ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-ОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ n-РАЗДЕЛЬНЫХ КМА И ВСПЛЕСКОВ[1]

Е. А. Плещева

В статье строятся интерполяционно-ортогональные базисы всплесков на основе нескольких масштабирующих функций. В классическом случае базис пространства $L^2(\mathbb{R})$ образован сдвигами и сжатиями единственной функции ψ. В отличие от классического случая, в данной статье рассматривается несколько базисов пространства $L^2(\mathbb{R})$, каждый из которых образован сдвигами и сжатиями n функций $\psi^s,\ s=1,\ldots,n$. Построенные автором ранее n-раздельные всплески образуют n ортонормированных базисов пространства $L^2(\mathbb{R})$. В работе 2008 г. Ю. Н. Субботин и Н. И. Черных привели способы модификации масштабирующей функции Мейера таким образом, чтобы образованный ею базис был одновременно ортогональным и интерполяционным. В данной статье приводится способ модификации масок n-раздельных масштабирующих функций широкого класса таким образом, чтобы полученные по ним новые масштабирующие функции и всплески, оставаясь ортогональными, стали еще и интерполяционными.

Ключевые слова: ортогональный всплеск, интерполяционный всплеск, масштабирующая функция, базис, кратномасштабный анализ, маска масштабирующей функции, n-раздельный всплеск.

E. A. Pleshcheva. Interpolating orthogonal bases of n-separate MRAs and wavelets.

Interpolating orthogonal wavelet bases are constructed with the use of several scaling functions. In the classical case, a basis of the space $L^2(\mathbb{R})$ is formed by shifts and compressions of a single function ψ. In contrast to the classical case, we consider several bases of the space $L^2(\mathbb{R})$, which are formed by shifts and compressions of n functions ψ^s, $s=1,\ldots,n$. The n-separate wavelets constructed by the author earlier form n orthonormal bases of the space $L^2(\mathbb{R})$. In 2008, Yu.N. Subbotin and N. I. Chernykh suggested a method for modifying the Meyer scaling function in such a way that the basis formed by it is simultaneously orthogonal and interpolating. In the present paper we propose a method for modifying the masks of n-separate scaling functions from a wide class in such a way that the resulting new scaling functions and wavelets remain orthogonal and at the same time become interpolating.

Keywords: orthogonal wavelet, interpolating wavelet, scaling function, basis, multiresolution analysis, mask of a scaling function, n-separate wavelet.

MSC: 42C40

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-154-163

Введение

Теория всплесков возникла и стала интенсивно развиваться в 80-е годы прошлого века. В работах Малла [1], Мейера [2] построение базисов всплесков начинается с построения системы вложенных подпространств V_j пространства $L^2(\mathbb{R})$, называемой *кратномасштабным анализом пространства* $L^2(\mathbb{R})$. Базис каждого подпространства V_j образован сдвигами одной сжатой в 2^j раз масштабирующей функции $\varphi(x)$, точнее, системой

$$\bigl\{\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x-k),\ k\in\mathbb{Z}\bigr\},\quad j\in\mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

Дополняют пространства V_j до пространств V_{j+1} подпространства W_j, базисы которых $\{\psi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образованы сжатиями и сдвигами одной функции $\psi(x)$. Базис всего пространства $L^2(\mathbb{R})$ образован всеми функциями $\{\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x-k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$.

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2022-874).

В статье [3] нами были построены ортонормированные базисы n-раздельных всплесков в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ на основе нескольких масштабирующих функций $\varphi^s,\ s = 1, \dots, n$.

В настоящей работе предлагается способ модификации масок n-раздельных масштабирующих функций φ^s $(s = 1, \dots, n)$ таким образом, чтобы построенные по ним новые масштабирующие функции и всплески были бы и ортогональными, и интерполяционными, и порождали интерполяционно-ортонормированные базисы пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Построение такого базиса всплесков, как и в классическом случае, начнем с построения соответствующего кратномасштабного анализа (КМА).

Обозначим через p_t число, на единицу большее наименьшего неотрицательного вычета числа $t \in \mathbb{Z}$ по модулю n. В частности, $p_{n+t} = p_t$, а для $s = 1, \dots, n$

$$p_s = \begin{cases} s+1, & s = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & s = n. \end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 1. Назовем *n-раздельным кратномасштабным анализом* (n-КМА) пространства $L^2(\mathbb{R})$ совокупность n последовательностей замкнутых в $L^2(\mathbb{R})$ подпространств

$$\dots \subset V_{-1}^{p_{s-2}} \subset V_0^{p_{s-1}} \subset V_1^{p_s} \subset \dots \subset V_{n-1}^{p_{s+(n-2)}} = V_{n-1}^{p_{s-2}} \subset V_n^{p_{s-1}} \subset V_{n+1}^{p_s} \subset \dots \subset V_{n+l+1}^{p_{s+l}} \subset \dots, \tag{0.2}$$

при $s = 1, 2, \dots, n$, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^1} = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^2} = \dots = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^n} = L^2(\mathbb{R})$;

б) $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^1 = \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^2 = \dots = \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^n = \{0\}$;

в) $f(x) \in V_j^s \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in V_j^s \ \ \forall j, l \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \dots, n$;

г) $f(x) \in V_0^s \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j^s \ \ \forall j \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \dots, n$;

д) найдутся такие функции $\varphi^s(x),\ s = 1, 2, \dots, n$, что множества их сдвигов $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированные базисы пространств V_0^s, а $\{\varphi_{j,k}^s\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированные базисы пространств $V_j^s, j \in \mathbb{Z}, s = 1, \dots, n$.

Если $\varphi^1 = \varphi^2 = \ldots = \varphi^n$, то n-раздельный КМА превращается в классический. В случае, если число масштабирующих функций бесконечно, получим системы нестационарных, или почти всплесков [4], введенные М. З. Берколайко и И. Я. Новиковым. В отличие от нестационарных всплесков, когда на каждом уровне j базис пространства V_j образован сдвигами своей функции φ^j, число масштабирующих функций в n-КМА конечно. Применение n-раздельных масштабирующих функций к решению систем дифференциальных уравнений рассматривается в статье [5].

Из а), б) и (0.2) следует, как в работе [3], что для всех $k, l \in \{1, \dots, n\}$

$$\overline{\bigcup_j V_{nj+l}^k} = L^2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_j V_{nj+l}^k = \{0\}.$$

При этом условия вложения (0.2) имеют место при выполнении следующих равенств, называемых масштабирующими соотношениями:

$$\varphi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x), \tag{0.3}$$

где ряд $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x)$ сходится в $L^2(\mathbb{R})$.

Для пространств V_j^s строятся подпространства W_j^s, дополняющие их до следующего пространства $V_{j+1}^{p_s}$ таким образом, что выполняются условия

1) $V_j^s \bigoplus W_j^s = V_{j+1}^{p_s}$, $\bigoplus$ — знак прямой суммы;

2) $V_j^s \perp W_j^s \ \forall j \in \mathbb{Z},\ s = 1, \dots, n$.

Ортонормированный базис пространства W_j^s образован функциями-всплесками $\{\psi_{j,k}^s(x) = 2^{j/2}\psi^s(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$; при этом функции ψ^s строятся по φ^{p_s} следующим образом (см. [3]):

$$\psi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^{\nu-1} \overline{h_{1-\nu}^{s,p_s}} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x), \quad s = 1, \dots, n,$$

где h_ν^{s,p_s} — коэффициенты из (0.3), а $\varphi_{j,\nu}^{p_s}(x)$ определены в (0.1).

Далее будем использовать результаты работы [3] для построения интерполяционно-ортонормированных базисов пространств V_j^s и W_j^s.

Пусть преобразование Фурье $\widehat{f}(\omega)$ функции $f(x)$ определяется формулой

$$\widehat{f}(\omega) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx.$$

Для того чтобы система $\{\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ была ортонормированной, а система $\{2^{-j/2}\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы порождающая их функция $\varphi(x)$, точнее, ее преобразование Фурье $\widehat{\varphi}(\omega)$ удовлетворяла двум условиям:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega - k)|^2 = 1, \tag{0.4}$$

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\omega - k) = 1. \tag{0.5}$$

Это возможно не всегда: в качестве примера приведем масштабирующую функцию типа Котельникова — Мейера, описанную в [6]. Эта функция $\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x)$ такова, что носитель ее преобразования Фурье совпадает с отрезком $[-(1+\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2], 0 \le \varepsilon \le 1/3$; $\widehat{\varphi}(\omega) = 1$ при $-(1-\varepsilon)/2 \le \omega \le (1-\varepsilon)/2$, функция $\widehat{\varphi}(\omega)$ четная, а при $\varepsilon > 0$ на промежутке $[(1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$ функция $\widehat{\varphi}^2(\omega) - 1/2$ нечетная относительно $\omega = 1/2$: для такой функции выполнено при $\varepsilon \ne 0$ только необходимое и достаточное условие (0.4) ортонормированности. В статье [6] Ю. Н. Субботин и Н. И. Черных нашли два способа изменить масштабирующую функцию Мейера таким образом, чтобы новая масштабирующая функция порождала не только ортогональную, но и интерполяционную систему сдвигов.

При построении первым способом новая масштабирующая функция примет вид

$$\widehat{\varphi_1}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) + \alpha(\omega) + i \cdot \operatorname{sign}(\omega)\beta(\omega),$$

где носитель функций $\alpha(\omega), \beta(\omega)$ — это множество $[(1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2] \cup [(-1-\varepsilon)/2, (-1+\varepsilon)/2]$, а на промежутках $[(1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$ и $[(-1-\varepsilon)/2, (-1+\varepsilon)/2]$

$$\alpha(\omega) = \frac{1 - \widehat{\varphi}(\omega) - \widehat{\varphi}(\omega-1) - \widehat{\varphi}(\omega+1)}{2}, \quad \beta(\omega) = \sqrt{\frac{\widehat{\varphi}(\omega)(\widehat{\varphi}(\omega-1) + \widehat{\varphi}(\omega+1))}{2}}.$$

Преобразование масштабирующей функции вторым способом:

$$\widehat{\varphi_2}(\omega) = |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 + i \cdot \operatorname{sign}(\omega)\beta(\omega),$$

где носитель функции $\beta(\omega)$ — также множество $[(1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2] \cup [(-1-\varepsilon)/2, (-1+\varepsilon)/2]$, и на своем носителе

$$\beta(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega)(\widehat{\varphi}(\omega-1) + \widehat{\varphi}(\omega+1)).$$

В обоих случаях новая функция φ^s удовлетворяет условиям (0.4) и (0.5) и является масштабирующей функцией для кратномасштабного анализа $\ldots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \ldots$, где базис пространства V_0 образован системой $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

В следующем разделе опишем способ модификации масок масштабирующих функций φ^s, образующих n-раздельный КМА, таким образом, что построенные по ним новые масштабирующие функции порождают интерполяционно-ортогональные базисы.

1. Построение интерполяционно-ортогональных масок n-раздельных масштабирующих функций $\varphi^s(x)$

Условия на маски масштабирующих функций $\varphi^s(x)$ для ортонормированности и интерполяционности систем $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Пусть $\widehat{\varphi^s}(\omega)\in L^2(\mathbb{R})\cap L(\mathbb{R})$, $s=1,\dots,n$. Известно, что необходимым и достаточным условием ортонормированности сдвигов $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $s=1,\dots,n$, каждой из n-раздельных масштабирующих функций является выполнение условия (0.4), для интерполяционности каждой из n-раздельных масштабирующих функций требуется выполнение (0.5).

Условие интерполяционности системы $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ эквивалентно условию

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^s}(\omega-k)=1,\quad s=1,\dots,n. \tag{1.1}$$

Преобразование Фурье масштабирующих соотношений (0.3) выглядит следующим образом:

$$\widehat{\varphi^s}(\omega)=m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),\quad s=1,\dots,n, \tag{1.2}$$

где маски $m^{s,p_s}(\omega)$ масштабирующих функций определяются формулой

$$m^{s,p_s}(\omega)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}h_\nu^{s,p_s}e^{2\pi i\nu\omega},\quad s=1,\dots,n. \tag{1.3}$$

Известно, что если системы $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ортонормированы, то для масок выполняются соотношения

$$|m^{s,p_s}(\omega)|^2+\Big|m^{s,p_s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big|^2=1,\quad s=1,\dots,n. \tag{1.4}$$

Докажем, что подобное утверждение справедливо и для условия интерполяционности.

Предложение 1. *Пусть масштабирующие функции $\varphi^s(x), s=1,\dots,n$, таковы, что $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — интерполяционные системы для каждого $s=1,\dots,n$. Тогда для масок $m^{s,p_s}(\omega)$ масштабирующих функций выполняются условия*

$$m^{s,p_s}(\omega)+m^{s,p_s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)=1,\quad s=1,\dots,n. \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}, s=1,\dots,n,$ — интерполяционные системы. Тогда для них выполняются равенства (1.1). Из равенств (1.1) и (1.2) следует, что

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^s}(\omega-\nu)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega-\nu}{2}\Big)\widehat{\varphi^s}\Big(\frac{\omega-\nu}{2}\Big)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}-\nu\Big)\widehat{\varphi^s}\Big(\frac{\omega}{2}-\nu\Big)$$

$$+\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}-\nu\Big)\widehat{\varphi^s}\Big(\frac{\omega+1}{2}-\nu\Big)=m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^s}\Big(\frac{\omega}{2}-\nu\Big)+m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^s}\Big(\frac{\omega+1}{2}-\nu\Big)$$

$$=m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)+m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)=1.$$

Таким образом, для почти всех ω выполняются равенства (1.5). □

Преобразование масок n-раздельных масштабирующих функций, удовлетворяющих условиям (1.3) **и** (1.4)**.** Пусть имеется ортонормированный n-раздельный КМА с масками $m^{s,p_s}(\omega)$, $s=1,\dots,n$, $m^{s,p_s}(\omega)\in\mathbb{R}$. Для него справедливы масштабирующие соотношения (0.3), (1.2), а маски определены равенствами (1.3). Модифицируем маски n-раздельных масштабирующих функций следующим образом:

$$m_I^{s,p_s}(\omega)=|m^{s,p_s}(\omega)|^2+\alpha^s(\omega).$$

Для того чтобы $m_I^{s,p_s}(\omega)$ удовлетворяли условиям (1.5), должно выполняться равенство $\alpha^s(\omega) = -\alpha^s(\omega+1/2)$. Для того чтобы для $m_I^{s,p_s}(\omega)$ выполнялись условия (1.4), возьмем $\alpha^s(\omega)$ вида

$$\alpha^s(\omega) = B^s(\omega) m^{s,p_s}(\omega) m^{s,p_s}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big),$$

где

$$B^s(\omega) = -\overline{B^s(\omega)}, \quad |B^s(\omega)| = 1, \quad B^s(\omega) = -B^s\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big).$$

Пусть $B^s(\omega)$, например, имеет вид

$$B^s(\omega) = i \cdot \operatorname{sign}(\sin 2\pi\omega).$$

Новые маски, по которым далее строится n-раздельный КМА в случае вещественных $m^{s,p_s}(\omega)$, теперь имеют вид 1-периодических функций

$$m_I^{s,p_s}(\omega) = |m^{s,p_s}(\omega)|^2 + i \cdot \operatorname{sign}(\sin 2\pi\omega) m^{s,p_s}(\omega) m^{s,p_s}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big). \tag{1.6}$$

Для маски $m^{s,p_s}(\omega) \in \mathbb{C}$, необязательно вещественнозначной, интерполяционно-ортогональную маску можно определить формулой

$$m_I^{s,p_s}(\omega) = |m^{s,p_s}(\omega)|^2 + i \cdot \operatorname{sign}(\sin 2\pi\omega) \Big| m^{s,p_s}(\omega) m^{s,p_s}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)\Big|. \tag{1.7}$$

Обозначим через $M_I^s(\omega)$ следующие произведения:

$$\begin{aligned}
M_I^1(\omega) &= m_I^{1,2}(2^{n-1}\omega) \cdot m_I^{2,3}(2^{n-2}\omega) \cdot \ldots \cdot m_I^{n-1,n}(2\omega) \cdot m_I^{n,1}(\omega),\\
M_I^2(\omega) &= m_I^{2,3}(2^{n-1}\omega) \cdot m_I^{3,4}(2^{n-2}\omega) \cdot \ldots \cdot m_I^{n,1}(2\omega) \cdot m_I^{1,2}(\omega),\\
&\ldots\\
M_I^n(\omega) &= m_I^{n,1}(2^{n-1}\omega) \cdot m_I^{1,2}(2^{n-2}\omega) \cdot \ldots \cdot m_I^{n-2,n-1}(2\omega) \cdot m_I^{n-1,n}(\omega).
\end{aligned}$$

Заметим, что из соотношения (1.5) следует, что для таких M_I^s, $s = 1, \ldots, n$, справедливо равенство

$$M_I^s(\omega) + M_I^s\Big(\omega + \frac{1}{2^n}\Big) + M_I^s\Big(\omega + \frac{2}{2^n}\Big) + \ldots + M_I^s\Big(\omega + \frac{2^n - 1}{2^n}\Big) = 1. \tag{1.8}$$

Как показано в [3], n-раздельные масштабирующие функции можно восстановить по их преобразованиям Фурье

$$\widehat{\varphi_I^s}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} M_I^s\big(\frac{\omega}{2^{nj}}\big), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{1.9}$$

2. Интерполяционно-ортогональные системы функций $\{\varphi_{I,j,k}^s : k \in \mathbb{Z}\}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$

В этом разделе покажем, что при дополнительных условиях на построенные маски $m^{s,p_s}(\omega)$, $s = 1, \ldots, n$, системы функций $\{\varphi_{I,j,k}^s \colon k \in \mathbb{Z}\}$, где $\widehat{\varphi_I^s}$ определены формулой (1.9), являются ортонормированными в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и интерполяционными на сетке $\{x_{j,r} = r/2^j \colon r \in \mathbb{Z}\}$.

Теорема 1. *Пусть для масок $m^{s,p_s}(\omega)$, $s = 1, \ldots, n$, выполняются условия*

$$|m^{s,p_s}(\omega)| \geq 1 - \Omega(\omega)$$

в некоторой окрестности нуля, где функция $\Omega(\omega) \geq 0$ *такова, что ряд* $\sum_{j=1}^{\infty} \Omega\Big(\dfrac{\omega}{2^{nj}}\Big)$ *сходится. Определим маски* $m_I^{s,p_s}(\omega), s = 1, \dots, n$, *формулами* (1.6) *при* $m^{s,p_s}(\omega) \in \mathbb{R}$ *и формулами* (1.7) *при* $m^{s,p_s}(\omega) \in \mathbb{C}$. *Пусть при этом функция*

$$\widehat{\varphi^s}(\omega) := \prod_{j=1}^{\infty} M^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big) \in L(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$

а функции $m^{s,p_s}(\omega), s = 1, \dots, n$, *удовлетворяют условиям типа* (1.4) *и* $|m^{s,p_s}(\omega)| \geq C_0 > 0$ *при* $|\omega| \leq 1/4$. *Тогда при целых* j *и* $s = 1, \dots, n$ *системы функций* $\{\varphi_{I,j,k}^s \colon k \in \mathbb{Z}\}$, *где* $\widehat{\varphi_I^s}$ *определены формулой* (1.9), *являются ортонормированными в пространстве* $L^2(\mathbb{R})$, *интерполяционными на сетке* $\{x_{j,r} = r/2^j \colon r \in \mathbb{Z}\}$. *Последовательности* V_j^s *образуют* n*-раздельный* КМА пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Из определения $M_I^s(\omega)$ следует, что функции $M_I^s(\omega)$, построенные по $m^{s,p_s}(\omega), s = 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям теоремы 3 работы [3]. А именно, $M_I^s(\omega)$ удовлетворяют условиям (1.8), $|M_I^s(\omega)| \geq \widetilde{C} > 0$ при $|\omega| \leq 1/(2^{n+1})$ (следует из условия $|m^{s,p_s}(\omega)| = |m_I^{s,p_s}(\omega)|$), а $\prod_{j=1}^{\infty} M_I^s\Big(\dfrac{\omega}{2^{nj}}\Big)$ сходится.

Это означает, что системы функций $\{\varphi_{I,j,k}^s\}_{k\in\mathbb{Z}}$ являются ортонормированными в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и порождают n-раздельный КМА пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Покажем, что системы функций $\{\varphi_{I,j,k}^s\}_{k\in\mathbb{Z}}$ являются интерполяционными на сетке $\{x_{j,r} = r/2^j \colon r \in \mathbb{Z}\}$. Для этого нужно доказать справедливость равенства

$$\varphi_I^s(r) = \delta_{0,r} \ (r \in \mathbb{Z}).$$

Для доказательства используем идеи Малла. Введем последовательность функций

$$\widehat{\varphi_{Ik}^s}(\omega) := \prod_{j=1}^{k+1} M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\chi_{[-1,1]}\Big(\frac{\omega}{2^{n(k+1)-1}}\Big).$$

Ясно, что $\widehat{\varphi_{Ik}^s}(\omega) \to \widehat{\varphi_I^s}(\omega)$ при $k \to \infty$ поточечно и

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi_{Ik}^s}(\omega) e^{2\pi i\omega r} d\omega = \int_{-2^{n(k+1)-1}}^{2^{n(k+1)-1}} \prod_{j=1}^{k+1} M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big) e^{2\pi i\omega r} d\omega.$$

Покажем, что системы $\{\varphi_{I,k}^s(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ являются интерполяционно-ортогональными. По построению $M_I^s(\omega)$ удовлетворяет условию (1.8). Покажем, что для всех $s = 1, \dots, n$ и всех $k \in \mathbb{Z}$ системы функций $\{\varphi_{Ik}^s(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ интерполяционные на целочисленной сетке. Имеем

$$\varphi_{Ik}^s(l) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi_{Ik}^s}(\omega) e^{2\pi il\omega} d\omega = \int_{-2^{n(k+1)-1}}^{2^{n(k+1)-1}} \prod_{j=1}^{k+1} M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big) e^{2\pi il\omega} d\omega.$$

Длина отрезка интегрирования в данном случае совпадает с периодом подынтегральной функции. Сдвигая отрезок интегрирования на $2^{n(k+1)-1}$ и разбивая на сумму 2^n интегралов, получим

$$\varphi_{Ik}^s(l) = \int_0^{2^{n(k+1)}} \prod_{j=1}^{k+1} M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big) e^{2\pi il\omega} d\omega = \int_0^{2^{nk}} \prod_{j=1}^{k+1} M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big) e^{2\pi il\omega} d\omega$$

$$+ \int_{2^{nk}}^{2^{nk+1}} \prod_{j=1}^{k+1} M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big) e^{2\pi il\omega} d\omega + \ldots + \int_{2^{n(k+1)-1}}^{2^{n(k+1)}} \prod_{j=1}^{k+1} M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big) e^{2\pi il\omega} d\omega,$$

где после замены в каждом r-м слагаемом переменной $\omega/2^{nk}$ на $\omega/2^{nk}+(r-1)/2^n$, $r=2,\dots,2^n$, получим

$$\varphi^s_{I,k}(l)=\int\limits_0^{2^{nk}}\prod_{j=1}^{k}M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big(M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nk}}\Big)+M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nk}}+\frac{1}{2^n}\Big)$$

$$+M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nk}}+\frac{2}{2^n}\Big)+\ldots+M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nk}}+\frac{2^n-1}{2^n}\Big)\Big)e^{2\pi il\omega}d\omega=\int\limits_0^{2^{nk}}\prod_{j=1}^{n-1}M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)e^{2\pi il\omega}d\omega.$$

Заметим, что под знаком интеграла теперь оказалась функция $\widehat{\varphi^s_{I}}_{k-1}(\omega)$, т. е. исходное равенство после k таких же итераций примет вид

$$\varphi^s_{Ik}(l)=\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi^s_{I}}_{k-1}(\omega)e^{2\pi il\omega}d\omega=\ldots=\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi^s_{I}}_{0}(\omega)e^{2\pi il\omega}d\omega=\int\limits_{-2^{n-1}}^{2^{n-1}}M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^n}\Big)e^{2\pi il\omega}d\omega$$

$$=\int\limits_0^1 M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^n}\Big)e^{2\pi il\omega}d\omega+\int\limits_1^2 M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^n}\Big)e^{2\pi il\omega}d\omega+\ldots+\int\limits_{2^n-1}^{2^n} M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^n}\Big)e^{2\pi il\omega}d\omega$$

$$=\int\limits_0^1\Big(M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^n}\Big)+M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^n}+\frac{1}{2^n}\Big)+M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^n}+\frac{2}{2^n}\Big)+\ldots+M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^n}+\frac{2^n-1}{2^n}\Big)\Big)e^{2\pi il\omega}d\omega$$

$$=\int\limits_0^1 e^{2\pi il\omega}d\omega=\delta_{l,0}.$$

Таким образом, интерполяционность систем $\{\varphi^s_k(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ доказана.

Покажем теперь, что $|\widehat{\varphi^s_{I}}_{k}(\omega)|\le C_1|\widehat{\varphi^s_I}(\omega)|$. Тогда по теореме Лебега о мажорантной сходимости можно будет перейти к пределам под знаками интегралов. По условиям (1.6), (1.7) $|m_I^{s,p_s}(\omega/2^j)|=|m^{s,p_s}(\omega/2^j)|$, поэтому из условия теоремы следует, что $|m_I^{s,p_s}(\omega/2^j)|\ge C_0>0$ при $|\omega|\le 1/2,\ j\ge 1$. При этом по условию теоремы $|m^{s,p_s}(\omega)|=|m_I^{s,p_s}(\omega)|\ge 1-\Omega(\omega)$ при $\omega<\delta_0$. Найдется такое j_0, что $\Omega(\omega/2^j)<1/2,\ j\ge j_0$. Имеем

$$|\widehat{\varphi^s_I}(\omega)|=\prod_{j=1}^{\infty}\Big|M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|=\prod_{j=1}^{j_0}\Big|M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|\prod_{j=j_0+1}^{\infty}\Big|M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|.$$

Из условия $|m_I^{s,p_s}(\omega/2^j)|\ge C_0>0$ следует, что справедливо неравенство

$$\prod_{j=1}^{j_0}\Big|M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|\ge C_0^{nj_0}.$$

Так как $|m_I^{s,p_s}(\omega+1/2)|\le\Omega(\omega)$, то выполнено $|m_I^{s,p_s}(\omega+1/2)|=|1-m_I^{s,p_s}(\omega)|\le\Omega(\omega)$, поэтому $1-|m_I^{s,p_s}(\omega)|\le\Omega(\omega)$ при $\omega<\delta_0$. Тогда

$$\prod_{j=j_0+1}^{\infty}\Big|M_I^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|\ge\prod_{j=j_0+1}^{\infty}\big(1-\Omega(2^{-j}\omega)\big).$$

Следовательно, используя то, что при $0\le y\le 1/2$ выполнено $1-y\ge e^{-2y}$, получаем

$$|\widehat{\varphi^s_I}(\omega)|\ge C^{j_0}\prod_{j=j_0+1}^{\infty}e^{-2\Omega(2^{-j}\omega)}\ge C^{j_0}\exp\Big(\sum_{j=nj_0+1}^{\infty}(-2\Omega(2^{-j}\omega))\Big)\ge C^{j_0}\exp\big(-2\max_{|\omega|<\delta_0}\Omega(2^{-j}\omega)=C'>0.$$

Это означает, что $\chi_{[-1,1]}(\omega) \le \dfrac{|\widehat{\varphi^s_I}(\omega)|}{C'}$.

Тогда

$$|\widehat{\varphi^s_{I,k}}(\omega)| = \prod_{j=1}^{k}\Big|M^s_I\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|\chi_{[-1,1]}\Big(\frac{\omega}{2^{n(k+1)-1}}\Big) \le \frac{1}{C'}\prod_{j=1}^{k}|M^s_I(\omega/2^{nj})||\widehat{\varphi^s_I}(\omega/(2^{nk}))|$$

$$= C_1|\widehat{\varphi^s_I}(\omega)| \in L(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Применив теорему Лебега о мажорантной сходимости, получаем, что выполнено

$$\varphi^s_{I,k}(l) = \delta_{l,0},$$

и тем самым теорема 1 полностью доказана. □

3. Интерполяционно-ортогональные базисы всплесков в пространстве $L^2(\mathbb{R})$

Дополняющие V^s_j до $V^{p_s}_{j+1}$ пространства W^s_j строятся таким образом, что их базисы образованы системами $\{\psi^s_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ (см. [3]), где

$$\widehat{\psi^s_I}(\omega) = e^{i\pi\omega}\overline{m^{s,p_s}_I\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \quad s = 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

Для таких функций $\{\psi^s_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ справедливо следующее

Предложение 2. *Пусть функции ψ^s определяются формулами* (3.1)*. Тогда системы функций*

$$\{\dots,\psi^1_{0,k},\psi^2_{1,k},\psi^3_{2,k},\dots,\psi^n_{n-1,k},\psi^1_{n,k},\dots\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \{\dots,\psi^2_{0,k},\psi^3_{1,k},\psi^4_{2,k},\dots,\psi^1_{n-1,k},\psi^2_{n,k},\dots\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \dots,$$

$$\{\dots,\psi^n_{0,k},\psi^1_{1,k},\psi^2_{2,k},\dots,\psi^{n-1}_{n-1,k},\psi^n_{n,k},\dots\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

являются ортонормированными базисами пространства $L^2(\mathbb{R})$, интерполяционными на сетке $\{(2k-1)/2^{j+1}\colon j,k\in\mathbb{Z}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определенные формулами (3.1) ψ^s построены, как в работе [3], поэтому для них системы функций, определенные в предложении 2, являются ортонормированными базисами пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Покажем, что они являются интерполяционными на сетке $\{(2k-1)/2^{j+1}\colon j,k\in\mathbb{Z}\}$. Для этого сначала докажем, что системы $\{\psi^s_I(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $s=1,\dots,n$, являются интерполяционными на сетке $\{l+1/2\}_{l\in\mathbb{Z}}$. Действительно, если преобразование Фурье определено формулой (3.1), то функция ψ^s_I имеет вид

$$\psi^s_I(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}(-1)^\nu\overline{h^{s,p_s}_{I,1-\nu}}\varphi^{p_s}_{I,1,\nu}(x).$$

Так как все четные коэффициенты, кроме нулевого, равны нулю, а система функций $\{\varphi^{p_s}_{I,1,k}(x)\}$ является интерполяционной на сетке $l/2$, $l\in\mathbb{Z}$, то

$$\psi^s_I(x) = \varphi^{p_s}_I(2x-1) + \sqrt{2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{h^{s,p_s}_{I,1-2\nu}}\varphi^{p_s}_I(2x-2\nu).$$

Тогда в точках вида $l+1/2$ будет выполнено соотношение

$$\psi^s_I\Big(l+\frac12\Big) = \varphi^{p_s}_I\Big(2\Big(l+\frac12\Big)-1\Big) + \sqrt{2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{h^{s,p_s}_{I,1-2\nu}}\varphi^{p_s}_I\Big(2\Big(l+\frac12\Big)-2\nu\Big) = \delta_{l,0}.$$

Следовательно, система $\{\psi_I^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является интерполяционной на сетке $\{l+1/2\}_{l\in\mathbb{Z}}$, а тогда и система сжатий этих функций $\{\psi_I^s(2^j x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ будет интерполяционной на сетке $\{(2l+1)/2^{j+1}\}_{l\in\mathbb{Z}}$. □

Примеры. 1. Пусть $m^{1,2}(\omega)$ — маска Мейера, $m^{2,1}(\omega)$ — маска Добеши $m^{2,1}(\omega)=\sum_{k=0}^N h_k e^{2\pi ik\omega}$. Такие ортогональные маски удовлетворяют условиям теоремы 1. Полученные по формуле (1.7) маски $m_I^{1,2}(\omega)$ и $m_I^{2,1}(\omega)$ позволяют построить 2-раздельный КМА.

2. Рассмотрим в качестве $m^{1,2}(\omega), m^{2,1}(\omega)$ маски Добеши $m^{1,2}(\omega)=\sum_{k=0}^{N_1} h_k^{1,2} e^{2\pi ik\omega}$; $m^{2,1}(\omega)=\sum_{k=0}^{N_2} h_k^{2,1} e^{2\pi ik\omega}$. Они являются тригонометрическими полиномами, которые удовлетворяют условиям теоремы 1, поэтому построенные с их помощью маски

$$m_I^{1,2}(\omega)=\left|\sum_{k=0}^{N_1} h_k^{1,2}\, e^{2\pi ik\omega}\right|^2+i\,\mathrm{sign}(\sin 2\pi\omega)\left|\sum_{k=0}^{N_1} h_k^{1,2}\, e^{2\pi ik\omega}\sum_{l=0}^{N_1} h_l^{1,2}\, e^{2\pi i(l+1/2)\omega}\right|,$$

$$m_I^{2,1}(\omega)=\left|\sum_{k=0}^{N_2} h_k^{2,1}\, e^{2\pi ik\omega}\right|^2+i\,\mathrm{sign}(\sin 2\pi\omega)\left|\sum_{k=0}^{N_2} h_k^{2,1}\, e^{2\pi ik\omega}\sum_{l=0}^{N_2} h_l^{2,1}\, e^{2\pi i(l+1/2)\omega}\right|$$

позволяют получить интерполяционно-ортогональные системы 2-раздельных масштабирующих функций. Полученные таким образом масштабирующие функции, в отличие от исходных, не будут иметь компактного носителя, так как маски $m_I^{s,p_s}(\omega)$, $s=1,2$, не являются тригонометрическими полиномами.

4. Быстрые дискретные всплеск-преобразования

Для полученных интерполяционно-ортогональных базисов n-раздельных КМА и всплесков, как и в классическом случае, можно использовать быстрые алгоритмы прямых и обратных дискретных всплеск-преобразований для обработки сигналов. Коэффициенты разложения функции по базисам масштабирующих функций при малых j вычисляются при этом по известным коэффициентам разложения функции по базисам масштабирующих функций при больших j.

Пусть нам известно разложение функции по базисам V_j^s и W_j^s:

$$\mathrm{Pr}_{V_j^s} f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{I,j,k}^s \varphi_{I,j,k}^s(x);\quad \mathrm{Pr}_{W_j^s} f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{I,j,k}^s \psi_{I,j,k}^s(x).$$

Так как $V_{j+1}^{p_s}=V_j^s\bigoplus W_j^s$, то

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{I,j+1,k}^{p_s}\varphi_{I,j+1,k}^{p_s}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{I,j,k}^s\varphi_{I,j,k}^s(x)+\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{I,j,k}^s\psi_{I,j,k}^s(x). \tag{4.2}$$

Скалярно домножая (4.2) последовательно на $\varphi_{I,j+1,l}^{p_s}(x)$, $\varphi_{I,j,l}^s(x)$, $\psi_{I,j,l}^s(x)$, получим, что

$$c_{I,j+1,l}^{p_s}=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{I,j,k}^s h_{I,l-2k}^{s,p_s}+\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{I,j,k}^s h_{I,\psi,l-2k}^{s,p_s};$$

$$c_{I,j,l}^s=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{I,j+1,k}^{p_s}\overline{h_{I,2l-k}^{s,p_s}};\quad d_{I,j,l}^s=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{I,j+1,k}^{p_s}\overline{h_{I,\psi,2l-k}^{s,p_s}}.$$

Схематично это можно изобразить в виде прямой и обратной пирамидальных схем:

$$\begin{array}{ccccc}
c_{I,j,k}^{p_s} & \longrightarrow & c_{I,j-1,k}^{s} & \longrightarrow & \\
& \searrow & & \searrow & \dots \\
& & d_{I,j-1,k}^{s} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
c_{I,j-1,k}^{s} & \longrightarrow & c_{I,j,k}^{p_s} & \longrightarrow & \\
& \nearrow & & \nearrow & \dots \\
d_{I,j-1,k}^{s} & & d_{I,j,k}^{p_s}\,. & &
\end{array}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Mallat Stéphane G.** Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 315. P. 69–87. doi: 10.1090/s0002-9947-1989-1008470-5 .
2. **Meyer Yves.** Ondelettes et operateurs: Ondelettes. Hermann, 1990. 215 p. ISBN 9782705661250 .
3. **Плещева Е.А.** Новое обобщение ортогональных базисов всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 264–271. doi: 10.1134/S0081543811050130 .
4. **Берколайко М.З., Новиков И.Я.** О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 3. С. 3–12. doi: 10.1007/BF02362405 .
5. **Zakharov V.G.** Reproducing solutions to PDEs by scaling functions // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2020. Vol. 19, art. no. 2050017. doi: 10.1142/S0219691320500174 .
6. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161. doi: 10.1134/S0081543809050083 .

Поступила 8.09.2019
После доработки 17.10.2022
Принята к публикации 24.10.2022

Плещева Екатерина Александровна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент кафедры математического анализа
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: eplescheva@gmail.com

REFERENCES

1. Mallat S.G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989, vol. 315, no. 1, pp. 69–87. doi: 10.1090/S0002-9947-1989-1008470-5 .
2. Meyer Y. *Ondelettes et operateurs: Ondelettes.* Hermann, 1990, 215 p. ISBN: 2705661255 .
3. Pleshcheva E.A. New generalization of orthogonal wavelet bases. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. 124–132. doi: 10.1134/S0081543811050130 .
4. Berkolaiko M.Z., Novikov I.Ya. On infinitely smooth compactly supported almost-wavelets. *Math. Notes*, 1994, vol. 56, no. 3, pp. 877–883. doi: 10.1007/BF02362405 .
5. Zakharov V.G. Reproducing solutions to PDEs by scaling functions. *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2020, vol. 19, no. 2, art. no. 2050017. doi: 10.1142/S0219691320500174 .
6. Chernykh N.I., Subbotin Yu.N. Interpolating-orthogonal wavelet systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 264, pp. 107–115. doi: 10.1134/S0081543809050083 .

Received September 8, 2022
Revised October 17, 2022
Accepted October 24, 2022

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2022-874).

Ekaterina Aleksandrovna Pleshcheva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: eplescheva@gmail.com .

Cite this article as: E. A. Pleshcheva. Interpolating orthogonal bases of n-separate MRAs and wavelets. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 154–163 .