальный исследовательский
ядерный университет (МИФИ),
г. Москва
e-mail: dtelyakov@mail.ru

Холщевникова Наталья Николаевна
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный
технологический университет "Станкин",
г. Москва
e-mail: kholshchevnikova@gmail.com

English

V. I. Berdyshev, O. V. Besov, B. S. Kashin, S. V. Konyagin, Yu. V. Malykhin, K. I. Oskolkov, A. S. Telyakovskiy, D. S. Telyakovskii, V. N. Temlyakov, N. N. Kholshchevnikova. Sergei Aleksandrovich Telyakovskii.

Vitalii Ivanovich Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: bvi@imm.uran.ru .

Oleg Vladimirovich Besov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: besovn@mi-ras.ru .

Boris Sergeevich Kashin, RAS Academician, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: kashin@mi-ras.ru .

Sergei Vladimirovich Konyagin, RAS Academician, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: konyagin@mi-ras.ru .

Yuriy Vyacheslavovich Malykhin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: malykhin@mi-ras.ru .

Konstantin Il'ich Oskolkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: oskolkov@math.sc.edu .

Aleksey Sergeevich Telyakovskiy, PhD, Prof., Department of Mathematics & Statistics, University of Nevada, Reno, NV 89557, USA, email: alekseyt@unr.edu .

Dmitry Sergeevich Telyakovskii, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Prof., National Research Nuclear University (MEPhI), Moscow, 115409 Russia, e-mail: dtelyakov@mail.ru .

Vladimir Nikolaevich Temlyakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: temlyak@math.sc.edu .

Natalia Nikolaevna Kholshchevnikova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State University of Technology "STANKIN", Moscow, 127055 Russia, e-mail: kholshchevnikova@gmail.com .

Received September 9, 2022
Accepted September 9, 2022

Cite this article as: V. I. Berdyshev, O. V. Besov, B. S. Kashin, S. V. Konyagin [et al.]. Sergei Aleksandrovich Telyakovskii. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 17–22 .