ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.518

РАВНОМЕРНЫЕ ПО ПАРАМЕТРУ $a \in (0,1)$ ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СУММ СИНУС- И КОСИНУС-РЯДОВ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВИДА $1/k^a$ ЧЕРЕЗ ПЕРВЫЕ СЛАГАЕМЫЕ ИХ АСИМПТОТИК[1]

А. Ю. Попов, Т. В. Родионов

Для функций $f_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos kx$ и $g_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin kx$ получены равномерные по параметру $a \in (0,1)$ оценки приближений этих функций первыми членами их асимптотик $F_a(x) = \sin(\pi a/2)\Gamma(1-a)x^{a-1}$ и $G_a(x) = \cos(\pi a/2)\Gamma(1-a)x^{a-1}$. А именно, доказано, что для всех $a \in (0,1)$ и $x \in (0,\pi]$ верны неравенства

$$G_a(x) - \frac{x}{2} < g_a(x) < G_a(x) - \frac{x}{12}$$

и

$$F_a(x) + \zeta(a) + \frac{\zeta(3)}{4\pi^3}\,x^2\sin(\pi a/2) < f_a(x) < F_a(x) + \zeta(a) + \frac{1}{18}\,x^2\sin(\pi a/2).$$

Показано, что эти оценки неулучшаемы в следующем смысле. В оценке снизу синус-ряда вычитаемое $x/2$ нельзя заменить на kx, взяв какое-либо число $k < 1/2$: после этого оценка перестанет быть верной при малых x и значениях a, близких к 1. В оценке сверху вычитаемое $x/12$ нельзя заменить на kx, взяв какое-либо число $k > 1/12$: после этого оценка перестанет быть верной при значениях a и x, близких к 0. В оценке снизу косинус-ряда множитель $\zeta(3)/(4\pi^3)$ при $x^2\sin(\pi a/2)$ нельзя заменить бóльшим числом: после этого оценка перестанет быть верной при близких к 0 значениях a и x. В оценке сверху косинус-ряда множитель 1/18 при $x^2\sin(\pi a/2)$, вероятно, можно уменьшить, но заменить его числом 1/24 нельзя: при любом $a \in [0.98,1)$ такая оценка не будет выполняться не только в точке $x = \pi$, но и на некотором отрезке $x_0(a) \leqslant x \leqslant \pi$, где $x_0(a) \to 0$ при $a \to 1-$. Полученные результаты позволяют уточнить оценки функций f_a и g_a, найденные недавно другими авторами.

Ключевые слова: специальные тригонометрические ряды, полилогарифм, периодическая дзета-функция.

A. Yu. Popov, T. V. Rodionov. Uniform with respect to the parameter $a \in (0,1)$ two-sided estimates of the sums of sine and cosine series with coefficients $1/k^a$ by the first terms of their asymptotics.

Uniform with respect to the parameter $a \in (0,1)$ estimates of the functions $f_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos kx$ and $g_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin kx$ by the first terms of their asymptotic expansions $F_a(x) = \sin(\pi a/2)\Gamma(1-a)x^{a-1}$ and $G_a(x) = \cos(\pi a/2)\Gamma(1-a)x^{a-1}$ are obtained. Namely, it is proved that the inequalities

$$G_a(x) - \frac{x}{2} < g_a(x) < G_a(x) - \frac{x}{12}$$

and

$$F_a(x) + \zeta(a) + \frac{\zeta(3)}{4\pi^3}\,x^2\sin(\pi a/2) < f_a(x) < F_a(x) + \zeta(a) + \frac{1}{18}\,x^2\sin(\pi a/2).$$

are valid for all $a \in (0,1)$ and $x \in (0,\pi]$.

It is shown that the estimates are unimprovable in the following sense. In the lower estimate for the sine series, the subtrahend $x/2$ cannot be replaced by kx with any $k < 1/2$: the estimate ceases to be fulfilled for sufficiently small x and the values of a close to 1. In the upper estimate, the subtrahend $x/12$ cannot be replaced by kx with any $k > 1/12$: the estimate ceases to be fulfilled for the values of a and x close to 0. In the lower estimate for the cosine series, the multiplier $\zeta(3)/(4\pi^3)$ of $x^2\sin(\pi a/2)$ cannot be replaced by any larger number: the estimate ceases to be fulfilled for x and a close to 0. In the upper estimate for the cosine series, the multiplier 1/18 of $x^2\sin(\pi a/2)$ can probably be replaced by a smaller number but not by 1/24: for every $a \in [0.98,1)$, such an estimate would not hold at the point $x = \pi$ as well as on a certain closed interval $x_0(a) \leqslant x \leqslant \pi$, where $x_0(a) \to 0$ as $a \to 1-$. The obtained results allow us to refine the estimates of the functions f_a and g_a established recently by other authors.

Keywords: special trigonometric series, polylogarithm, periodic zeta function.

MSC: 42A32, 33B30, 41A10, 11M06, 33B15

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-177-190

[1]Исследование первого автора (результаты разд. 2–3) выполнено в МГУ имени М.В. Ломоносова при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00545). Исследование второго автора (результаты разд. 6) выполнено в МГУ имени М.В. Ломоносова при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00584).

1. Введение

Давно известно [5], что сумма степенного ряда

$$\mathrm{L}_a(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} z^k, \quad a \in \mathbb{C} \quad (\textit{полилогарифм}),$$

будучи функцией комплексной переменной z, голоморфной в круге $|z| < 1$, допускает однозначное аналитическое продолжение в плоскость с разрезом $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Отсюда следует, что суммы тригонометрических рядов

$$f_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} \cos kx, \quad g_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} \sin kx, \quad a > 0, \tag{1.1}$$

всюду сходящихся на интервале $0 < x < 2\pi$, лежат в $C^{\infty}(0, 2\pi)$ (при любом $a > 0$) и даже являются сужениями на интервал $(0, 2\pi)$ действительной оси функций, голоморфных в полосе $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$. Добавим, что весьма общие условия на коэффициенты степенного ряда, гарантирующие аналитическую продолжаемость его суммы в $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, приведены в [1, гл. 7].

Согласно формулам

$$f_a(x) = \zeta(a) - \int_0^x g_{a-1}(t)\, dt, \quad g_a(x) = \int_0^x f_{a-1}(t)\, dt, \quad 0 < x < 2\pi, \quad a > 1,$$

функции (1.1) выражаются через функции этого же семейства со значением параметра a на 1 меньше. Всюду в нашей работе ζ — дзета-функция Римана, Γ — гамма-функция. Имеем также

$$f_1(x) = \ln \frac{1}{2\sin(x/2)}, \quad g_1(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi. \tag{1.2}$$

Поэтому ограничимся рассмотрением значений $a \in (0, 1)$. При таких значениях a функции (1.1) стремятся к $+\infty$ при $x \to 0+$ и имеют асимптотики (см., например, [2, гл. II (13.11) и гл. V, § 2]):

$$f_a(x) \sim F_a(x), \quad g_a(x) \sim G_a(x), \quad x \to 0+, \tag{1.3}$$

где

$$F_a(x) = \sin \frac{\pi a}{2}\, \Gamma(1 - a) x^{a-1}, \quad G_a(x) = \cos \frac{\pi a}{2}\, \Gamma(1 - a) x^{a-1}. \tag{1.4}$$

Равномерны ли асимптотики (1.3) по параметру $a \in (0, 1)$? Мы доказываем, что вторая асимптотика (1.3) является равномерной, а первая подлежит коррекции: равномерной по $a \in (0, 1)$ является асимптотика

$$f_a(x) \sim F_a(x) + \zeta(a), \quad x \to 0+\,.$$

2. Основные результаты

Нами получены равномерные по $a \in (0, 1)$ и в некоторых терминах неулучшаемые двусторонние оценки разности между функциями (1.1) и (1.4). Доказана (см. разд. 4) следующая

Теорема 1. *При любых $a \in (0, 1)$ и $x \in (0, \pi]$ верны двойные неравенства*

$$G_a(x) - \frac{x}{2} < g_a(x) < G_a(x) - \frac{x}{12}, \tag{2.1}$$

$$F_a(x) + \zeta(a) + \frac{\zeta(3)}{4\pi^3} x^2 \sin \frac{\pi a}{2} < f_a(x) < F_a(x) + \zeta(a) + \frac{1}{18} x^2 \sin \frac{\pi a}{2}. \tag{2.2}$$

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно убедиться в справедливости равенства $\lim\limits_{a\to 1} G_a(x) = \pi/2$, которое вместе с (1.2) показывает, что оценка снизу в (2.1) при $a = 1$ превратилась бы в равенство. Это означает, что функцию g_a (при всех $a \in (0,1)$ и $x \in (0,\pi]$) нельзя оценить снизу через $G_a(x) - kx$, где k — какое-нибудь число из интервала $(0, 1/2)$. Ниже (см. разд. 6) будет показано, что в том же смысле неулучшаема и оценка сверху в (2.1): функцию g_a нельзя оценить сверху (при всех $a \in (0,1)$ и $x \in (0,\pi]$) через $G_a(x) - kx$, где k — какое-либо число, большее $1/12$.

З а м е ч а н и е 2. Константу $\zeta(3)/(4\pi^3)$ в левом неравенстве (2.2) увеличить нельзя: после ее замены бóльшим числом неравенство при достаточно близких к нулю a и x перестало бы выполняться (см. разд. 6). Что же касается правого неравенства, то в нем нельзя заменить число $1/18$ на число, меньшее $1/24$ — тогда неравенство не будет выполняться при достаточно малых x и a, близких к 1. В действительности (см. доказательство) мы вывели более сильное, но более громоздкое неравенство

$$f_a(x) < F_a(x) + \zeta(a) + \frac{x^2}{24}\Big(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\Big)^{-1} \sin\frac{\pi a}{2}, \quad 0 < a < 1, \quad 0 < x \leqslant \pi, \tag{2.3}$$

в котором нельзя уменьшить постоянную $1/24$ (см. разд. 6), но, вероятно, можно уменьшить множитель $\Big(1 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}\Big)^{-1}$.

3. Сравнение теоремы 1 с недавним результатом по этой тематике

Оценки сумм рядов (1.1) находят применение в различных вопросах теории функций. В недавней работе [6], посвященной асимптотическим формулам для констант Лебега средних Рисса, выведены следующие неравенства, справедливые при любых $a \in (0,1)$ и $x \in (0,\pi]$:

$$G_a(x) - \cos\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a)\,\frac{x}{\pi} - 2\pi(1-a) < g_a(x) < G_a(x) - \cos\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a)\,\frac{x}{\pi} + 2\pi(1-a), \tag{3.1}$$

$$F_a(x) - \sin\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a) - \frac{1}{2} - 4\pi a < f_a(x) < F_a(x) - \sin\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a) - \frac{1}{2} + 4\pi a. \tag{3.2}$$

В [6] также доказано убывание функций f_a и g_a на полуинтервале $0 < x \leqslant \pi$ при любом $a \in (0,1)$.

Сравним неравенства (3.1) и (3.2) с доказанными в теореме 1. Оценка снизу функции $g_a(x)$ в (2.1) не только намного проще оценки функции $g_a(x)$ в (3.1) (вместо длинного выражения в (3.1) из G_a вычитается $x/2$), но и сильнее при любых $a \in (0,1)$ и $x \in (0,\pi]$. Чтобы убедиться в этом, надо доказать неравенство

$$\frac{x}{2} < \cos\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a)\frac{x}{\pi} + 2\pi(1-a) \ \ \forall\, x \in (0,\pi], \ \ \forall\, a \in (0,1).$$

Сделав замену $b = 1 - a$, перейдем к эквивалентному неравенству

$$x\Big(\frac{1}{2} - \frac{\Gamma(b)}{\pi}\sin\frac{\pi b}{2}\Big) < 2\pi b \ \ \forall\, x \in (0,\pi], \ \ \forall\, a \in (0,1). \tag{3.3}$$

Множитель при x в левой части (3.3) положителен, поскольку равен $0.5\big(1 - \Gamma(b+1)s(\pi b/2)\big)$, где $s(t) = t^{-1}\sin t < 1$ $(\forall\, t > 0)$ и $\Gamma(b+1) < 1$ $(\forall\, b \in (0,1))$. Отсюда заключаем, что неравенство (3.3) достаточно доказать только при $x = \pi$, а именно, проверить, что

$$1 - \Gamma(b+1)s\Big(\frac{\pi b}{2}\Big) < 4b \ \ \forall\, b \in (0,1).$$

Последнее неравенство есть следствие возрастания на отрезке $[0,1]$ гладкой функции $h(b) = 4b + \Gamma(b+1)s(\pi b/2)$, поскольку $h(0) = 1$. Итак, осталось установить положительность производной

$$h'(b) = 4 + \Gamma'(b+1)s\Big(\frac{\pi b}{2}\Big) + \Gamma(b+1)\frac{\pi}{2}\,s'\Big(\frac{\pi b}{2}\Big). \tag{3.4}$$

Поскольку Γ-функция выпукла на положительной полуоси, ее производная возрастает и, следовательно,

$$\min_{0\leqslant b\leqslant 1}\Gamma'(b+1)=\Gamma'(1)=-\gamma, \tag{3.5}$$

где $\gamma=0.577\ldots$ — постоянная Эйлера — Маскерони [8, 5.2.3, 5.4.11]. Далее имеем

$$s(t)=1-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}-\frac{t^6}{7!}+\ldots,\quad s'(t)=-\frac{t}{3}+\frac{t^3}{30}-\frac{t^5}{840}+\ldots.$$

Отсюда видно, что $s'(t)$ по крайней мере при $0<t<\sqrt{10}$ является суммой знакопеременного ряда с убывающими по модулю слагаемыми. Следовательно,

$$s'(t)>-\frac{t}{3},\quad 0<t<\sqrt{10},\quad \text{и потому}\quad s'(t)>-\frac{\pi}{6},\quad 0<t<\frac{\pi}{2}. \tag{3.6}$$

Из (3.4)–(3.6), учитывая, что функции $s(\pi b/2)$ и $\Gamma(b+1)$ на интервале $0<b<1$ положительны и меньше 1, выводим оценку

$$h'(b)>4-\gamma-\frac{\pi^2}{12}>2.5\quad\forall\, b\in(0,1).$$

Требуемое доказано.

Хотя оценка сверху функции $g_a(x)$ в (2.1) снова намного проще оценки сверху в (3.1), но она сильнее ее уже не для всех пар $(x,a)\in(0,\pi]\times(0,1)$. Покажем, что наша оценка сильнее при любых $a\in(0,19/24]$ и $x\in(0,\pi]$, а если $a\in(19/24,1)$, то она заведомо лучше при $0<x\leqslant 4.8\pi(1-a)$.

Действительно, наша оценка сверху для $g_a(x)$ лучше оценки (3.1) тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\frac{x}{12}>\cos\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a)\frac{x}{\pi}-2\pi(1-a), \tag{3.7}$$

т. е.

$$x\Big(\frac{\Gamma(1-a)}{\pi}\cos\frac{\pi a}{2}-\frac{1}{12}\Big)<2\pi(1-a).$$

Снова введя переменную $b=1-a$, запишем последнее неравенство в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{x}{\pi}\Big(s\Big(\frac{\pi b}{2}\Big)\Gamma(1+b)-\frac{1}{6}\Big)<4b. \tag{3.8}$$

Теперь, воспользовавшись тем, что $s(\pi b/2)\Gamma(1+b)<1$ при любом $b\in(0,1)$, выясним, при каких значениях x и b выполняется более сильное неравенство

$$\frac{x}{\pi}\Big(1-\frac{1}{6}\Big)\leqslant 4b, \tag{3.9}$$

т. е. $x/\pi\leqslant 24b/5$. Сразу же видно, что в случае $5/24\leqslant b<1$, т. е. при $0<a\leqslant 19/24$, неравенство (3.9) верно при любом $x\in(0,\pi]$, а если $0<b<5/24$ (тогда $19/24<a<1$), то оно верно на полуинтервале $0<x\leqslant 4.8\pi b=4.8\pi(1-a)$. Это означает, что неравенство (3.8), а вместе с ним и неравенство (3.7) заведомо выполняются при указанных значениях x и a, что и требовалось доказать.

Перейдем к неравенствам (3.2). Теорема 1 позволяет их существенно усилить. Выясняется, что в левом неравенстве (3.2) не надо вычитать $4\pi a$, а в правом неравенстве можно прибавить лишь $2a$ вместо $4\pi a$.

Теорема 2. *При любых $a\in(0,1)$ и $x\in(0,\pi]$ справедливо двойное неравенство*

$$F_a(x)-\sin\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a)-\frac{1}{2}<f_a(x)<F_a(x)-\sin\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a)-\frac{1}{2}+2a. \tag{3.10}$$

Эта теорема будет доказана в разд. 5.

4. Доказательство теоремы 1

В [7, Ch. V, no. 66 (7)] (см. также [9, Sect. 5 (13)]) был получен результат, значительно уточняющий асимптотики (1.3), а именно, выведено разложение в степенной ряд

$$\mathrm{L}_a(z) - \Gamma(1-a)\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(a-n)}{n!}(\ln z)^n, \tag{4.1}$$

справедливое в области комплексной плоскости, определяемой неравенством $|\ln z| < 2\pi$. Более точно, разложение (4.1) имеет место в области, лежащей на римановой поверхности логарифма $\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$, где $-2\pi < \varphi < 2\pi$, $\ln^2 r + \varphi^2 < 4\pi^2$.

Из разложения (4.1) следует, что если из функции f_a или g_a вычесть главный член ее асимптотики (речь идет о значениях параметра $a \in (0,1)$), то разность окажется вещественно-аналитической функцией на интервале $-2\pi < x < 2\pi$, допускающей продолжение в открытый круг радиуса 2π с центром в нуле. Другими словами, если в (4.1) положить $z = e^{i\varphi}$, то получится тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik\varphi}}{k^a} = \Gamma(1-a)(-i\varphi)^{a-1} + \zeta(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(a-n)}{n!}(i\varphi)^n. \tag{4.2}$$

Перейдя к более “привычной” переменной x и выделив в (4.2) действительную и мнимую части, придем к разложениям

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \sin\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a)x^{a-1} + \zeta(a) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\zeta(a-2m)}{(2m)!}x^{2m},\\ g_a(x) &= \cos\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a)x^{a-1} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}\zeta(a+1-2m)}{(2m-1)!}x^{2m-1}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

справедливым на интервале $(0, 2\pi)$. Преобразуем степенные ряды (4.3), воспользовавшись функциональным уравнением для дзета-функции (см., например, [3, гл. II, § 1; 4, Ch. 1, § 1.12 (24) или 8, 25.4.1]):

$$\zeta(1-s) = 2\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)(2\pi)^{-s}\zeta(s). \tag{4.4}$$

Тождество (4.4) позволяет в рядах (4.3) перейти к значениям $\zeta(s)$ на луче $1 < s < +\infty$. Это весьма удобно, так как на этом луче дзета-функция убывает, выпукла и быстро стремится к 1 при $s \to +\infty$. И хотя ее значения известны лишь в целых четных точках [8, 25.6(i)], значения во многих других точках вычислены с очень высокой точностью (см. ссылки в [8, 25.19]). Согласно (4.4) при любом $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \zeta(a-2m) &= (-1)^m 2^a\pi^{a-1}\sin\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(2m+1-a)(2\pi)^{-2m}\zeta(2m+1-a),\\ \zeta(a+1-2m) &= (-1)^m 2^a\pi^{a-1}\cos\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(2m-a)(2\pi)^{1-2m}\zeta(2m-a). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Введем функции

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_a(x) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2m+1-a)}{\Gamma(2m+1)}\,\zeta(2m+1-a)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m},\\ \mathcal{G}_a(x) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2m-a)}{\Gamma(2m)}\,\zeta(2m-a)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m-1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ввиду предельных соотношений $\lim\limits_{s\to+\infty}\zeta(s)=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\Gamma(n-a)/\Gamma(n)\big)=0$ ($\forall\, a>0$) ряды (4.6) абсолютно сходятся на интервале $-2\pi<x<2\pi$. Из (4.3), (1.4), (4.5) и (4.6) заключаем, что исследуемые нами функции (1.1) допускают следующие представления:

$$\begin{aligned} f_a(x)&=F_a(x)+\zeta(a)+2^a\pi^{a-1}\sin\frac{\pi a}{2}\,\mathcal{F}_a(x),\\ g_a(x)&=G_a(x)-2^a\pi^{a-1}\cos\frac{\pi a}{2}\,\mathcal{G}_a(x). \end{aligned}\tag{4.7}$$

Выведем сначала оценку сверху в (2.1) и оценку снизу в (2.2). Поскольку функции (4.6) при любых $a\in(0,1)$ и $x\in(0,\pi]$ являются суммами рядов с положительными слагаемыми, то каждая из них превосходит первое слагаемое своего ряда:

$$\mathcal{F}_a(x)>\frac12\,\Gamma(3-a)\zeta(3-a)\Big(\frac{x}{2\pi}\Big)^2,\quad \mathcal{G}_a(x)>\Gamma(2-a)\zeta(2-a)\,\frac{x}{2\pi}.\tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) находим

$$\begin{aligned} &f_a(x)>F_a(x)+\zeta(a)+u(a)x^2\sin\frac{\pi a}{2},\quad\text{где}\quad u(a)=\frac{\Gamma(3-a)\zeta(3-a)}{(2\pi)^{3-a}},\\ &g_a(x)<G_a(x)-2v(a)x,\quad\text{где}\quad v(a)=\frac{\Gamma(2-a)\zeta(2-a)}{(2\pi)^{2-a}}\cos\frac{\pi a}{2}. \end{aligned}\tag{4.9}$$

Соотношения (4.9) показывают, что для доказательства оценки снизу в (2.2) и оценки сверху в (2.1) достаточно вывести неравенства

$$u(a)>u(0)=\frac{2\zeta(3)}{(2\pi)^3},\tag{4.10}$$

$$v(a)>v(0)=\frac{\zeta(2)}{(2\pi)^2}=\frac{1}{24}.\tag{4.11}$$

Неравенство (4.10) следует из возрастания функции u на отрезке $[0,1]$, что равносильно убыванию функции $U(t)=\Gamma(t)\zeta(t)(2\pi)^{-t}$ на отрезке $[2,3]$. Ввиду убывания $\zeta(t)$ на луче $(1,+\infty)$ достаточно проверить убывание $\Gamma(t)(2\pi)^{-t}$ или, что то же самое, убывание $\ln\Gamma(t)-t\ln(2\pi)$ на отрезке $[2,3]$. Имеем $\dfrac{d}{dt}\big(\ln\Gamma(t)-t\ln(2\pi)\big)=\psi(t)-\ln(2\pi)<\psi(t)-1.5\leqslant\psi(3)-1.5=-\gamma<0$, где использованы возрастание логарифмической производной гамма-функции $\psi(s)=\big(\ln\Gamma(s)\big)'$ (см. [4, Ch. 1, § 1.9 (10) или 8, 5.15.1]) и равенство $\psi(3)=1.5-\gamma$ (см. [8, 5.4.14]).

Неравенство (4.11) в свою очередь есть следствие возрастания функции v на полуинтервале $[0,1)$. Для доказательства этого представим v в виде произведения трех положительных функций

$$\begin{gathered} v(a)=v_1(a)v_2(a)v_3(a),\quad\text{где}\quad v_1(a)=(1-a)\zeta(2-a)e^{a-2},\\ v_2(a)=\Gamma(2-a)\Big(\frac{2\pi}{e}\Big)^{a-2},\quad v_3(a)=\frac{\cos(\pi a/2)}{1-a} \end{gathered}\tag{4.12}$$

и докажем по отдельности возрастание каждой из них на $[0,1)$.

Возрастание функции v_3 становится очевидным после замены $b=1-a$. Тогда функция v_3 приобретает вид $b^{-1}\sin(\pi b/2)$ и, как хорошо известно, убывает на полуинтервале $0<b\leqslant1$, а значит, возрастает по a на полуинтервале $0\leqslant a<1$.

Возрастание функции v_2 следует из положительности производной $\ln v_2$:

$$\begin{gathered} \big(\ln v_2(a)\big)'=\frac{d}{da}\big(\ln\Gamma(2-a)+(a-2)\ln(2\pi/e)\big)\\ =\ln(2\pi/e)-\psi(2-a)\geqslant\ln(2\pi/e)-\psi(2)>0.5-\psi(2)=\gamma-0.5>0. \end{gathered}$$

Возрастание функции v_1 на полуинтервале $[0,1)$ равносильно убыванию функции $V(s) = (s-1)\zeta(s)e^{-s}$ на полуинтервале $(1,2]$. Для доказательства убывания V нам потребуется интегральное представление (см. [8, 25.2.8])

$$(s-1)\zeta(s) = s - s(s-1)I(s), \quad \text{где} \quad I(s) = \int_1^{+\infty} \{t\} t^{-s-1}\, dt, \quad \operatorname{Re} s > 0, \tag{4.13}$$

а $\{t\}$ обозначает, как обычно, дробную часть действительного числа t.

Поскольку $-I'(s) = I_1(s) = \int_1^{+\infty} \{t\} t^{-s-1} \ln t\, dt$, верна следующая формула для производной:

$$\big((s-1)\zeta(s)\big)' = 1 + (1-2s)I(s) - s(s-1)I_1(s). \tag{4.14}$$

А так как выполнено тождество $e^s\big(e^{-s}\varphi(s)\big)' = \varphi'(s) - \varphi(s)$ (φ — произвольная дифференцируемая функция), то из (4.13) и (4.14) находим

$$e^s V'(s) = -sI(s) + (1-s)\big(1 - (s-1)I(s) + sI_1(s)\big). \tag{4.15}$$

Ввиду положительности интегралов I и I_1 из (4.15) заключаем, что для доказательства отрицательности $V'(s)$ при любом $s > 1$ достаточно установить справедливость неравенства

$$(s-1)I(s) < 1 \quad \forall\, s > 1. \tag{4.16}$$

Неравенство (4.16) немедленно следует из очевидного соотношения

$$I(s) < \int_1^{+\infty} t^{-s-1}\, dt = \frac{1}{s}, \quad s > 1.$$

Возрастание функции v_1, а вместе с этим и возрастание функции v на полуинтервале $[0,1)$ полностью доказаны. Таким образом, доказательство оценки снизу в (2.2) и оценки сверху в (2.1) завершено.

Докажем оценку сверху в (2.2). Сначала проверим убывание коэффициентов ряда для функции $\mathcal{F}_a$ в (4.6). Убывание дзета-функции на луче $(1,+\infty)$ известно, поэтому достаточно убедиться в убывании последовательности $\gamma_m(a) = \Gamma(2m+1-a)/\Gamma(2m+1)$ при любом $a \in (0,1)$. В силу функционального уравнения $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ имеем

$$\frac{\gamma_{m+1}(a)}{\gamma_m(a)} = \frac{\Gamma(2m+3-a)}{\Gamma(2m+3)} : \frac{\Gamma(2m+1-a)}{\Gamma(2m+1)} = \frac{(2m+1-a)(2m+2-a)}{(2m+1)(2m+2)} < 1.$$

Поэтому $\gamma_{m+1}(a) < \gamma_m(a)$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и $a \in (0,1)$, и тем более $\gamma_m(a) < \gamma_1(a)$ для всех $m \geqslant 2$ и $a \in (0,1)$. Следовательно, верна оценка сверху

$$\mathcal{F}_a(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m(a)\zeta(2m+1-a)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m} < \gamma_1(a)\zeta(3-a)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m} = \Gamma(3-a)\zeta(3-a)\frac{x^2/2}{4\pi^2 - x^2}.$$

Из этой оценки, формул (4.7) и определения функции u в (4.9) получаем, что

$$\begin{aligned} f_a(x) &< F_a(x) + \zeta(a) + \frac{\Gamma(3-a)\zeta(3-a)}{(2\pi)^{1-a}}\frac{x^2}{4\pi^2 - x^2}\sin\frac{\pi a}{2} \\ &= F_a(x) + \zeta(a) + x^2 u(a)\Big(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\Big)^{-1}\sin\frac{\pi a}{2}. \end{aligned}$$

В силу доказанного выше возрастания функции u на отрезке $[0,1]$ приходим к неравенству

$$f_a(x) < F_a(x) + \zeta(a) + x^2 u(1)\Big(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\Big)^{-1}\sin\frac{\pi a}{2} = F_a(x) + \zeta(a) + \frac{x^2}{24}\Big(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\Big)^{-1}\sin\frac{\pi a}{2}.$$

Неравенство (2.3) доказано. Оценка сверху в (2.2) есть следствие (2.3) и справедливого на $[0,\pi]$ неравенства $\Big(1-\dfrac{x^2}{4\pi^2}\Big)^{-1} \leqslant 4/3$.

Осталось вывести оценку снизу в (2.1). Из (4.6) и (4.7) видно, что для этого следует доказать неравенство

$$2^a\pi^{a-1}\cos\Big(\frac{\pi a}{2}\Big)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2m-a)}{\Gamma(2m)}\,\zeta(2m-a)\Big(\frac{x}{2\pi}\Big)^{2m-1} < \frac{x}{2}$$

для всех $a\in(0,1)$ и $x\in(0,\pi]$ или, что то же самое, неравенство

$$4\pi\,\frac{\Gamma(2-a)\zeta(2-a)}{(2\pi)^{2-a}}\cos\frac{\pi a}{2} + 2^a\pi^{a-1}\cos\Big(\frac{\pi a}{2}\Big)\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\Gamma(2m-a)}{\Gamma(2m)}\,\zeta(2m-a)\Big(\frac{x}{2\pi}\Big)^{2m-2} < \pi. \tag{4.17}$$

Ввиду убывания последовательности $\zeta(2m-a)\Gamma(2m-a)/\Gamma(2m)$ и ограничения $0<x\leqslant\pi$ при любом $a\in(0,1)$ верны оценки сверху

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\Gamma(2m-a)}{\Gamma(2m)}\,\zeta(2m-a)\Big(\frac{x}{2\pi}\Big)^{2m-2} = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\Gamma(2m-a)\zeta(2m-a)}{4^{m-1}\Gamma(2m)}\Big(\frac{x}{\pi}\Big)^{2m-2}$$
$$< \frac{\Gamma(4-a)\zeta(4-a)}{\Gamma(4)}\sum_{m=2}^{\infty}4^{1-m} = \frac{\Gamma(4-a)\zeta(4-a)}{18}.$$

Тогда с учетом определения функции v в (4.9) мы вправе заменить неравенство (4.17) более сильным, но более простым неравенством

$$v(a) + \frac{\Gamma(4-a)\zeta(4-a)}{18(2\pi)^{2-a}}\cos\frac{\pi a}{2} < \frac{1}{4}$$

и доказывать именно его. Заметим, что функция $v_4(a)=\Gamma(4-a)(2\pi)^{a-2}$ возрастает на отрезке $[0,1]$, так как на этом отрезке

$$\big(\ln v_4(a)\big)' = \ln(2\pi) - \psi(4-a) \geqslant \ln(2\pi) - \psi(4) = \ln(2\pi) + \gamma - \frac{11}{6} > 0.$$

Поэтому верны соотношения

$$\frac{\Gamma(4-a)}{(2\pi)^{2-a}} = v_4(a) < v_4(1) = \frac{1}{\pi}.$$

Отсюда с учетом неравенства $\zeta(4-a)<\zeta(3)$ заключаем, что достаточно доказать неравенство

$$v(a) + \frac{\zeta(3)}{18\pi}\cos\frac{\pi a}{2} < \frac{1}{4} \quad \forall\, a\in(0,1). \tag{4.18}$$

Для дальнейшего важна двусторонняя оценка числа

$$v\Big(\frac{1}{2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big)(2\pi)^{-3/2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\zeta(3/2)}{8\pi}.$$

Простейшее неравенство для дзета-функции (см., например, [8, 25.2.8])

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) < \frac{s}{s-1} \quad \forall\, s>1 \tag{4.19}$$

дает оценку $2 < \zeta(3/2) < 3$. Следовательно,

$$\frac{1}{4\pi} < v\Big(\frac{1}{2}\Big) < \frac{1}{8}. \tag{4.20}$$

Оценка сверху в (4.20) немедленно доказывает неравенство (4.18) для $a \in (0, 1/2]$. Для доказательства неравенства (4.18) при $a \in (1/2, 1)$ достаточно проверить возрастание функции

$$w(a) = v(a) + \frac{\zeta(3)}{18\pi}\cos\frac{\pi a}{2}$$

на интервале $(1/2, 1)$, поскольку в силу известной эквивалентности $\zeta(s) \sim (s-1)^{-1}$, $s \to 1$, справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{a\to 1-0} v(a) = 1/4$, и, значит, $\lim\limits_{a\to 1-0} w(a) = 1/4$. Докажем положительность производной w' на $(1/2, 1)$. Имеем

$$w'(a) = v'(a) - \frac{\zeta(3)}{36}\sin\frac{\pi a}{2} > v'(a) - \frac{\zeta(3)}{36}.$$

А так как согласно (4.19) $\zeta(3) < 3/2$, получаем, что нам осталось вывести неравенство

$$v'(a) > \frac{1}{24} \quad \forall\, a \in \Big(\frac{1}{2}, 1\Big).$$

Оценим снизу $\big(\ln v(a)\big)'$, для чего снова обратимся к представлению (4.12). Поскольку функции v_1, v_2, v_3 положительны и возрастают, имеем

$$\big(\ln v(a)\big)' \geqslant \big(\ln v_2(a)\big)' = \ln\frac{2\pi}{e} - \psi(2-a). \tag{4.21}$$

В силу возрастания функции ψ и равенства $\psi(3/2) = 2 - \gamma - \ln 4$ из (4.21) находим

$$\big(\ln v(a)\big)' > \ln\frac{2\pi}{e} - \psi\Big(\frac{3}{2}\Big) = \ln(8\pi) + \gamma - 3 > 0.7 \quad \forall\, a \in \Big(\frac{1}{2}, 1\Big). \tag{4.22}$$

Из (4.20), (4.22) и возрастания v выводим оценку снизу

$$v'(a) = v(a)\big(\ln v(a)\big)' > v\Big(\frac{1}{2}\Big)\big(\ln v(a)\big)' > \frac{0.7}{4\pi} > \frac{1}{20} \quad \forall\, a \in \Big(\frac{1}{2}, 1\Big).$$

Неравенство (4.18) доказано, и этим вывод оценки снизу в (2.1) завершен.

Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Из неравенства (2.2) сразу же следует, что $F_a(x) + \zeta(a) < f_a(x)$ для всех $x \in (0, \pi]$ и $a \in (0, 1)$. Поэтому для вывода оценки снизу в (3.10) достаточно проверить справедливость неравенства

$$\zeta_1(a) \equiv \zeta(a) + \frac{1}{2} + \sin\frac{\pi a}{2}\,\Gamma(1-a) > 0 \quad \forall\, a \in (0, 1).$$

Введя функции $\rho(t) = 1/2 - \{t\}$ и $\sigma(t) = \big(\{t\} - \{t\}^2\big)/2$, из (4.13) находим

$$\zeta(a) = \frac{a}{a-1} - \frac{1}{2} + a\int\limits_1^{+\infty}\frac{\rho(t)}{t^{a+1}}\,dt.$$

Далее, интегрируя последний интеграл по частям, получаем представление

$$\zeta_1(a) = a(a+1)\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sigma(t)}{t^{a+2}}\,dt + \frac{\sin(\pi a/2)\Gamma(2-a) - a}{1-a}. \tag{5.1}$$

Покажем, что функция $\xi(a) = \sin(\pi a/2)\Gamma(2-a) - a$ является положительной на интервале $0 < a < 1$. Отсюда сразу же следует положительность $\zeta_1(a)$ на том же интервале, поскольку $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sigma(t)t^{-a-2}\,dt > 0$ $(\forall\, a > 0)$ ввиду положительности $\sigma(t)$ на множестве $(1,+\infty)\setminus\mathbb{N}$. Благодаря убыванию на $(0,\pi)$ функции $s(t)$ последовательно имеем

$$s(t) \geqslant s\Big(\frac{\pi}{3}\Big), \quad 0 < t \leqslant \frac{\pi}{3}, \quad \sin t \geqslant \frac{3\sqrt{3}t}{2\pi}, \quad 0 < t \leqslant \frac{\pi}{3}, \quad \sin\frac{\pi a}{2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}a, \quad 0 < a \leqslant \frac{2}{3}.$$

Последнее неравенство вместе с известной численной оценкой $\Gamma(t) > 0.8$, $1 < t < 2$ (см., например, [8, 5.3(i), 5.4(iii)]) дает

$$\xi(a) \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 0.8a - a = \Big(\sqrt{\frac{27}{25}} - 1\Big)a > 0, \quad 0 < a \leqslant \frac{2}{3}. \tag{5.2}$$

При $a \in (2/3, 1)$, перейдя к переменной $b = 1-a$, получим $\xi(a) = \Gamma(1+b)\cos(\pi b/2) + b - 1$, так что теперь требуется доказать неравенство

$$\cos\frac{\pi b}{2}\,\Gamma(1+b) + b > 1 \quad \forall\, b \in \Big(0, \frac{1}{3}\Big). \tag{5.3}$$

Воспользуемся оценками $\cos t > 1 - t^2/2$ и $\Gamma(1+t) > 1 - \gamma t$, справедливыми при любом $t > 0$. Первая оценка общеизвестна, вторая есть следствие выпуклости Γ и равенства $\Gamma'(1) = -\gamma$ (см. [8, 5.4.11]). Тем самым мы можем заменить неравенство (5.3) более сильным неравенством

$$\Big(1 - \frac{\pi^2 b^2}{8}\Big)(1-\gamma b) + b > 1 \quad \forall\, b \in \Big(0, \frac{1}{3}\Big)$$

и доказывать именно его. Применив численные оценки $\pi^2/8 < 5/4$ и $\gamma < 3/5$, перейдем к еще более сильному неравенству

$$\Big(1 - \frac{5}{4}b^2\Big)\Big(1 - \frac{3}{5}b\Big) + b > 1, \quad \text{что равносильно} \quad \frac{2}{5}\,b - \frac{5}{4}\,b^2 + \frac{3}{4}\,b^3 > 0 \quad \forall\, b \in \Big(0, \frac{1}{3}\Big).$$

Справедливость последнего неравенства элементарно проверяется. Таким образом, неравенство (5.3) доказано, а оно вместе с (5.2) дает положительность функции $\xi(a)$ на интервале $(0,1)$, что и требовалось. Доказательство оценки снизу в (3.10) завершено.

Из правого неравенства (2.2) сразу же следует, что

$$f_a(x) < F_a(x) + \zeta(a) + \frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi a}{2} \quad \forall\, x \in (0,\pi], \quad \forall\, a \in (0,1). \tag{5.4}$$

Из (5.4) и определения функции ζ_1 видно, что для завершения доказательства теоремы 2 осталось вывести неравенство

$$\zeta_1(a) + \frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi a}{2} < 2a \quad \forall\, a \in (0,1). \tag{5.5}$$

Поскольку $\pi^3 < 63/2$ и

$$\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi a}{2} < \frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{\pi a}{2} = \frac{\pi^3 a}{36} < \frac{7}{8}\,a \quad \forall\, a \in (0,1),$$

оценка (5.5) сразу же следует из неравенства

$$\zeta_1(a) < \frac{9}{8}\,a \quad \forall\, a \in (0,1). \tag{5.6}$$

Докажем его. Воспользовавшись очевидными оценками сверху $\sigma(t) \leqslant 1/8$ ($t \in \mathbb{R}$) и $\Gamma(2-a) < 1$ ($a \in (0,1)$), из (5.1) находим

$$\zeta_1(a) < \frac{a(a+1)}{8} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a+2}} + \frac{\sin(\pi a/2) - a}{1-a}.$$

Отсюда видно, что для доказательства неравенства (5.6) осталось установить справедливость неравенства

$$\frac{\sin(\pi a/2) - a}{1-a} < a, \quad \text{что равносильно} \quad \sin\Big(\frac{\pi a}{2}\Big) - a < a(1-a) \ \ \forall\, a \in (0,1).$$

Последнее эквивалентно отрицательности функции $\varphi(a) = \sin(\pi a/2) - 2a + a^2$ на интервале $(0,1)$.

Имеем $\varphi''(a) = -(\pi^2/4)\sin(\pi a/2) + 2$. Следовательно, при $a \in (0,1/2)$ верно неравенство $\varphi''(a) > 2 - (\pi^2/4)\sin(\pi/4) = 2 - \pi^2/(4\sqrt{2}) > 0$. Отсюда заключаем, что функция φ выпукла на отрезке $[0,1/2]$, а так как $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1/2) = 2^{-1/2} - 3/4 < 0$, то функция φ отрицательна и при любом $a \in (0,1/2)$. При $a \in (1/2,1)$ положим $b = 1-a$. Тогда $b \in (0,1/2)$, $\varphi(a) = \cos(\pi b/2) - 1 + b^2 = b^2 - 2\sin^2(\pi b/4)$, и мы должны доказать неравенство

$$b^2 < 2\sin^2\frac{\pi b}{4} \quad \forall\, b \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big). \tag{5.7}$$

Сделав замену $t = \pi b/4$, перейдем от (5.7) к неравенству $16(t/\pi)^2 < 2\sin^2 t$, что равносильно $8/\pi^2 < s^2(t)$, $0 < t < \pi/8$. Из убывания функции $s(t)$ на интервале $(0,\pi)$ и равенства $s(\pi/6) = 3/\pi$ следует, что $s^2(t) > 9/\pi^2$ на $(0,\pi/6)$, и требуемое доказано.

Доказательство теоремы 2 завершено.

6. Точность результатов (неулучшаемость оценок)

Запишем оценки (2.1)–(2.3) как оценки разностей между исследуемыми функциями и главными членами их асимптотик

$$\frac{x}{12} < G_a(x) - g_a(x) < \frac{x}{2}, \tag{6.1}$$

$$\frac{\zeta(3)}{4\pi^3}\, x^2 \sin\frac{\pi a}{2} < f_a(x) - F_a(x) - \zeta(a) < \frac{x^2}{24}\Big(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\Big)^{-1} \sin\frac{\pi a}{2}. \tag{6.2}$$

Все четыре оценки здесь неулучшаемы в том смысле, что коэффициенты $1/2$ и $1/24$ в правых частях нельзя уменьшить, а коэффициенты $1/12$ и $\dfrac{\zeta(3)}{4\pi^3}$ в левых частях нельзя увеличить так, чтобы оценки остались справедливыми при всех $x \in (0,\pi)$ и $a \in (0,1)$.

Неулучшаемость оценки $G_a(x) - g_a(x) < x/2$ доказана в замечании 1. Покажем неулучшаемость оценки $x/12 < G_a(x) - g_a(x)$. С учетом (4.6) и (4.7) имеем

$$\lim_{a\to 0+} \big(G_a(x) - g_a(x)\big) = \lim_{a\to 0+} 2^a \pi^{a-1} \cos\frac{\pi a}{2}\, \mathcal{G}_a(x)$$
$$= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \zeta(2m) \Big(\frac{x}{2\pi}\Big)^{2m-1} \leqslant \zeta(2)\frac{x}{2\pi^2} + \frac{\zeta(4)}{\pi} \sum_{m=2}^{\infty} \Big(\frac{x}{2\pi}\Big)^{2m-1} = x\Big(\frac{1}{12} + \frac{\zeta(4)}{2\pi^2}\,\frac{x^2}{4\pi^2 - x^2}\Big).$$

Поскольку второе слагаемое в последних скобках стремится к нулю при $x \to 0+$, коэффициент $1/12$ в оценке (6.1) увеличить нельзя: оценка перестанет выполняться при достаточно малых a и x.

Опять же из (4.6) и (4.7) находим

$$\lim_{a\to 1-}\big(f_a(x)-F_a(x)-\zeta(a)\big)=\lim_{a\to 1-}2^a\pi^{a-1}\sin\frac{\pi a}{2}\,\mathcal{F}_a(x)$$
$$=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{2m}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m}=\zeta(2)\frac{x^2}{4\pi^2}+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{2m}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m}$$
$$=x^2\Big(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\Big)^{-1}\left(\frac{1}{24}\Big(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\Big)+\frac{1}{4\pi^2}\Big(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\Big)\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{2m}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m-2}\right).$$

Поскольку при $x\to 0+$ первое слагаемое в последних скобках стремится к $1/24$, а второе слагаемое — к нулю, коэффициент $1/24$ в оценке (6.2) уменьшить нельзя: оценка перестанет выполняться при достаточно малых x и a, близких к 1.

Заметим также, что если в оценке сверху в (2.2) множитель $1/18$ при $x^2\sin(\pi a/2)$ заменить на $1/24$, то при $a\in[0.98,1)$ неравенство не будет выполняться при $x\in[2\pi^2\sqrt{1-a},\pi]$. Действительно, из (4.6) и (4.7) заключаем, что неравенство

$$f_a(x)<F_a(x)+\zeta(a)+\frac{x^2}{24}\sin\frac{\pi a}{2}$$

равносильно следующему:

$$2^a\pi^{a-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2m+1-a)}{\Gamma(2m+1)}\,\zeta(2m+1-a)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m}<\frac{x^2}{24}.$$

Убедимся в том, что при указанных выше x и a не выполняется даже более слабое неравенство (в ряду взяты только два первых слагаемых)

$$2^a\pi^{a-1}\left(\frac{\Gamma(3-a)}{\Gamma(3)}\zeta(3-a)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\frac{\Gamma(5-a)}{\Gamma(5)}\zeta(5-a)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4\right)<\frac{x^2}{24}$$
$$\Leftrightarrow (2\pi)^{a-1}\left(\frac{6\,\Gamma(3-a)\zeta(3-a)}{\pi^2}+\frac{\Gamma(5-a)\zeta(5-a)}{8\pi^4}x^2\right)<1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Gamma(5-a)\zeta(5-a)}{8\pi^4}x^2<(2\pi)^{1-a}-\frac{6}{\pi^2}\,\Gamma(3-a)\zeta(3-a).$$

Обозначим $b=1-a$ и покажем, что последнее неравенство, принимающее вид

$$\frac{\Gamma(4+b)\zeta(4+b)}{8\pi^4}x^2<\Phi(b),$$

где $\Phi(b)=(2\pi)^b-(6/\pi^2)\Gamma(2+b)\zeta(2+b)$, не выполняется при $b\in(0,0.02]$ и $x\in[2\pi^2\sqrt{b},\pi]$.

Согласно [8, 25.5.1]

$$\Gamma(2+b)\zeta(2+b)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{b+1}}{e^x-1}\,dx.$$

Поэтому

$$\big(\Gamma(2+b)\zeta(2+b)\big)'=\int_0^{+\infty}\frac{x^{b+1}\ln x}{e^x-1}\,dx>\int_0^1\frac{x}{e^x-1}\,x^b\ln x\,dx>\int_0^1\frac{x}{e^x-1}\,\ln x\,dx>\int_0^1\ln x\,dx=-1.$$

Следовательно,

$$\Phi'(b)=(2\pi)^b\ln(2\pi)-\frac{6}{\pi^2}\big(\Gamma(2+b)\zeta(2+b)\big)'<2(2\pi)^b+\frac{6}{\pi^2}<2e^{2b}+\frac{2}{3}<3$$

при $b \leqslant \dfrac{1}{13} < \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{6}$. Отсюда с учетом равенства $\Phi(0) = 0$ следует, что $\Phi(b) < 3b$. С другой стороны, при $b > 0$ и $x \geqslant 2\pi^2\sqrt{b}$ имеем

$$\frac{\Gamma(4+b)\zeta(4+b)}{8\pi^4}x^2 \geqslant \frac{\Gamma(4)}{8\pi^4}\left(2\pi^2\sqrt{b}\right)^2 = 3b,$$

и, поскольку $2\pi^2\sqrt{b} < \pi$ при $b \in (0, 0.02]$, требуемое доказано.

Обратимся к оценке снизу в (6.2). Здесь

$$\lim_{a\to 0+}\frac{f_a(x) - F_a(x) - \zeta(a)}{\sin(\pi a/2)} = \lim_{a\to 0+} 2^a\pi^{a-1}\mathcal{F}_a(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m+1)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m}$$

$$= \frac{\zeta(3)}{4\pi^3}x^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{m=2}^{\infty}\zeta(2m+1)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m} = x^2\left(\frac{\zeta(3)}{4\pi^3} + \frac{x^2}{4\pi^3}\sum_{m=2}^{\infty}\zeta(2m+1)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m-2}\right),$$

где в последних скобках второе слагаемое стремится к нулю при $x \to 0+$. Поэтому коэффициент $\zeta(3)/(4\pi^3)$ в оценке снизу в (6.2) нельзя увеличить: оценка перестанет выполняться при достаточно малых x и a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бибербах Л.** Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967. 240 с.
2. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
3. **Титчмарш Е.К.** Теория дзета-функции Римана. М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1953. 407 с.
4. **Erdélyi A.** (*ed.*) Higher transcendental functions. Vol. 1. NY: McGraw Hill, 1953. 302 p.
5. **Leau L.** Recherches des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor // J. de Math. (5). 1899. Vol. 5. P. 365–425.
6. **Liflyand E., Podkorytov A.** Lebesgue constants of Riesz type means of negative order // J. Math. Anal. Appl. 2022. Vol. 505, no. 2. Article no. 125618. doi: 10.1016/j.jmaa.2021.125618.
7. **Lindelöf E.L.** Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Paris: Gauthier–Villar, 1905. 158 p.
8. **Olver F.W.J. et al.** (*eds.*) NIST Handbook of Mathematical Functions. NY: Cambridge Univ. Press, 2010. 968 p. The online version: The NIST Digital Library of Mathematical Functions (DLMF): https://dlmf.nist.gov/.
9. **Truesdell C.** On a function which occurs in the theory of the structure of polymers // Ann. Math. (2). 1945. Vol. 46, no. 1. P. 144–157. doi: 10.2307/1969153.

Поступила 19.05.2022

После доработки 29.07.2022

Принята к публикации 4.08.2022

Попов Антон Юрьевич

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

МГУ имени М.В. Ломоносова;

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

г. Москва

e-mail: station@list.ru

Родионов Тимофей Викторович

канд. физ.-мат. наук, доцент

доцент

МГУ имени М.В. Ломоносова;

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

г. Москва

e-mail: rodionovtv@mail.ru

REFERENCES

1. Bieberbach L. *Analytische Fortsetzung.* Berlin: Springer-Verlag, 1955, 168 p. doi: 10.1007/978-3-662-01270-3 . Translated to Russian under the title *Analiticheskoe prodolzhenie.* Moscow: Nauka Publ., 1967, 240 p.
2. Zygmund A. Trigonometric series, vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959; vol. I, 383 p.; vol. II, 354 p. Translated under the title Trigonometricheskie ryady, M.: Mir Publ., 1965, vol. I, 616 p; vol. II, 538 p.
3. Titchmarsh E.C. *The theory of the Riemann zeta-function.* Oxford: Oxford Univ. Press, 1987, 422 p. ISBN: 0198533691 . Translated to Russian under the title *Teoriya dzeta-funktsii Rimana*, Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1953, 407 p.
4. Erdélyi A. (ed.) *Higher transcendental functions.* Vol. 1. NY: McGraw Hill, 1953, 302 p.
5. Leau L. Recherches des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. *Journ. de Math. (5)*, 1899, vol. 5, pp. 365–425.
6. Liflyand E., Podkorytov A. Lebesgue constants of Riesz type means of negative order. *J. Math. Anal. Appl.*, 2022, vol. 505, no. 2, art. no. 125618. doi: 10.1016/j.jmaa.2021.125618 .
7. Lindelöf E.L. *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions.* Paris: Gauthier–Villar, 1905, 158 p.
8. Olver F.W.J. et al. (eds.) *NIST handbook of mathematical functions.* NY: Cambridge Univ. Press, 2010, 968 p. The online version: The NIST Digital Library of Mathematical Functions (DLMF): https://dlmf.nist.gov/ .
9. Truesdell C. On a function which occurs in the theory of the structure of polymers. *Ann. Math. (2)*, 1945, vol. 46, no. 1, pp. 144–157. doi: 10.2307/1969153 .

Received May 19, 2022
Revised July 29, 2022
Accepted August 4, 2022

Funding Agency: The research of the first author (the results of Sections 2–3) was carried out at Moscow State University and supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00545). The research of the second author (the results of Section 6) was carried out at Moscow State University and supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00584).

Anton Yur'evich Popov, Dr. Phys.-Math. Sci., Lomonosov Moscow State University and Moscow Centre of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: station@list.ru .

Timofey Victorovich Rodionov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University and Moscow Centre of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: rodionovtv@mail.ru .

Cite this article as: A. Yu. Popov, T. V. Rodionov. Uniform with respect to the parameter $a \in (0,1)$ two-sided estimates of the sums of sine and cosine series with coefficients $1/k^a$ by the first terms of their asymptotics. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 177–190 .