ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.5

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С МИНИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ L_2-НОРМЫ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

С. И. Новиков

Работа посвящена проблеме интерполирования ограниченных в евклидовой норме конечных наборов вещественных чисел. Мы интерполируем классом гладких функций двух переменных с минимальным значением L_2-нормы оператора Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, примененного к интерполирующим функциям. Доказано, что если $N \geq 3$ и все точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ не лежат на одной прямой, то минимальное значение L_2-нормы оператора Лапласа на интерполянтах из класса гладких функций при интерполировании данных из единичного шара пространства l_2^N выражается через максимальное собственное значение матрицы некоторой квадратичной формы.

Ключевые слова: интерполяция, оператор Лапласа, натуральные сплайны.

S. I. Novikov. On an interpolation problem with the smallest L_2-norm of the Laplace operator.

The paper is devoted to an interpolation problem for finite sets of real numbers bounded in the Euclidean norm. The interpolation is by a class of smooth functions of two variables with the minimum L_2-norm of the Laplace operator $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ applied to the interpolating functions. It is proved that if $N \geq 3$ and all interpolation points $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ do not lie on the same line, then the minimum value of the L_2-norm of the Laplace operator on interpolants from the class of smooth functions for interpolated data from the unit ball of the space l_2^N is expressed in terms of the largest eigenvalue of the matrix of a certain quadratic form.

Keywords: interpolation, Laplace operator, thin plate splines.

MSC: 41A05, 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-143-153

1. Введение

Работа посвящена интерполированию ограниченных в евклидовой норме конечных наборов вещественных чисел классом гладких функций двух переменных с минимальным значением L_2-нормы оператора Лапласа, примененного к интерполянтам.

Пусть N — произвольное натуральное число и

$$\mathfrak{M}^N = \left\{ z \colon z = \{z_j\}_{j=1}^N, \left(\sum_{j=1}^N |z_j|^2 \right)^{1/2} \leq 1 \right\}$$

— класс интерполируемых данных, который является единичным шаром в пространстве l_2^N.

Через $W_{2,\mathrm{loc}}^2$ обозначаем множество непрерывных в $\mathbb{R}^2$ функций, у которых обобщенные производные первого и второго порядков суммируемы с квадратом в любой ограниченной области из $\mathbb{R}^2$, $L_2(\mathbb{R}^2)$ — стандартное пространство функций $u = u(x, y)$, интегрируемых с квадратом, снабженное нормой

$$\|u\|_2 = \left(\iint\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x,y)|^2 \, dxdy \right)^{1/2}.$$

Пусть $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ — набор N произвольно выбранных различных точек, в которых мы будем интерполировать. Через $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ обозначаем оператор Лапласа, и пусть

$$K_N(z) = \Big\{ u \in W^2_{2,loc}\colon \frac{\partial u}{\partial x} = O(1),\ \frac{\partial u}{\partial y} = O(1) \ \text{ при } \ x^2 + y^2 \to +\infty,$$

$$\Delta u \in L_2(\mathbb{R}^2),\ u(x_j, y_j) = z_j,\ j = 1, 2, \ldots, N \Big\}$$

— класс интерполирующих функций для произвольного $z = \{z_j\}_{j=1}^N \in \mathfrak{M}^N$.

В настоящей работе для произвольной фиксированной сетки точек интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ изучается величина

$$\mathfrak{B}_N = \sup_{z\in\mathfrak{M}^N} \inf_{u\in K_N(z)} \|\Delta u\|_2, \tag{1.1}$$

которую можно интерпретировать как L_2-норму оператора Лапласа, примененного к "наилучшей" функции из класса $K_N(z)$ при интерполировании на выбранной сетке "наихудшего" набора данных $z \in \mathfrak{M}^N$. Значение величины (1.1), естественно, зависит от выбранной сетки.

Заметим, что определение величины (1.1) близко к постановкам задач экстремальной интерполяции, впервые изученных Ю. Н. Субботиным (см. [1], а также [2] и имеющиеся там ссылки). В частности, Ю. Н. Субботин интерполировал в бесконечном числе точек равномерной сетки на всей оси $\mathbb{R}$, а класс интерполируемых данных определялся ограничением на их конечные разности. В настоящей работе множество точек интерполяции конечно, а класс интерполируемых данных задается ограничением на сами интерполируемые значения.

Для каждого фиксированного $z \in \mathfrak{M}^N$ задача

$$\|\Delta u\|_2 \to \inf_{u\in K_N(z)} \tag{1.2}$$

в свою очередь близка интерполяционной проблеме типа Фавара (см., например, [3–5]). Поэтому на величину (1.1) можно также смотреть в контексте интерполяционной проблемы типа Фавара, рассматриваемой для всего класса $\mathfrak{M}^N$ интерполируемых данных.

Изучению задачи (1.2) посвящена работа А. Б. Певного [6]. Перечислим и прокомментируем некоторые результаты этой работы, которые потребуются в дальнейшем. В [6] доказано, что если $N \geq 3$ и все точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ не лежат на одной прямой, то единственным решением задачи (1.2) является функция $S_N(x, y)$, называемая интерполяционным натуральным сплайном.

Следуя [6], функцию $S_N(x, y)$ будем называть *интерполяционным натуральным сплайном* двух переменных, если она имеет вид

$$S_N(x, y) = a + bx + cy + \sum_{j=1}^N d_j G(x - x_j, y - y_j), \tag{1.3}$$

где $a, b, c, \{d_j\}_{j=1}^N$ — вещественные числа, а $G(x, y)$ — фундаментальное решение бигармонического уравнения $\Delta^2 f = 0$, т. е.

$$G(x, y) = \frac{1}{16\pi}(x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$$

при $x^2 + y^2 \neq 0$ и $G(0, 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} G(x, y) = 0$.

Вещественные числа $a, b, c, \{d_j\}_{j=1}^N$, входящие в представление (1.3), определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} S_N(x_j, y_j) = z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N; \\ d_1 + d_2 + \ldots + d_N = 0, \\ d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_Nx_N = 0, \\ d_1y_1 + d_2y_2 + \ldots + d_Ny_N = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

В работе [6] доказано, что если $N \geq 3$ и все точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ не лежат на одной прямой, то система линейных уравнений (1.4) однозначно разрешима при любых значениях $\{z_j\}_{j=1}^N$. Это означает, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,N-1} & a_{1,N} & 1 & x_1 & y_1 \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{2,N-1} & a_{2,N} & 1 & x_2 & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,N-1} & a_{2,N-1} & \cdots & 0 & a_{N-1,N} & 1 & x_{N-1} & y_{N-1} \\ a_{1,N} & a_{2,N} & \cdots & a_{N-1,N} & 0 & 1 & x_N & y_N \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{N-1} & x_N & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} & y_N & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $a_{ij} = G(x_i - x_j, y_i - y_j),\ i \neq j;\ a_{ii} = 0\ \ (i, j = 1, 2, \ldots, N)$, является невырожденной.

Кроме того, в [6] установлено, что

$$\Delta S_N(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N d_j \ln[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] \tag{1.6}$$

и $\Delta S_N \in L_2(\mathbb{R}^2)$.

Заметим, что при произвольных значениях коэффициентов $\{d_j\}_{j=1}^N$ функция $\Delta S_N(x, y)$ не обязана принадлежать пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$, однако благодаря трем нижним уравнениям линейной системы (1.4) оказывается, что $\Delta S_N \in L_2(\mathbb{R}^2)$, а частные производные первого порядка функции $S_N(x, y)$ ограничены при $x^2 + y^2 \to +\infty$. Поэтому $S_N \in K_N(z)$.

Таким образом, если $N \geq 3$ и все точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ не лежат на одной прямой, то для произвольного $z \in \mathfrak{M}^N$ выполняется

$$\inf_{u \in K_N(z)} \|\Delta u\|_2 = \frac{1}{4\pi} \left\| \sum_{j=1}^N d_j \ln\left[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2\right] \right\|_2, \tag{1.7}$$

где коэффициенты $\{d_j\}_{j=1}^N$ определяются из системы линейных уравнений (1.4).

Натуральные сплайны двух переменных впервые были введены, по-видимому, в работе С. А. Смоляка [7] и независимо Ж. Дюшоном [8] в более общем виде. Также эти объекты известны как “thin plate splines” (см., например, [9] и имеющиеся там ссылки). При этом соотношение (1.7) играет ту же роль в теории натуральных сплайнов двух переменных, что и хорошо известное свойство минимальной нормы в теории полиномиальных сплайнов нечетной степени одной переменной.

Также отметим, что поскольку функция $G(x, y)$ является радиальной, задачи, относящиеся к натуральным сплайнам двух переменных, вкладываются в обширный раздел современной теории аппроксимации, известный как теория радиальных базисных функций (см., например, [10; 11] и приведенную там библиографию).

В настоящей работе мы доказываем, что если $N \geq 3$ и все точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ не лежат на одной прямой, то величина (1.1) равна квадратному корню из максимального собственного значения матрицы некоторой квадратичной формы. Этот факт является основным результатом работы.

В разд. 2 работы мы изучаем интерполяционные натуральные сплайны двух переменных и получаем представление L_2-нормы оператора Лапласа, примененного к такому сплайну, через интерполируемые им значения. В разд. 3 мы устанавливаем, что в задаче (1.1) достаточно найти точную верхнюю грань только по границе множества $\mathfrak{M}^N$, т. е. по единичной сфере с центром в начале координат, и затем доказываем основной результат.

Далее всюду предполагаем, что $N \geq 3$ и все точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ не лежат на одной прямой.

2. Интерполяционные натуральные сплайны двух переменных

В матрице A (см. (1.5) поочередно заменяем k-ю строку ($k = 1, 2, \ldots, N$) строкой

$$G(x - x_1, y - y_1) \;\; G(x - x_2, y - y_2) \;\; \ldots \;\; G(x - x_N, y - y_N) \;\; 1 \;\; x \;\; y,$$

содержащей переменные x, y. Полученные матрицы обозначаем $A_k(x, y)$ и полагаем

$$Q_k(x, y) = (\det A)^{-1} \det A_k(x, y) \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Лемма 1. *Функции $\{Q_k(x, y)\}_{k=1}^N$ являются фундаментальными натуральными сплайнами двух переменных, т. е. $Q_k(x_j, y_j) = \delta_{kj}$, где δ_{kj} — символ Кронекера $(k, j = 1, 2, \ldots, N)$.*

Доказательство. Каждая из функций $Q_k(x, y)$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) является натуральным сплайном двух переменных в силу ее построения. Пусть $j \neq k$. В этом случае матрица $A_k(x_j, y_j)$ имеет две одинаковые строки, и потому ее определитель равен нулю. Если же $j = k$, то матрица $A_k(x_k, y_k)$ совпадает с матрицей A. □

Лемма 2. *Интерполяционный натуральный сплайн $S_N(x, y)$ однозначно представляется в виде*

$$S_N(x, y) = \sum_{k=1}^{N} z_k Q_k(x, y), \tag{2.1}$$

где $\{z_k\}_{k=1}^N$ — множество интерполируемых значений.

Доказательство легко получается применением леммы 1. □

Отметим, что близкие по форме представления фундаментальных интерполянтов известны (см., например, [12]), где они применялись при исследовании функций Лебега некоторых интерполяционных процессов.

Теперь выразим коэффициенты $\{d_j\}_{j=1}^N$ в соотношении (1.6) через интерполируемые значения $\{z_k\}_{k=1}^N$. Для этого к записанной в виде (2.1) функции $S_N(x, y)$ применяем оператор Лапласа и получаем

$$\Delta S_N(x, y) = (\det A)^{-1} \big[z_1 \Delta\big(\det A_1(x, y)\big) + z_2 \Delta\big(\det A_2(x, y)\big) + \ldots + z_N \Delta\big(\det A_N(x, y)\big) \big]. \tag{2.2}$$

Воспользуемся известным правилом дифференцирования определителей (см., например, [13, с. 388–389]) и тем обстоятельством, что у определителя $\det A_k(x, y)$ только k-я строка зависит от переменных x, y. После разложения определителя по элементам k-й строки имеем

$$\Delta\Big(\det A_k(x, y)\Big) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{kj} \ln\big[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2\big], \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\{\alpha_{kj}\}$ — коэффициенты, которые определяются только точками интерполяции.

Подставив найденные выражения в (2.2), выводим

$$\begin{aligned} \Delta S_N(x, y) = (\det A)^{-1} \Big\{ &(z_1\alpha_{11} + z_2\alpha_{21} + \ldots + z_N\alpha_{N1}) \ln\big[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\big] \\ &+ (z_1\alpha_{12} + z_2\alpha_{22} + \ldots + z_N\alpha_{N2}) \ln\big[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2\big] \\ &+ \ldots + (z_1\alpha_{1N} + z_2\alpha_{2N} + \ldots + z_N\alpha_{NN}) \ln\big[(x - x_N)^2 + (y - y_N)^2\big] \Big\}. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду единственности интерполяционного натурального сплайна для коэффициентов $\{d_j\}_{j=1}^N$ в (1.6) и (1.7) получаем

$$d_j = 4\pi (\det A)^{-1} (z_1\alpha_{1j} + z_2\alpha_{2j} + \ldots + z_N\alpha_{Nj}) \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.3}$$

Лемма 3. *Если все точки интерполяции* $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{N}$ *лежат внутри круга* $x^2+y^2 \le R^2$ *и* $R > 0$ *— достаточно большое число, то при всех* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *таких, что* $x^2 + y^2 \ge R^2$, *и всех* $j = 1, 2, \dots, N$ *имеет место неравенство*

$$\frac{|x_j^2 + y_j^2 - 2xx_j - 2yy_j|}{x^2+y^2} \le \frac{5R}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{N}$ лежат внутри круга радиуса R с центром в начале координат, то для всех $(x, y)\colon x^2 + y^2 \ge R^2$ имеем

$$\frac{x_j^2+y_j^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{R^2}{R} = R$$

и далее получаем

$$\frac{|x_j^2 + y_j^2 - 2xx_j - 2yy_j|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x_j^2+y_j^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2|x_j|\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2|y_j|\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\le \frac{R+2|x_j|+2|y_j|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{5R}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \qquad \square$$

Пусть

$$\tau_j = \tau_j(x, y) = \frac{x_j^2 + y_j^2 - 2xx_j - 2yy_j}{x^2+y^2} \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Заметим, что за счет увеличения радиуса круг $x^2 + y^2 \le R^2$ можно выбрать таким, чтобы он не только содержал внутри себя все точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{N}$, но и обеспечивал выполнение неравенств $-1 < \tau_j \le 1$ во всех точках (x, y), лежащих вне его.

Выпишем соотношения, которые выражают $\|\Delta S_N\|_2^2$ через коэффициенты $\{d_j\}_{j=1}^{N}$ в форме, нужной нам в дальнейшем.

Лемма 4. *Имеет место представление*

$$\|\Delta S_N\|_2^2 = \frac{1}{16\pi^2}\left(\sum_{j=1}^{N} d_j^2\ q_{jj} + 2\sum_{\substack{j>k\\ j,k=1}}^{N} d_j\ d_k\ q_{jk}\right), \tag{2.4}$$

в котором коэффициенты $\{q_{jk}\}_{j,k=1}^{N}$ *записываются следующим образом*:

$$q_{jk} = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \ln\left[(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2\right]\cdot \ln\left[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2\right]dxdy$$

$$+ \iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2}\left(\frac{x_j^2+y_j^2}{x^2+y^2} + \varphi_j(x,y)\right)\left(\frac{x_k^2+y_k^2}{x^2+y^2} + \varphi_k(x,y)\right)dxdy.$$

Здесь $R > 0$ *— такое достаточно большое число такое, что круг* $x^2 + y^2 \le R^2$ *содержит внутри себя все точки интерполяции* $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{N}$, *вне круга* $-1 < \tau_j \le 1$ *для всех* $j = 1, 2, \dots, N$ *и*

$$\varphi_j(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\tau_j^n \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на идеях работы [6]. Прежде всего, выбираем достаточно большой круг $x^2+y^2 \le R^2$ радиуса $R>0$, который содержит внутри себя все точки интерполяции $\{(x_j,y_j)\}_{j=1}^N$, а для всех точек (x,y), лежащих вне его, выполняется

$$\tau_j = \frac{x_j^2+y_j^2-2xx_j-2yy_j}{x^2+y^2} \in (-1,1].$$

Квадрат L_2-нормы функции $\Delta S_N(x,y)$ представляем в виде суммы двух интегралов

$$\|\Delta S_N\|_2^2 = \frac{1}{16\pi^2}\Bigg(\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} |\Delta S_N(x,y)|^2 dxdy + \iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2} |\Delta S_N(x,y)|^2 dxdy\Bigg) = \frac{1}{16\pi^2}(I_1+I_2).$$

Далее каждый из этих двух интегралов I_1 и I_2 рассматриваем отдельно.

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \left|\sum_{j=1}^N d_j \ln\left[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2\right]\right|^2 dxdy = \sum_{j=1}^N d_j^2\; V_{jj} + 2\sum_{j>k} d_j d_k\; V_{jk},$$

где

$$V_{jk} = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \ln\left[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2\right]\; \ln\left[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2\right] dxdy.$$

Пусть $j=k$. Убедимся в том, что интегралы V_{jj} $(j=1,2,\dots,N)$ сходятся. Подынтегральная функция каждого из этих интегралов имеет в круге $x^2+y^2\le R^2$ единственную особую точку (x_j,y_j), в остальных точках она непрерывна. Берем круг $(x-x_j)^2+(y-y_j)^2\le\delta^2$ радиуса $\delta>0$ с центром в этой точке, целиком лежащий внутри $x^2+y^2\le R^2$, и после перехода к полярным координатам $x=x_j+r\cos\varphi$, $y=y_j+r\sin\varphi$ получаем

$$\iint\limits_{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2\le\delta^2} \ln^2\left[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2\right] dxdy = 2\pi\int\limits_0^\delta r\ln^2 r\; dr = \frac{\delta^2}{4}(2\ln^2\delta - 2\ln\delta + 1).$$

Поэтому каждый из рассматриваемых интегралов сходится.

Сходимость интегралов V_{jk}, $j\ne k$ $(j,k=1,2,\dots,N)$, вытекает из доказанной сходимости интегралов V_{jj} ввиду неравенства Коши — Буняковского

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \ln\left[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2\right]\; \ln\left[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2\right] dxdy$$

$$\le \Bigg(\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \ln^2\left[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2\right] dxdy\Bigg)^{1/2} \Bigg(\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \ln^2\left[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2\right] dxdy\Bigg)^{1/2}.$$

Теперь обратимся к интегралам I_2:

$$I_2 = \iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2} |\Delta S_N(x,y)|^2 dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2} \left|\sum_{j=1}^N d_j \ln\left[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2\right]\right|^2 dxdy.$$

Сумму, стоящую в правой части под знаком интеграла, будем преобразовывать с помощью трех нижних уравнений линейной системы (1.4). В результате

$$\sum_{j=1}^N d_j\; \ln\left[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2\right] = \sum_{j=1}^N d_j\; \ln\left[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2\right] - \left(\sum_{j=1}^N d_j\right)\; \ln(x^2+y^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} d_j \ \ln \frac{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2}{x^2+y^2} = \sum_{j=1}^{N} d_j \ \ln\Big(1+\frac{x_j^2+y_j^2-2xx_j-2yy_j}{x^2+y^2}\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} d_j\Big(\frac{x_j^2+y_j^2-2xx_j-2yy_j}{x^2+y^2}+\varphi_j(x,y)\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} d_j\Big(\frac{x_j^2+y_j^2}{x^2+y^2}+\varphi_j(x,y)\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{N} x_j d_j\Big)\frac{2x}{x^2+y^2} - \Big(\sum_{j=1}^{N} y_j d_j\Big)\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} d_j\Big(\frac{x_j^2+y_j^2}{x^2+y^2}+\varphi_j(x,y)\Big),$$

где

$$\varphi_j(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(\frac{x_j^2+y_j^2-2xx_j-2yy_j}{x^2+y^2}\Big)^n \quad (j=1,2,\ldots,N).$$

Мы воспользовались разложением функции $\ln(1+\tau_j)$ в ряд Тейлора и тем фактом, что, выбрав достаточно большое значение $R>0$, можно добиться того, чтобы

$$\tau_j = \frac{x_j^2+y_j^2-2xx_j-2yy_j}{x^2+y^2} \in (-1,1] \quad (j=1,2,\ldots,N).$$

Таким образом,

$$I_2 = \iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2} \Big|\sum_{j=1}^{N} d_j\Big(\frac{x_j^2+y_j^2}{x^2+y^2}+\varphi_j(x,y)\Big)\Big|^2 dxdy = \sum_{j=1}^{N} d_j^2 \iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2} \Big(\frac{x_j^2+y_j^2}{x^2+y^2}+\varphi_j(x,y)\Big)^2 dxdy$$

$$+2\sum_{\substack{j>s\\ j,s=1}}^{N} d_j d_s \iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2} \Big(\frac{x_j^2+y_j^2}{x^2+y^2}+\varphi_j(x,y)\Big)\Big(\frac{x_s^2+y_s^2}{x^2+y^2}+\varphi_s(x,y)\Big)dxdy = \sum_{j=1}^{N} d_j^2\, W_{jj} + 2\sum_{\substack{j>s\\ j,s=1}}^{N} d_j d_s W_{js},$$

где

$$W_{js} = \iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2} \Big(\frac{x_j^2+y_j^2}{x^2+y^2}+\varphi_j(x,y)\Big)\Big(\frac{x_s^2+y_s^2}{x^2+y^2}+\varphi_s(x,y)\Big)dxdy \quad (j,s=1,2,\ldots,N).$$

Пусть $j=s$. Покажем, что эти интегралы сходятся. Поскольку каждая из функций $\varphi_j(x,y)$ представляет собой ряд Тейлора функции $\ln(1+\tau_j)$ без линейного слагаемого, то при достаточно больших значениях $R>0$ для всех точек (x,y) таких, что $x^2+y^2\ge R^2$, справедливы неравенства

$$|\varphi_j(x,y)| \le C\Big(\frac{x_j^2+y_j^2-2xx_j-2yy_j}{x^2+y^2}\Big)^2 \quad (j=1,2,\ldots,N),$$

в которых $C>0$ не зависит от переменных x,y. Воспользовавшись леммой 3, отсюда получаем, что для всех точек (x,y): $x^2+y^2\ge R^2$ справедлива оценка

$$|\varphi_j(x,y)| \le \frac{\widetilde{C}}{x^2+y^2} \quad (j=1,2,\ldots,N) \tag{2.5}$$

с некоторой, не зависящей от x и y, константой $\widetilde{C}>0$.

Преобразуем подынтегральное выражение в W_{jj} посредством возведения в квадрат и затем применяем неравенство (2.5). В результате получаем

$$\Big(\frac{x_j^2+y_j^2}{x^2+y^2}+\varphi_j(x,y)\Big)^2 = \frac{(x_j^2+y_j^2)^2}{(x^2+y^2)^2} + \big(\varphi_j(x,y)\big)^2 + 2\,\frac{x_j^2+y_j^2}{x^2+y^2}\,\varphi_j(x,y)$$

$$\le \frac{(x_j^2+y_j^2)^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\widetilde{C}^2}{(x^2+y^2)^2} + 2\widetilde{C}\ \frac{x_j^2+y_j^2}{(x^2+y^2)^2} \le \omega(R)\ \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

при некоторой положительной величине $\omega(R)$. Отсюда имеем

$$W_{jj} \le \omega(R) \iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} \quad (j=1,2,\dots,N),$$

причем последний интеграл сходится, в чем нетрудно убедиться с помощью перехода к полярным координатам.

Сходимость интегралов $W_{js},\ \ j\ne s\ \ (j,s=1,2,\dots,N)$, вытекает из доказанной сходимости интегралов W_{jj} и неравенства Коши — Буняковского.

Таким образом, все интегралы, определяющие коэффициенты q_{jk} $(j,k=1,2,\dots,N)$ в представлении (2.4), сходятся. □

Теперь выразим $\|\Delta S_N\|_2^2$ непосредственно через интерполируемые значения $\{z_\nu\}_{\nu=1}^N$.

Лемма 5. *Имеет место представление*

$$\|\Delta S_N\|_2^2 = \sum_{\nu=1}^{N} z_\nu^2\ \gamma_{\nu\nu} + 2 \sum_{\substack{s>m\\ s,m=1}}^{N} z_s\ z_m\ \gamma_{sm}, \tag{2.6}$$

где

$$\gamma_{sm} = (\det A)^{-2} \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_{sj}\ \alpha_{mj}\ q_{jj} + 2 \sum_{\substack{j>k\\ j,k=1}}^{N} \alpha_{sj}\ \alpha_{mk}\ q_{jk} \right) \quad (s,m=1,2,\dots,N),$$

числа $\{q_{jk}\colon j,k=1,2,\dots,N\}$ *определены в лемме* 4*, а числа* $\{\alpha_{p\mu}\colon p,\mu=1,2,\dots,N\}$ *— перед соотношением* (2.3).

Доказательство. Подставляем выражения (2.3) в представление (2.4) леммы 4, собираем вместе коэффициенты при каждом из квадратов z_ν^2 $(\nu=1,2,\dots,N)$ и каждом произведении $z_s z_m$ $(s,m=1,2,\dots,N,\ \ s\ne m)$ и после выполнения элементарных преобразований приходим к выражению (2.6). □

Замечание 1. Коэффициенты в представлении (2.6) не зависят от конкретного значения радиуса R круга $x^2+y^2\le R^2$, выбранного в соответствии с тем, как было указано выше.

3. Основной результат

Переходим к изучению величины (1.1). Прежде всего покажем, что для нахождения величины (1.1) достаточно найти точную верхнюю грань только по границе множества $\mathfrak{M}^N$, т. е. по единичной сфере $\mathbb{S}^N = \big\{z\in\mathbb{R}^N\colon \sum_{j=1}^N |z_j|^2 = 1\big\}$. Для этого мы будем использовать следующий известный результат.

Теорема 1 [14, p. 74]. *Пусть X — локально выпуклое вещественное пространство и $H\subset X$ — компактное выпуклое подмножество. Если вогнутая функция $f: H\to\mathbb{R}$ полунепрерывна снизу на H, то она достигает минимума на H в некоторой его крайней точке.*

Согласно определению (см., например, [14, p. 32]) точка $t\in H$ называется *крайней* точкой выпуклого множества H, если она не является серединой никакого отрезка, принадлежащего множеству H. Также известно, что если из выпуклого множества удалить его крайние точки, то получившееся множество остается выпуклым. Функция f называется вогнутой, если $-f$ является выпуклой.

На множестве интерполируемых данных $\mathfrak{M}^N$ определяем функцию

$$f_N(z) = \inf\big\{\|\Delta u\|_2\colon u\in K_N(z)\big\}.$$

Лемма 6. *Функция $f_N(z)$ является выпуклой на множестве $\mathfrak{M}^N$.*

Доказательство. Пусть z', $z'' \in \mathfrak{M}^N$ — два произвольных набора интерполируемых данных. Поскольку $N \geq 3$ и все точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ не лежат на одной прямой, существуют интерполяционные натуральные сплайны двух переменных $u_1 \in K_N(z')$ и $u_2 \in K_N(z'')$ такие, что $f_N(z') = \|\Delta u_1\|_2$ и $f_N(z'') = \|\Delta u_2\|_2$.

Для $0 \leq \alpha < 1$ полагаем $\widetilde{u} = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2$. Тогда

$$\widetilde{u}(x_j, y_j) = \alpha\ u_1(x_j, y_j) + (1-\alpha)\ u_2(x_j, y_j) = \alpha z'_j + (1-\alpha) z''_j \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$$

и $\widetilde{u} \in K_N(\alpha z' + (1-\alpha)z'')$. Применив неравенство треугольника, получаем

$$f_N(\alpha z' + (1-\alpha)z'') = \inf\left\{\|\Delta u\|_2 \colon u \in K_N(\alpha z' + (1-\alpha)z'')\right\} \leq \|\Delta\widetilde{u}\|_2$$

$$\leq \alpha\ \|\Delta u_1\|_2 + (1-\alpha)\ \|\Delta u_2\|_2 = \alpha f_N(z') + (1-\alpha) f_N(z''). \qquad \square$$

Лемма 7. *Функция $f_N(z)$ непрерывна на $\mathfrak{M}^N$.*

Доказательство. Пусть z', $z'' \in \mathfrak{M}^N$ и $\left(\sum_{j=1}^N |z'_j - z''_j|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon\ \forall\varepsilon > 0$. В силу непрерывности линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, определенного матрицей (1.5), имеем

$$\left(\sum_{j=1}^N |d'_j - d''_j|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Поскольку $N \geq 3$ и все точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ не лежат на одной прямой, найдутся натуральные сплайны u_1, u_2 из соответствующих классов интерполирующих функций такие, что $f_N(z') = \|\Delta u_1\|_2$ и $f_N(z'') = \|\Delta u_2\|_2$. Тогда

$$|f_N(z') - f_N(z'')| = \left|\inf_{u\in K_N(z')} \|\Delta u\|_2\ -\ \inf_{u \in K_N(z'')} \|\Delta u\|_2\right| = \Big|\|\Delta u_1\|_2 - \|\Delta u_2\|_2\Big| \leq \|\Delta u_1 - \Delta u_2\|_2$$

$$= \|\Delta(u_1 - u_2)\|_2 = \frac{1}{4\pi}\left\|\sum_{j=1}^N (d'_j - d''_j)\ \ln\left[(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2\right]\right\|_2$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\sum_{j=1}^N |d'_j - d''_j|^2\ q_{jj} + 2\sum_{\substack{j,k=1\\ j>k}}^N (d'_j - d''_j)(d'_k - d''_k)\ |q_{jk}|\right)^{1/2}$$

$$\leq C_1\left(\sum_{j=1}^N |d'_j - d''_j|^2\right)^{1/2} \leq C_1\varepsilon,$$

где $C_1 > 0$ — некоторая абсолютная константа. Выше мы воспользовались леммой 4 и тем фактом, что коэффициенты $\{q_{jk}\}_{j,k=1}^N$ не зависят от интерполируемых данных. $\square$

Лемма 8. *Функция $f_N(z)$ достигает точной верхней грани по множеству $\mathfrak{M}^N$ на его границе — сфере $\mathbb{S}^N$.*

Доказательство. Согласно леммам 6 и 7 выпуклая на компактном множестве $\mathfrak{M}^N$ функция $f_N(z)$ является непрерывной на нем и, в частности, полунепрерывной сверху и снизу. Поэтому вогнутая функция $F_N(z) = -f_N(z)$ полунепрерывна снизу на $\mathfrak{M}^N$. В теореме 1 полагаем $X = \mathbb{R}^N$, $H = \mathfrak{M}^N$ и получаем, что функция $F_N(z)$ достигает минимума на $\mathfrak{M}^N$ в некоторой его крайней точке. Следовательно, в той же крайней точке функция $f_N(z)$ достигает максимума. Остается заметить, что в конечномерном евклидовом пространстве множество крайних точек шара совпадает с его границей. $\square$

Переходим непосредственно к основному результату работы.

Теорема 2. *Пусть $N \geq 3$ и все точки интерполяции $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ не лежат на одной прямой. Тогда*

$$\mathfrak{B}_N = \sup_{z \in \mathfrak{M}^N} \inf_{u \in K_N(z)} \|\Delta u\|_2 = \sqrt{\lambda_N},$$

где λ_N — максимальное собственное значение матрицы квадратичной формы (2.6).

Доказательство. При выполнении условий теоремы 2 единственным решением задачи (1.2) для любого набора интерполируемых данных $z \in \mathfrak{M}^N$ является натуральный сплайн двух переменных $S_N(x, y)$ вида (1.3), удовлетворяющий условиям (1.4). Ввиду леммы 5 для L_2-нормы оператора Лапласа, примененного к $S_N(x, y)$, имеет место представление (2.6). Правая часть этого представления является некоторой квадратичной формой от интерполируемых значений $\{z_j\}_{j=1}^N$, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}^N$. В силу леммы 8 точная верхняя грань этой квадратичной формы по множеству $\mathfrak{M}^N$ достигается на его границе — сфере $\mathbb{S}^N$. Хорошо известно (см., например, [13, с. 476–477]), что максимум квадратичной формы на сфере $\mathbb{S}^N$ равен максимальному собственному значению λ_N ее матрицы. Остается заметить, что матрица положительной квадратичной формы имеет только положительные собственные значения.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 30–60.
2. **Субботин Ю.Н., Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225 .
3. **Favard J.** Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no. 9. P. 281–306.
4. **de Boor C.** How small can one make the derivatives of an interpolating function? // J. Approx. Theory, 1975. Vol. 13, no. 2. P. 105–116. doi: 10.1016/0021-9045(75)90043-X .
5. **de Boor C.** On "best" interpolation // J. Approx. Theory. 1976. Vol. 16, no. 1. P. 28–42. doi: 10.1016/0021-9045(76)90093-9 .
6. **Певный А.Б.** Натуральные сплайны двух и трех переменных // Методы вычислений: сб. ст. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1985. Вып. 14: Кубатурные формулы и функциональные уравнения / под ред. И. П. Мысовских. С. 160–170.
7. **Смоляк С.А.** Оптимальное восстановление функций и связанные с ним геометрические характеристики множеств // Тр. 3-й зимней школы по мат. программированию. М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1971. С. 509–557.
8. **Duchon J.** Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces // RAIRO Anal. Numer. 1976. Vol. 10, no. R3. P. 5–12.
9. **Arcangeli R., de Silanes M.C., Torrens Ju.** Multidimensinal minimizing splines. Theory and applications. NY etc.: Kluwer Acad. Publ., 2004. 261 p.
10. **Buhmann M.D.** Radial basis functions // Acta Numer. 2000. Vol. 9. P. 1–38.
11. **Buhmann M.D.** Radial basis functions: Theory and implementations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. 259 p. (Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math.; № 12). doi: 10.1017/CBO9780511543241 .
12. **Mehri B., Jokar S.** Lebesgue function for multivariate interpolation by radial basis functions // Appl. Math. Comput. 2007. Vol. 187, no. 1. P. 306–314. doi: 10.1016/j.amc.2006.08.127 .
13. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
14. **Holmes R.** Geometric functional analysis and its applications. NY ect.: Springer Verlag, 1975. 246 p.

Поступила 19.08.2022
После доработки 1.09.2022
Принята к публикации 5.09.2022

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. Functional interpolation in the mean with smallest n derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 31–63.
2. Subbotin Yu.N., Novikov S.I., Shevaldin V.T. Extremal functional interpolation and splines. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 200–225 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225 .
3. Favard J. Sur l'interpolation. *J. Math. Pures Appl.*, 1940, vol. 19, no. 9, pp. 281–306.
4. de Boor C. How small can one make the derivatives of an interpolating function? *J. Approx. Theory*, 1975, vol. 13, no. 2, pp. 105–116. doi: 10.1016/0021-9045(75)90043-X .
5. de Boor C. On "best" interpolation *J. Approx. Theory*, 1976, vol. 16, no. 1, pp. 28–42. doi: 10.1016/0021-9045(76)90093-9 .
6. Pevnyi A.B. Natural splines of two and three variables. *Metody Vychisl.*, 1985, vol. 14, pp. 160–170 (in Russian).
7. Smolyak S.A. Optimal recovery of functions and related geometric characteristics of sets. *Proc. 3th Winter Workshop on Mathematical Programming*, Moscow: TsEMI AN SSSR Publ., 1971, pp. 509–557 (in Russian).
8. Duchon J. Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. *RAIRO Anal. Numer.*, 1976, vol. 10, no. R3, pp. 5–12. doi: 10.1051/m2an/197610R300051 .
9. Arcangeli R., de Silanes M.C., Torrens Ju. *Multidimensional minimizing splines. Theory and Applications.* N.Y. etc.: Kluwer Acad. Publ., 2004, 261 p. ISBN: 1402077866 .
10. Buhmann M.D. Radial basis functions. *Acta Numer.*, 2000, vol. 9, pp. 1–38. doi: 10.1017/S0962492900000015 .
11. Buhmann M.D. Radial basis functions: theory and implementations. Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., no. 12. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003, 259 p. ISBN: 0521633389 .
12. Mehri B., Jokar S. Lebesgue function for multivariate interpolation by radial basis functions. *Appl. Math. Comput.*, 2007, vol. 187, no. 1, pp. 306–314. doi: 10.1016/j.amc.2006.08.127 .
13. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 1. Moscow: Nauka Publ., 1970, 608 p.
14. Holmes R.B. *Geometric functional analysis and its applications.* NY: Springer, 1975, 246 p. doi: 10.1007/978-1-4684-9369-6 .

Received August 19, 2022
Revised September 1, 2022
Accepted September 5, 2022

Sergey Igorevich Novikov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Cite this article as: S. I. Novikov. On an interpolation problem with the smallest L_2-norm of the Laplace operator. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 143–153 .