ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.5

О НАУЧНЫХ КОНТАКТАХ С СЕРГЕЕМ АЛЕКСАНДРОВИЧЕМ ТЕЛЯКОВСКИМ[1]

А. Ю. Попов

Воспоминания о совместной научной работе с Сергеем Александровичем Теляковским, крупным специалистом в теории функций действительной переменной.

Ключевые слова: Сергей Александрович Теляковский.

A. Yu. Popov. On scientific contacts with Sergei Aleksandrovich Telyakovskii.

The paper presents some memories of the joint research with the prominent specialist in the theory of functions of a real variable Sergei Aleksandrovich Telyakovskii.

Keywords: S.A. Telyakovskii.

MSC: 42A32, 33B30, 41A10, 11M06, 33B15

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-164-176

Сергей Александрович Теляковский был крупным специалистом в теории функций действительной переменной и особенно любил тригонометрические ряды, будучи весьма тонким их знатоком. Я начал исследования в этой тематике во многом благодаря участию в работе научного семинара, которым руководил С. А. Теляковский. Мне посчастливилось ходить на заседания этого семинара около двадцати лет и неоднократно обсуждать с его руководителем различные вопросы теории тригонометрических рядов. За это время мы с ним стали соавторами двух статей [1; 2], под его несомненным влиянием я написал (как самостоятельно, так и с другими соавторами) более 10 работ по тригонометрическим рядам. Уже два с половиной года Сергея Александровича нет с нами, но я очень часто вспоминаю об этом замечательном ученом. Работа над проблематикой, которую мы с ним обсуждали, успешно продолжается, удается получать результаты, о возможности которых мы когда-то говорили. Обо всем этом я и собираюсь рассказать.

Сначала о моих совместных с С. А. Теляковским работах. Статья [1] была написана вскоре после того, как он на одной из конференций, а потом на семинаре сделал доклад о своей работе [3]. После двукратного прослушивания доклада мне показалось, что можно дать ответ на некоторые невыясненные в [3] вопросы. Это мы и сделали в [1], а затем наши результаты из [1] были уточнены в [4]. Я не касаюсь здесь математического содержания работ [1; 3] и [4]: по моему мнению, они носят узкоспециальный характер. Заслуживает внимания другое: рассказывая даже не о самых актуальных математических исследованиях, С. А. Теляковский делал это так ясно, четко и выпукло, что у многих слушателей просыпался интерес. Возможно, если бы доклад на эту тему делал кто-нибудь другой, ни я, ни А. С. Белов не обратили бы на нее внимания!

Зато о работе [2] я напишу подробно; до сих пор вспоминаю о ней с огромным удовольствием. На одном из заседаний научного семинара, который вел С. А. Теляковский, вспомнили теорему Харди—Литтлвуда [5] о двусторонней оценке интеграла от степени модуля суммы косинус- и синус-ряда с монотонными коэффициентами. Сформулирую ее для синус-рядов.

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00129) в МГУ им. М. В. Ломоносова.

Существуют две положительные на луче $0 < p < +\infty$ функции $c(p)$ и $C(p)$ такие, что какова бы ни была монотонно стремящаяся к нулю последовательность $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, т. е.

$$b_1 > 0, \quad b_k \ge b_{k+1} \ \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0, \tag{1}$$

справедливо двойное неравенство

$$c(p)\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p\, k^{p-2} \le \int\limits_0^\pi \Big|\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\Big|^p dx \le C(p)\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p\, k^{p-2}. \tag{2}$$

Сделаю здесь значительное отступление, чтобы познакомить читателей со взглядом С. А. Теляковского (этот взгляд я разделяю полностью) на один небольшой, но важный аспект теории функций. Представим себе, что кто-либо попробовал бы сформулировать цитируемый результат так: "Справедливо порядковое соотношение

$$\int\limits_0^\pi \Big|\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\Big|^p dx \asymp \sum_{k=1}^{\infty} b_k^p\, k^{p-2},$$

константы в котором не зависят от монотонно стремящейся к нулю последовательности $\{b_k\}$." С. А. Теляковский был бы сильно недоволен! (Такие случаи бывали на моей памяти; даже среди квалифицированных математиков изредка встречаются люди, которым не хватает математической культуры.) А недовольство свое он в подобных случаях выражал следующим образом. Сначала он слегка ироничным, но совершенно спокойным тоном произносил: "Константы на то и константы, чтобы ни от чего не зависеть". Сделав паузу, добавлял: "Запишите, пожалуйста, порядковое соотношение в виде двойного неравенства и объясните, от чего зависят множители, стоящие перед суммой $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p\, k^{p-2}$ в оценках сверху и снизу". Именно так Сергей Александрович на своем семинаре добивался четкости и ясности изложения! И я навсегда усвоил, что математик, написав какую-либо оценку, содержащую привычный для представителей нашей специализации символ C, не имеет права ограничиваться словосочетанием: " где C — некоторая постоянная". Недопустимо смешивать абсолютные постоянные, функции параметров и функционалы на классах функций, ведь задача исследователя — проникать в суть явлений и выяснять их природу. Вероятно, это и стало главным (в идейном плане) уроком, полученным мной от С. А. Теляковского на его семинаре: надо добиваться предельной ясности и прозрачности (желательно также завершенности) результата и не забывать о том, что он может кому-либо потребоваться. (Увы, я немало встречал "загадочных" математических результатов, попытки применения которых наталкиваются на серьезные трудности.) Будем же помнить, что мы занимаемся наукой не только для приятного времяпрепровождения.

Вернемся к неравенству (2). Возникает естественный вопрос, каковы оптимальные значения величин $c(p)$ и $C(p)$. Общеизвестное равенство Парсеваля дает $c(2) = C(2) = \pi/2$ (в этом случае монотонность $\{b_k\}$ не нужна). Именно этот вопрос я задал на семинаре. Сергей Александрович сказал, что порядок оптимальных функций $c(p)$ и $C(p)$ при $p \to 0+$ и $p \to +\infty$ известен. Я же удивился тому, что мы не знаем ни одного точного значения $c(p)$ и $C(p)$ при $p \ne 2$, на что он заметил, что я не прав: например, $c(1) = 1$, $C(1) = 2$. "А где это опубликовано?" — спросил я. "Видимо, нигде", ответил руководитель семинара и продолжил: — "в задаче двусторонней оценки L^1-нормы суммы синус-ряда с монотонными коэффициентами возможно получение более сильного результата, нежели нахождение констант $c(1)$ и $C(1)$; поговорим об этом после заседания". И вот что я узнал через час.

Оценка снизу

$$\int\limits_0^\pi \Big|\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\Big| dx > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$$

(при условии (1)) тривиальна. В действительности, верно даже неравенство для интеграла без модуля

$$\int_0^\pi \Big(\sum_{k=1}^\infty b_k \sin(kx)\Big)dx \ge b_1 - \frac{b_2}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{k} \ge \frac{b_1}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{k}. \tag{3}$$

Для его доказательства достаточно почленно проинтегрировать ряд и в должный момент воспользоваться монотонностью $\{b_k\}$. Напомним, что равносильность интегрируемости на отрезке $[0,\,\pi]$ синус-ряда с монотонными коэффициентами $\sum_{k=1}^\infty b_k \sin(kx)$ и сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^\infty b_k/k$ была доказана в [6], а возможность почленного интегрирования на любом отрезке ряда Фурье 2π-периодической функции из $L^1[-\pi,\,\pi]$ — общеизвестный факт [7, гл. 1, § 40]. Таким образом, мы видим, что $c(1) \ge 1$, а строгое неравенство $c(1) > 1$ невозможно ввиду найденного в [8] соотношения

$$\int_0^\pi \Big|\sum_{k=1}^\infty b_k \sin(kx)\Big|dx = b_1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{k} + O(b_2), \tag{4}$$

где постоянная в O абсолютная. Рассказав мне все это, Сергей Александрович добавил, что достойным усилением соотношения (4) и верхней оценки

$$\int_0^\pi \Big|\sum_{k=1}^\infty b_k \sin(kx)\Big|dx \le 2\sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{k}$$

(доказанной, но не опубликованной им) стало бы неравенство

$$\int_0^\pi \Big|\sum_{k=1}^\infty b_k \sin(kx)\Big|dx \le b_1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{k}. \tag{5}$$

Наша беседа состоялась в середине дня, и я почувствовал, что не могу уйти из МИАНа, не занявшись тут же этой задачей. Сергей Александрович также никуда не спешил. В тот день нам повезло: к 18 часам мы "вчерне" составили план доказательства неравенства (5). Осталось лишь дома убедиться в отсутствии ошибок в наших рассуждениях. Это было сделано за несколько дней, и неравенство (5) оказалось полностью доказанным. Его точность демонстрируют выведенные нами равенства

$$\int_0^\pi \Big(\sum_{k=1}^n \sin(kx)\Big)dx = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Заслуживает внимания, что неравенство (5) мы вывели на основе равенств (6), но еще удивительнее то, что мы, вероятно, стали их первооткрывателями. Хотя и возникает впечатление, что равенства (6) могли быть доказаны в XIX веке, нигде в математической литературе мы их не нашли.

Заметим, что из (3), (5) выводится один интересный факт, подтверждающий давно известный принцип: "положительные значения суммы синус-ряда с монотонными коэффициентами на интервале $(0,\,\pi)$ превалируют над отрицательными (если таковые имеются)". (Я взял в кавычки высказывание, не являющееся строгим математическим утверждением.) А именно, интеграл по отрезку $[0,\,\pi]$ от отрицательной части суммы произвольного синус-ряда с монотонными коэффициентами не превосходит $b_2/4$. Правда, из (3), (5) это следует лишь для интегрируемых на $[0,\, \pi]$ сумм синус-рядов. А в общем случае? В [2] мы доказали сформулированную выше оценку сверху интеграла от отрицательной части суммы ряда, не предполагая интегрируемости положительной части на $[0,\, \pi]$. Оценка неулучшаема:

$$\int\limits_0^{\pi} \Bigl(\sin x + \sin(2x)\Bigr)^{-} dx = \int\limits_{2\pi/3}^{\pi} \Bigl|\sin x + \sin(2x)\Bigr| dx = \frac{1}{4}.$$

Для большей ясности добавлю, что сумма произвольного синус-ряда с монотонными коэффициентами непрерывна на $(0,\, 2\pi)$, а ее отрицательная часть согласно теореме Хартмана—Винтнера [9] в некоторой правой полуокрестности нуля тождественно равна нулю.

Участвуя в работе семинара С. А. Теляковского, я серьезно заинтересовался свойствами тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами. Произошло это в 2000 году после доклада руководителя семинара. Сергей Александрович значительно усилил теоремы Р. Салема и Ш. Изуми о двусторонних оценках сумм рядов

$$g(b;x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \tag{7}$$

последовательность $b = \{b_k\}$ коэффициентов которых не только монотонна (см. (1)), но и выпукла (т. е. не возрастает также последовательность разностей $b_k - b_{k+1}$). В работах [10; 11] было найдено порядковое соотношение

$$g(b;x) \asymp v(b;x), \quad x \to 0+, \quad \text{где} \quad v(b;x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k, \quad m(x) = \left[\frac{\pi}{x}\right]. \tag{8}$$

Что можно сказать об этом результате? Можно похвалить: теперь мы знаем в относительно простых терминах порядок поведения при $x \to 0+$ суммы любого синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов. А можно подвергнуть критике, воспользовавшись изложенным выше подходом С. А. Теляковского. Действительно, доказано всего лишь существование каких-то трех “загадочных” положительных функционалов $C_1(b)$, $C_2(b)$, $x_0(b)$ на множестве всех монотонно стремящихся к нулю и выпуклых последовательностей b таких, что справедливо двойное неравенство

$$C_1(b)\, v(b;x) \le g(b;x) \le C_2(b)\, v(b;x) \quad \forall x \in (0,\, x_0(b)]. \tag{9}$$

Получается, что ценность соотношения (8) для приложений невелика. И похвалить-то надо как раз подход Теляковского, который в данном случае заставляет, во-первых, сказать себе (в очередной раз) “Я знаю то, что ничего не знаю”, а во-вторых, постараться указать величины $C_1(b)$, $C_2(b)$, $x_0(b)$. Теперь ясна заслуга С. А. Теляковского, в [12] доказавшего

1) существование такой абсолютной постоянной C_2, что верна оценка

$$g(b;x) \le C_2\, v(b;x) \quad \forall x \in (0,\, \pi), \tag{10}$$

какова бы ни была последовательность b, удовлетворяющая условию (1) (выпуклость b для справедливости оценки сверху (10) не нужна);

2) существование такой абсолютной постоянной C_1, что верна оценка

$$g(b;x) > C_1\, v(b;x) \quad \forall x \in \left(0,\, \frac{\pi}{11}\right], \tag{11}$$

какова бы ни была выпуклая последовательность b, удовлетворяющая условию (1).
О третьем важном результате работы [12] будет рассказано ниже.

Итак, в (10) и (11) по сравнению с (9) достигнут существенный прогресс.

Но мне уже во время доклада показалось, что можно достичь большего. Посмотрим на неравенство (10): в нем хочется вычеркнуть постоянную C_2 (или, что то же самое, положить $C_2 = 1$). Действительно, $\sin(kx) < kx$ ($\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x > 0$), и разность между kx и $\sin(kx)$ становится все больше при увеличении k. Поэтому сумма $\sum_{k=1}^{m(x)} b_k\bigl(kx - \sin(kx)\bigr)$ не столь уж мала. И если этой суммой оценить сверху остаток ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$, то получится требуемое неравенство

$$g(b;x) < v(b;x) \quad \forall x \in (0,\, \pi)\,. \tag{12}$$

Так и вышло: выяснилось, что рассматриваемый остаток ряда не может быть "большим" положительным ("относительно большим" по абсолютной величине и отрицательным может). Причина в том, что в силу выбора $m(x)$ остаток $\sum_{k=m(x)+1}^{\infty} b_k \sin(kx)$ начинается с "длинной" серии отрицательных чисел. В итоге я доказал, что функция $v(b;\, x)$ является мажорантой $g(b;\, x)$ на интервале $0 < x < \pi$, какова бы ни была монотонно стремящаяся к нулю последовательность b. Однако если умножить правую часть (12) на какую-либо постоянную, меньшую 1, то такое неравенство в случае быстрого убывания последовательности b не будет выполняться. Из результатов [12] следует, что

$$b_k = O(k^{-2}) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0+} \frac{g(b;x)}{v(b;x)} = 1. \tag{13}$$

Ситуация с оценкой снизу $g(b;\, x)$ оказалась сложнее. Но идеи работы [12] позволили мне усилить результат С. А. Теляковского и в этой задаче. Следуя рассуждениям, изложенным в [12], но уточняя их в соответствующих фрагментах, я вывел неравенство

$$g(b;\, x) > \frac{2}{\pi^2}\, v(b;\, x) - \frac{1}{2} b_{m(x)} \quad \forall x \in \Bigl(0,\, \frac{\pi}{2}\Bigr], \tag{14}$$

в котором $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная монотонно стремящаяся к нулю и выпуклая последовательность. Из монотонности b следует неравенство

$$\frac{m(m+1)}{2} b_m \le \sum_{k=1}^{m} k b_k \;\; \forall m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \frac{\pi m(x)}{2} b_{m(x)} \le v(b;\, x) \;\; \forall x \in (0,\, \pi]. \tag{15}$$

Из (14), (15) находим

$$g(b;\, x) > \frac{2}{\pi^2} v(b;\, x)\Bigl(1 - \frac{\pi}{2m(x)}\Bigr) \quad \forall x \in \Bigl(0,\, \frac{\pi}{2}\Bigr].$$

Отсюда выводим предельное соотношение

$$\varliminf_{x\to 0+} \frac{g(b;\, x)}{v(b;\, x)} \ge \frac{2}{\pi^2}, \tag{16}$$

если b удовлетворяет условию (1) и выпукла.

Неравенство (16) неулучшаемо. С. Алянчич, Р. Боянич и М. Томич [13] доказали, что если последовательность $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает, стремится к нулю, выпукла и медленно меняется, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k}/b_k = 1$, то верна асимптотика

$$g(b;\, x) \sim \frac{b_{m(x)}}{x}, \quad x \to 0+\,. \tag{17}$$

Воспользовавшись медленным изменением b и равенством $\lim\limits_{x\to 0+} xm(x) = \pi$, имеем

$$v(b;\, x) \sim \frac{\pi^2}{2} \frac{b_{m(x)}}{x}, \quad x \to 0+,$$

а это вместе с (17) в случае, когда последовательность b монотонно стремится к нулю, выпукла и медленно меняется, влечет за собой асимптотику

$$g(b;\,x) \sim \frac{2}{\pi^2} v(b;\,x), \quad x \to 0+. \tag{18}$$

Я также построил последовательность $\widehat{b} = \{\widehat{b}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для которой верны предельные соотношения

$$\varliminf_{x\to 0+} \frac{g(\widehat{b};\,x)}{v(\widehat{b};\,x)} = \frac{2}{\pi^2}, \quad \varlimsup_{x\to 0+} \frac{g(\widehat{b};\,x)}{v(\widehat{b};\,x)} = 1 \tag{19}$$

и которая не только убывает и выпукла, но даже имеет все положительные разности всех порядков

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \widehat{b}_{k+\nu} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, можно утверждать, что вопрос о константах в порядковом соотношении (8) ввиду (12), (13), (16), (18), (19) получил окончательное решение. Эти результаты составили содержание первой [14] из моих работ по синус-рядам с монотонными коэффициентами. В [14] выражена благодарность С. А. Теляковскому; ведь без научных контактов с ним статья не была бы написана.

Я работаю на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ (в настоящее время в должности ведущего научного сотрудника). Сергей Александрович около 15 лет работал по совместительству профессором на этой же кафедре (его основным местом работы был МИАН). И так получилось, что сотрудники нашей кафедры приняли участие в исследованиях по возникшей в результате научных контактов с С. А. Теляковским тематике — оценкам с точными константами сумм синус-рядов с монотонными коэффициентами. Были опубликованы статьи [15–23], в этом номере журнала напечатана моя совместная работа с Т. В. Родионовым. Особняком стоит работа [24]; она посвящена синус-рядам с квазимонотонными коэффициентами и написана под влиянием статьи [25], подготовленной к печати С. А. Теляковским по материалам, найденным в бумагах С. Б. Стечкина после его смерти.

Добавлю к сказанному, что пока в МИАНе работал семинар, руководимый С. А. Теляковским, все результаты работ [15–24] были доложены там, и рекомендации руководителя семинара оказывались для докладчиков весьма полезными.

Настал момент рассказать еще об одной теореме работы [12], которая в исследованиях А. П. Солодова, а теперь в наших с ним совместных, получила дальнейшее развитие.

С. А. Теляковский доказал, что какова бы ни была монотонно стремящаяся к нулю и выпуклая последовательность $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для суммы синус-ряда (7) верна оценка снизу

$$g(b;\,x) > \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg}\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr) \ \ \forall x \in \Bigl(0,\, \frac{\pi}{11}\Bigr]. \tag{20}$$

Эта оценка асимптотически неулучшаема на всем классе рассматриваемых последовательностей ввиду (17) и очевидного равенства $\lim_{t\to 0} t \operatorname{ctg} t = 1$. Более того, он в терминах последовательности b нашел порядок разности

$$g(b;\,x) - \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg}\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr) \ \asymp \ x \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^2 (b_k - b_{k+1}), \quad x \to 0+, \tag{21}$$

с абсолютными константами в символе $\asymp$.

И вот почти через 20 лет после появления этого результата А. П. Солодов [19] нашел точные константы в порядковом соотношении (21), попутно доказав, что неравенство (20) выполняется при всех $x \in (0,\,\pi/2]$. Затем, продолжив эти исследования в [20], он нашел второе слагаемое в асимптотике (17) в предположении дополнительной регулярности убывания медленно меняющейся выпуклой последовательности b. А совсем недавно я обнаружил, что в неравенстве (20) можно взять коэффициент ряда с номером, меньшим $m(x)$. Точнее говоря, верно неравенство

$$g(b;\,x) > \frac{b_m}{2}\operatorname{ctg}\Big(\frac{x}{2}\Big) \quad \forall x \in \Big[\frac{\pi}{3m},\,\frac{\pi}{m}\Big], \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad m \ge 2.$$

Теперь надо дать двустороннюю оценку разности между $g(b;\,x)$ и $(b_m/2)\operatorname{ctg}(x/2)$, но уже не на “маленьком” полуинтервале $\big(\pi/(m+1),\,\pi/m\big]$, как было у С. А. Теляковского и А. П. Солодова, а на “длинном” отрезке $\big[\pi/(3m),\,\pi/m\big]$. А. П. Солодов любезно согласился мне помочь, и, надеюсь, появится еще одно исследование, вызванное к жизни С. А. Теляковским. Для полноты картины добавлю, что в этом году вышла в свет работа [26], где дана в определенном смысле оптимальная двусторонняя оценка суммы синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов на отрезке $[\pi/2,\,\pi]$; аналогичный результат в случае, когда последовательность коэффициентов ряда (7) только монотонна, получен в [23].

Расскажу еще об одной задаче из теории рядов Фурье, которой я занялся благодаря С. А. Теляковскому. В 1881 г. К. Жордан [27] доказал равномерную на $\mathbb{R}$ сходимость ряда Фурье произвольной непрерывной 2π-периодической функции, имеющей на периоде ограниченную вариацию. В те времена вопрос о скорости сходимости рядов Фурье к функциям достаточно общего вида еще не ставился. Он стал актуальным после первой четверти XX века. С. Б. Стечкин [28] анонсировал оценку скорости сходимости в теореме Жордана, допустив неточность, которую затем исправил С. А. Теляковский [29].

Введу несколько обозначений, необходимых для дальнейшего изложения: $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических на $\mathbb{R}$ функций со стандартной sup-нормой

$$\|f\| = \sup\big\{|f(x)| \;\big|\; x \in \mathbb{R}\big\} = \max\big\{|f(x)| \;\big|\; x \in [0,\,2\pi]\big\};$$

$CV_{2\pi}$ — подпространство $C_{2\pi}$, состоящее из функций f, имеющих на $[0,\,2\pi]$ ограниченную вариацию $V(f)$; модуль непрерывности

$$\omega(f;\,h) = \max_{|t|\le h}\|\Delta_t f\|, \quad \text{где} \quad \Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x). \tag{22}$$

Пусть $r_n(f)$ — разность между функцией f и n-й частичной суммой ее ряда Фурье. Для произвольной функции $f \in CV_{2\pi}$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, оценка сверху $\|r_n(f)\|$ Стечкина — Теляковского имеет вид

$$\|r_n(f)\| = O\Big[\omega\Big(f;\,\frac{\pi}{n}\Big)\,\ln\Big(\frac{V(f)}{\omega(f;\,\frac{\pi}{n})}\Big)\Big], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

где постоянная в O абсолютная. Заинтересовавшись этим утверждением, я однажды спросил Сергея Александровича, оценивалась ли постоянная в O. Он ответил: “Я полагаю, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n > n_0(\varepsilon)$ будет верна оценка, получающаяся заменой O в (23) на множитель $2\pi^{-2} + \varepsilon$, а найти подтверждение этого можно в книге В. В. Жука [30]”. И дал мне почитать имевшуюся у него в кабинете в МИАНе книгу. Найти соответствующий результат в [30] оказалось нелегко, поскольку теоремы о скорости сходимости ряда Фурье функции из $CV_{2\pi}$ там нет. Но отыскать результат, из которого таковая выводится, мне удалось. Хорошо, что я заранее знал о существовании такого результата. Но как его “без подсказок” обнаружил Сергей Александрович? Это, безусловно, достойно восхищения!

В. В. Жук [30, с. 241, теорема 5] получил оценку сверху нормы $\|r_n(f)\|$ для произвольной функции $f \in C_{2\pi}$ через ее модуль непрерывности порядка $r \in \mathbb{N}$ с учетом отношения ее наилучших приближений $E_{n,p}(f)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n по

L^p-норме[2] к модулю непрерывности того же порядка, взятому в точке $\pi/(n+1)$, а именно

$$\|r_n(f)\| \le 2^{-r}\omega_r\Big(f;\,\frac{\pi}{n+1}\Big)\left[\frac{4}{\pi^2}\ln\biggl(1+n\Big(\frac{2^r E_{n,p}(f)}{\omega_r(f;\,\frac{\pi}{n+1})}\Big)^p\biggr)+C(r,\,p)\right],$$

где $C(r,\,p)$ — некоторая постоянная, зависящая от r и p, r-й модуль непрерывности определен как

$$\omega_r(f;\,h)=\max_{|t|\le h}\|\Delta_t^r f\|,\quad \text{где}\quad \Delta_t^r f(x)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}f(x+kt).$$

Участники семинара С. А. Теляковского хорошо знали (повторюсь), что постоянная на то и постоянная, чтобы ни от чего не зависеть. А если имеется (как в цитированной теореме) функция $C(r,\,p)$, определенная на декартовом произведении $\mathbb{N}\times(1,\,+\infty)$, то автор обязан что-то написать о ней, постараться указать, каким образом она зависит от переменных r и p.

Выяснение этой зависимости доставило мне немалые трудности; хорошо, что меня интересовало только значение $r=1$.

Итак, привожу переформулированную теорему 5 из [30, с. 241] для интересующего частного случая $r=1$, указав в ней зависимость $C(p)$, полученную на основе анализа доказательства этой теоремы.

Теорема (В. В. Жук, случай $r=1$ [30, с. 241, теорема 5]). *Пусть $f\in C_{2\pi}$, $f\not\equiv \mathrm{const}$, $n\in\mathbb{N}$, $p\in(1,+\infty)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|r_n(f)\| \le \omega\Big(f,\,\frac{\pi}{n+1}\Big)\left[\frac{2}{\pi^2}\ln\biggl(1+n\Big(\frac{2E_{n,p}(f)}{\omega(f;\,\frac{\pi}{n+1})}\Big)^p\biggr)+C(p)\right],$$

где

$$C(p)=2.5+\frac{\pi}{4}\biggl(\int\limits_0^{+\infty}\Big(\frac{u-\sin u}{u^2}\Big)^q du\biggr)^{1/q}+2R_2,\quad q=\frac{p}{p-1},$$

R_2 — оптимальная константа в оценке сверху приближения функции средними Рисса порядка 2 через второй модуль непрерывности.

Анализ доказательства этой теоремы позволил перейти к пределу при $p\to 1+$, что вместе с численной оценкой сверху R_2 на основании материала, изложенного в [30], дает такое следствие из теоремы В. В. Жука.

Следствие. *Пусть $f\in CV_{2\pi}$, $f\not\equiv \mathrm{const}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда верно неравенство*

$$\|r_n(f)\| \le \omega\Big(f;\,\frac{\pi}{n+1}\Big)\left[\frac{2}{\pi^2}\ln\Big(1+\frac{3\pi V(f)}{\omega(f;\,\frac{\pi}{n+1})}\Big)+9.5\right]. \tag{24}$$

Это и есть уточнение асимптотической оценки (23) Стечкина — Теляковского, в котором все указано явно.

Думаю, что и С. А. Теляковский, внимательно читая книгу [30], вывел (24) у себя дома на черновике, но, по своему обыкновению, никому этого не рассказал. Сделаю еще одно отступление. Анализируя свои научные беседы с Сергеем Александровичем, неоднократно приходил к выводу, что он знает намного больше, чем рассказывает. А в процессе чтения его статей у меня иногда возникало впечатление, что у него есть план продолжения исследований и уже

[2] В. В. Жук немного нарушает традиции в двух аспектах. Как правило, через $E_{n,p}$ обозначают расстояние от f в L_p до пространства полиномов степени меньше n (а не $\le n$); под нормой функции $\varphi\in L_p[-\pi,\,\pi]$ В. В. Жук понимает $\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|^p dt\Big)^{1/p}$, а не $\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|^p dt\Big)^{1/p}$.

имеются какие-то заготовки на черновиках. К сожалению, сейчас невозможно ни посоветоваться с ним, ни пойти к нему на семинар. Но его работы остались навсегда. И я советую молодым (и не очень) специалистам по теории функций действительной переменной почитать его работы: там можно найти немало интересных задач, надо только суметь их увидеть. Сам я собираюсь последовать собственному совету.

После получения (24) мне показалось, что это неравенство должно допускать усиление. Напомню наилучший известный в настоящее время результат, полученный в совместной работе С. Б. Стечкина и В. Т. Гаврилюк [31] об оценке сверху $\|r_n(f)\|$ через модуль непрерывности (22), справедливый для любой функции $f \in C_{2\pi}$:

$$\|r_n(f)\| \le \omega_n(f)\ \frac{L_n+1}{2}, \quad \text{где} \quad \omega_n(f) = \omega\Big(f;\ \frac{\pi}{1.5(n+0.5)}\Big), \tag{25}$$

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+0.5)t|}{2\sin(t/2)}dt \ \text{ — } n\text{-я константа Лебега тригонометрической системы.}$$

Асимптотика последовательности L_n давно известна, но здесь я приведу ее довольно точную двустороннюю оценку (см. [32]):

$$\frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) + 1.27 < L_n < \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) + 1.272 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Из (25) и (26) находим

$$\|r_n(f)\| < \omega_n(f)\Big(\frac{2}{\pi^2}\ln(n+0.5) + 1.136\Big) \quad \forall f \in C_{2\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Сравним неравенства (24) и (27). Модуль непрерывности в (27) имеет примерно в полтора раза меньший аргумент, чем в (24), и второе слагаемое в скобках (константа 1.136) значительно меньше константы 9.5. Зато вместо $\ln(n+0.5)$ в (24) стоит $\ln\Big(1 + \dfrac{3\pi V(f)}{\omega(f;\ \pi/(n+1))}\Big)$, что и обеспечивает равномерную сходимость ряда Фурье. После сравнения неравенств (24) и (27) у меня возник следующий план уточнения неравенства (24): снизить слагаемое 9.5 до 1.5 (почти как в (27)), заменить $\omega\Big(f;\ \dfrac{\pi}{n+1}\Big)$ на $\omega_n(f)$, убрать “лишнее” из аргумента логарифма, оставив $\ln\Big(\dfrac{V(f)}{\omega_n(f)}\Big)$.

Когда я поделился своим планом с С. А. Теляковским (примерно 7 лет назад), он сказал: “Хороший замысел, но осуществить его будет нелегко”. Так и оказалось: я потратил много времени, но не достиг успеха. Только после того как доцент нашей кафедры Т. Ю. Семенова присоединилась к исследованию этого вопроса, дело пошло на лад, и мы получили следующий результат.

Утверждение. *Пусть* $f \in CV_{2\pi}$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда верно неравенство*

$$\|r_n(f)\| < \omega_n(f)\Big[\frac{2}{\pi^2}\ln\Big(\frac{V(f)}{\omega_n(f)}\Big) + 1.31\Big]. \tag{28}$$

Постоянная $2\pi^{-2}$ *в главном члене правой части неравенства* (28) *является точной, а второе слагаемое в скобках — постоянная* 1.31 *— не допускает уменьшения на* 1. *А именно: для любого натурального* $n \ge 2$ *и любого числа* $\omega_n \in [1/n,\ 1/2]$ *мы предъявили функцию* $\varphi_n \in CV_{2\pi}$, *для которой верны соотношения*

$$\omega\Big(\varphi;\ \frac{\pi}{1.5(n+0.5)}\Big) = \omega_n, \quad \big|r_n(\varphi_n, 0)\big| > \omega_n\Big(\frac{2}{\pi^2}\ln\Big(\frac{V(\varphi_n)}{\omega_n}\Big) + 0.31\Big).$$

Я весьма доволен тем, что в вопросе оценки скорости сходимости ряда Фурье непрерывной 2π-периодической функции ограниченной вариации, обсуждавшемся когда-то с С. А. Теляковским, удалось удовлетворительно разобраться. Правда, скептики могут заметить, что автор "делает из мухи слона". Существенно ли улучшение во втором члене? В данной ситуации — да. Константа в оценке снижена на 8.19. Посмотрим, сколь большим должен быть номер n, чтобы главный член оценки $2\pi^{-2}\ln\big(V(f)/\omega_n(f)\big)$ превысил 8.19. Легко видеть, что для этого необходимо выполнение неравенства $V(f)/\omega_n(f) > \exp(40.3)$. И если мы рассмотрим "не слишком уж медленно" меняющиеся функции f, имеющие "не слишком большую" вариацию, например, такие, у которых $\omega(f;\, h) \geq h$, $V(f) \leq 50$, то окажется, что главный член меньше 8.19 заведомо при $n \leq 10^{16}$. А ведь суммы с такими номерами вполне достаточны для любых приложений.

Вот и завершился мой рассказ о научных контактах с профессором Сергеем Александровичем Теляковским. Как видит читатель, беседы с ним способствовали успешному поиску научной истины и профессиональному росту не только моему, но и нескольких моих коллег.

Я навсегда сохраню благодарную память о Сергее Александровиче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Попов А.Ю., Теляковский С.А.** К оценкам частных сумм рядов Фурье функций ограниченной вариации // Изв. вузов. Математика. 2000. №. 1. С. 51–55.
2. **Попов А.Ю., Теляковский С.А.** Оценка интеграла от модуля суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами // Тр. МИАН. 2013. Т. 280. С. 270–274. doi: 10.1134/S0371968513010196 .
3. **Теляковский С.А.** О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН СССР. 1997. Т. 219. С. 378–386.
4. **Белов А.С., Теляковский С.А.** Усиление теорем Дирихле — Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 6. С. 25–40. doi: 10.4213/sm2420 .
5. **Hardy G.H.** Notes on some points in the integral calculus. LV: On the integration of Fourier series // Messenger Math. 1922. Vol. 51. P. 186–192.
6. **Young W.H.** On the Fourier series of bounded functions // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1913. Vol. 12, no. 1. P. 41–70.
7. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
8. **Теляковский С.А.** Некоторые свойства рядов по синусам с монотонными коэффициентами // Anal. Math. 1992. Vol. 18, no. 4. P. 307–323. doi: 10.1007/BF02204778 .
9. **Hartman Ph., Wintner A.** On sine series with monotone coefficients // J. London Math. Soc. 1953. Vol. 28. P. 102–104. doi: 10.1112/jlms/s1-28.1.102 .
10. **Salem R.** Détermination de l'ordre de grandeur á l'origine de certaines séries trigonométriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1928. Vol. 186. P. 1804–1806.
11. **Izumi S.** Some trigonometrical series // Proc. Japan Acad. 1955. Vol. 31, no. 4. P. 207–209. doi: 10.3792/pja/1195525743 .
12. **Теляковский С.А.** К вопросу о поведении рядов по синусам вблизи нуля // Makedon. Akad. Nauk. Umet. Oddel. Mat.-Tehn. Nauk. Prilozi. 2000. Vol. 21, no. 1–2. P. 47–54 (2002).
13. **Aljančić S., Bojanić R., Tomić M.** Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus *à* coefficients monotones // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 1956. Vol. 10, no. 1. P. 101–120.
14. **Попов А.Ю.** Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 6. С. 877–888. doi: 10.4213/mzm314 .
15. **Солодов А.П.** Точная оценка снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами // Мат. сб. 2016. Т. 207, №. 12. С. 124–158. doi: 10.4213/sm8633 .
16. **Попов А.Ю., Солодов А.П.** Точная оценка снизу верхнего предела отношения суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами к ее мажоранте // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. No 4. С. 51–55.
17. **Попов А.Ю., Солодов А.П.** Оценки с точными константами сумм некоторых классов рядов по синусам с монотонными коэффициентами через мажоранту Салема // Мат. заметки. 2018. Т. 104, № 5. С. 725–736. doi: 10.4213/mzm11855 .
18. **Попов А.Ю.** Оценки наименьшего положительного корня суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 5. С. 747–761. doi: 10.4213/mzm10435 .

19. **Солодов А.П.** Точные константы в двусторонней оценке С. А Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклой последовательностью коэффициентов // Мат. заметки. 2020. Т. 107, № 6. С. 906–921. doi: 10.4213/mzm12397 .
20. **Solodov A.P.** Sharp Two-sided estimate for the sum of a sine series with convex slowly varying sequence of coefficients // Anal. Math. 2020. Vol. 46, no. 3. P. 579–603. doi: 10.1007/s10476-020-0047-5 .
21. **Алферова Е.Д., Попов А.Ю.** Двусторонние оценки L^∞-нормы суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами b_k через l^∞-норму последовательности kb_k // Мат. заметки. 2020. Т. 108, № 4. С. 483–489. doi: 10.4213/mzm12633 .
22. **Алферова Е.Д., Попов А.Ю.** О положительности средних сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 4. С. 630–634. doi: 10.4213/mzm13154 .
23. **Попов А.Ю.** Уточнение оценок сумм синус-рядов с монотонными и косинус-рядов с выпуклыми коэффициентами // Мат. заметки. 2021. Т. 109, № 5. С. 768–780. doi: 10.4213/mzm12928 .
24. **Попов А.Ю., Солодов А.П.** Об отрицательной части сумм рядов по синусам с квазимонотонными коэффициентами // Мат. сб. 2017. Т. 208, № 6. С. 146–169. doi: 10.4213/sm8764 .
25. **Стечкин С.Б.** Тригонометрические ряды с коэффициентами монотонного типа // Теория приближений. Асимптотические разложения: сб. статей. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 197–207.
26. **Попов А.Ю., Солодов А.П.** Оптимальные на отрезке $[\pi/2, \pi]$ двусторонние оценки суммы синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов // Мат. заметки. 2022. Т. 112, № 2. С. 317–320. doi: 10.4213/mzm13651 .
27. **Jordan C.** Sur la serie de Fourier // C. R. Acad. Sci. Paris, 1881. Vol. 92, P. 228–230.
28. **Стечкин С.Б.** О приближении непрерывных функций суммами Фурье // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, № 4. С. 139–141.
29. **Теляковский С.А.** О работах С. Б. Стечкина по приближению периодических функций полиномами // Фундамент. и прикл. математика. 1997. Т. 3, № 4. С. 1059–1068.
30. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 366 с.
31. **Гаврилюк В.Т., Стечкин С.Б.** Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 172. С. 107–127.
32. **Shakirov I.A.** About the Optimal Replacement of the Lebesque Constant Fourier Operator by a Logarithmic Function // Lobachevskii J. Mathematics. 2018. Vol. 39, no. 6, P. 841–846. doi: 10.1134/S1995080218060185 .

Поступила 5.09.2022

После доработки 18.10.2022

Принята к публикации 24.10.2022

Попов Антон Юрьевич

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

г. Москва, e-mail: station@list.ru

REFERENCES

1. Popov A.Yu., Telyakovskii S.A. On estimates for partial sums of Fourier series of functions of bounded variation. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2000, vol. 44, no. 1, pp. 50–54.
2. Popov A.Yu., Telyakovskii S.A. Estimate for the integral of the absolute value of a sine series with monotone coefficients. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, vol. 280, pp. 263–267. doi: 10.1134/S0081543813010197 .
3. Telyakovskii S.A. On partial sums of Fourier series of functions of bounded variation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 219, pp. 372–381.
4. Belov A.S., Telyakovskii S.A. Refinement of the Dirichlet–Jordan and Young's theorems on Fourier series of functions of bounded variation. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 6, pp. 777–791. doi: 10.1070/SM2007v198n06ABEH003860 .

5. Hardy G.H. Notes on some points in the integral calculus. LV: On the integration of Fourier series. *Messenger Math.*, 1922, vol. 51, pp. 186–192.
6. Young W.H. On the Fourier series of bounded functions. *Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2*, 1913, vol. 12, pp. 41–70. doi: 10.1112/plms/s2-12.1.41 .
7. Bari N.K. *A Treatise on trigonometric series.* Oxford; New York: Pergamon Press, 1964. Original Russian text published in Bari N.K. *Trigonometricheskie ryady.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 936 p.
8. Telyakovskij S.A. Certain properties of sine series with monotone coefficients. *Anal. Math.*, 1992, vol. 18, no. 4, pp. 307–323. doi: 10.1007/BF02204778 (in Russian).
9. Hartman P., Wintner A. On sine series with monotone coefficients. *J. London Math. Soc.*, 1953, vol. 28, pp. 102–104. doi: 10.1112/JLMS/S1-28.1.102 .
10. Salem R. Détermination de l'ordre de grandeur à l'origine de certaines séries trigonométriques. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1928, vol. 186, pp. 1804–1806.
11. Izumi S. Some trigonometrical series, xii. *Proc. Japan Acad.*, 1955, vol. 31, no. 4, pp. 207–209. doi: 10.3792/pja/1195525743 .
12. Telyakovskii S.A. On the behavior of sine series near zero. *Makedon. Akad. Nauk. Umet. Oddel. Mat.-Tehn. Nauk. Prilozi*, 2000, vol. 21, no. 1-2, pp. 47–54 (2002).
13. Bojanić R., Aljančić S., Tomić M. Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones. *Publ. Inst. Math.* (*Beograd*) (*N.S.*), 1956, vol. 10, pp. 101–120.
14. Popov A.Yu. Estimates of the sums of sine series with monotone coefficients of certain classes. *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 6, pp. 829–840. doi: 10.1023/B:MATN.0000009019.66625.fb .
15. Solodov A.P. A sharp lower bound for the sum of a sine series with convex coefficients. *Sb. Math.*, 2016, vol. 207, no. 12, pp. 1743–1777. doi: 10.1070/SM8633 .
16. Popov A.Yu., Solodov A.P. Exact lower estimate of the upper limit of the ratio of the sum of sine series with monotone coefficients to its majorant. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2014, vol. 69, no. 4, pp. 169–173. doi: 10.3103/S0027132214040056 .
17. Popov A.Yu., Solodov A.P. Estimates with sharp constants of the sums of sine series with monotone coefficients of certain classes in terms of the Salem majorant. *Math. Notes*, 2018, vol. 104, no. 5, pp. 702–711. doi: 10.1134/S0001434618110111 .
18. Popov A.Yu. Estimates of the least positive root of the sum of a sine series with monotone coefficients. *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 5, pp. 753–766. doi: 10.1134/S0001434614110145 .
19. Solodov A.P. Exact constants in Telyakovskii's two-sided estimate of the sum of a sine series with convex sequence of coefficients. *Math. Notes*, 2020, vol. 107, no. 6, pp. 988–1001. doi: 10.1134/S0001434620050314 .
20. Solodov A.P. Sharp two-sided estimate for the sum of a sine series with convex slowly varying sequence of coefficients. *Anal. Math.*, 2020, vol. 46, no. 3, pp. 579–603. doi: 10.1007/s10476-020-0047-5 .
21. Alferova E.D., Popov A.Yu. Two-sided estimates of the L^∞-norm of the sum of a sine series with monotone coefficients b_k via the l^∞-norm of the sequence kb_k. *Math. Notes*, 2020, vol. 108, no. 4, pp. 471–476. doi: 10.1134/S0001434620090199 .
22. Alferova E.D., Popov A.Yu. On the positivity of average sums of sine series with monotone coefficients. *Math. Notes*, 2021, vol. 110, no. 3-4, pp. 623–627. doi: 10.1134/S0001434621090327 .
23. Popov A.Yu. Refinement of estimates of sums of sine series with monotone coefficients and cosine series with convex coefficients. *Math. Notes*, 2021, vol. 109, no. 5, pp. 808–818. doi: 10.1134/S0001434621050126 .
24. Popov A.Yu., Solodov A.P. The negative parts of the sums of sine series with quasimonotonic coefficients. *Sb. Math.*, 2017, vol. 208, no. 6, pp. 878–901. doi: 10.1070/SM8764 .
25. Stechkin S.B. Trigonometric series with monotone type coefficients. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2001, vol. 7, suppl. 1, pp. S214–S224.
26. Popov A.Yu., Solodov A.P. Optimal two-sided estimates on the interval $[\pi/2, \pi]$ of the sum of the sine series with convex coefficient sequence. *Math. Notes*, 2022, vol. 112, no. 2, pp. 328–331. doi: 10.1134/S0001434622070380 .
27. Jordan C. Sur la séries de Fourier. *C. R. Acad. Sci.*, 1881, vol. 92, pp. 228–230.
28. Stechkin S.B. The approximation of continuous functions by Fourier sums. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1952, vol. 7, no. 4, pp. 139–141 (in Russian).
29. Telyakovskii S.A. On the works of S.B. Stechkin on approximation of periodic functions by polynomials. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 1059–1068 (in Russian).

30. Zhuk V.V. *Approksimatsiya periodicheskikh funktsii* [Approximation of periodic functions]. Leningrad: Leningrad Univ. Publ., 1982, 368 p.
31. Gavrilyuk V.T., Stechkin S.B. Approximation of continuous periodic functions by Fourier sums. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1987, vol. 172, pp. 119–142.
32. Shakirov I.A. About the optimal replacement of the Lebesque constant Fourier operator by a logarithmic function. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 6, pp. 841–846. doi: 10.1134/S1995080218060185 .

Received September 5, 2022
Revised October 18, 2022
Accepted October 24, 2022

Funding Agency: This work was carried out at Moscow State University and was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00129).

Anton Yur'evich Popov, Dr. Phys.-Math. Sci., Lomonosov Moscow State University, Moscow Centre of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991 Russia, station@list.ru .

Cite this article as: A. Yu. Popov. On scientific contacts with Sergei Aleksandrovich Telyakovskii. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 164–176 .