ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 519.65

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ СОБОЛЕВА В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ[1]

Ю. В. Малыхин

Рассматривается поперечник класса Соболева 2π-периодических функций с $\|f^{(r)}\|_\infty \leqslant 1$ относительно множества функций g, таких что $\|g^{(r)}\|_\infty \leqslant M$ в равномерной метрике: $K_n := K_n(W^r_\infty, MW^r_\infty, L_\infty)$. Доказана оценка снизу на K_n при $M = 1+\varepsilon$ с малым ε. Эта оценка вместе с более ранними результатами завершает исследование о поведении величин K_n.

Ключевые слова: колмогоровские и относительные поперечники

Yu. V. Malykhin. A complete description of the relative widths of Sobolev classes in the uniform metric.

We consider the width of the Sobolev class of 2π-periodic functions with $\|f^{(r)}\|_\infty \leqslant 1$ with respect to the set of functions g such that $\|g^{(r)}\|_\infty \leqslant M$ in the uniform metric $K_n := K_n(W^r_\infty, MW^r_\infty, L_\infty)$. We prove a lower bound on K_n for $M = 1+\varepsilon$ with small ε. This bound together with earlier results completes the analysis of the behaviour of K_n.

Keywords: Kolmogorov and relative widths.

MSC: 41A46

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-137-142

1. Введение

В творчестве С. А. Теляковского и Ю. Н. Субботина есть общий сюжет — относительные поперечники. По этой теме ими написано несколько совместных статей.

Пусть X — нормированное пространство. Относительным n-мерным поперечником множества $W \subset X$ относительно множества $V \subset X$ называется величина

$$K_n(W, V, X) := \inf_{L_n} E(W, L_n \cap V)_X,$$

где L_n — линейные подпространства X размерности n, а E — уклонение:

$$E(W, U)_X := \sup_{w\in W} \inf_{u\in U} \|w - u\|_X.$$

Обычный колмогоровский поперечник $d_n(W, X)$ соответствует случаю $V = X$. Очевидно, что $K_n(W, V, X) \geqslant d_n(W, X)$.

Рассмотрим классы Соболева W^r_∞ ($r \in \mathbb{N}$), состоящие из 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таких что $f, f', \dots, f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны и $\|f^{(r)}\|_\infty \leqslant 1$. Нас интересует приближение этих классов в равномерной метрике. Колмогоровские поперечники хорошо известны [1]:

$$d_{2n}(W^r_\infty, L_\infty) = d_{2n-1}(W^r_\infty, L_\infty) = \mathcal{K}_r n^{-r}.$$

Константы Фавара $\mathcal{K}_r$ равномерно ограничены и отделены от нуля: $\pi^2/8 = \mathcal{K}_2 \leqslant \mathcal{K}_r \leqslant \mathcal{K}_1 = \pi/2$.

[1]Исследование выполнено в МГУ имени М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00129).

В данной работе рассматриваются относительные поперечники W^r_∞ относительно множеств MW^r_∞, $M \geqslant 1$. Другими словами, мы аппроксимируем W^r_∞ линейными пространствами и требуем, чтобы приближающие функции удовлетворяли условию $\|g^{(r)}\|_\infty \leqslant M$. Поведение относительных поперечников в этом случае описывается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 3$, $M \geqslant 1$; положим $K_n := K_n(W^r_\infty, MW^r_\infty, L_\infty)$ для $n \in \mathbb{N}$.*

1) *Если $M = 1$, то $c_1(r)n^{-2} \leqslant K_n \leqslant c_2(r)n^{-2}$. То же верно при $M \leqslant 1 + 1/n^2$.*

2) *Если $M = 1 + \varepsilon$, где $1/n^2 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, то*

$$c_1(r)n^{-r}\varepsilon^{1-r/2} \leqslant K_n \leqslant c_2(r)n^{-r}\varepsilon^{1-r/2}. \tag{1}$$

3) *При $M > 1$ и $n \geqslant \delta_1^{-1}$, где $\delta_1 := \exp(-c_1 M)$, имеем*

$$K_{2n} \geqslant \frac{1}{8}(1+\delta_1)^r n^{-r}. \tag{2}$$

4) *При $M \geqslant 2$ и $n \geqslant C\delta_2^{-1}$, где $\delta_2 := \exp(-c_2 M)$, имеем*

$$K_{2n-1} \leqslant \mathcal{K}_r(1 + C\delta_2)^r n^{-r}. \tag{3}$$

5) *При $M = (4/\pi^2)\ln\min(n,r) + C$ поперечник K_n равен колмогоровскому поперечнику $d_n(W^r_\infty, L_\infty)$.*

Здесь c_1, c_2, C — положительные абсолютные постоянные; $c_1(r)$, $c_2(r)$ — положительные числа, зависящие только от r.

Случай $M = 1$, с которого и началось исследование относительных поперечников, был изучен В. Н. Коноваловым в работе [2]. Им был обнаружен интересный эффект порядкового отличия относительного ($K_n \asymp n^{-2}$) и колмогоровского ($d_n \asymp n^{-r}$) поперечников, а также приведено общее определение относительного поперечника. (Обозначение $K_n(W, V, X)$ было предложено в [3].) Позже простое и изящное доказательство результата Коновалова было дано В. М. Тихомировым [4].

В. Ф. Бабенко [5] с помощью приближения сплайнами доказал, что при любом $M > 1$ порядки колмогоровских и относительных поперечников совпадают: $K_n \asymp d_n \asymp n^{-r}$, тем самым ответив на вопрос С. Б. Стечкина.

"Фазовый переход" между случаями $M = 1$ и $M > 1$ описывается формулой (1). Верхняя оценка была получена в [5].

Ю. Н. Субботин и С. А. Теляковский в работе [3] показали, что при

$$M = (4/\pi^2)\ln\min(n,r) + C$$

относительные и колмогоровские поперечники в точности совпадают. Это потребовало весьма тонких оценок норм производных ядер Фавара. Вопрос о том, можно ли в качестве M взять абсолютную постоянную, оставался открытым.

Отрицательный ответ на этот вопрос был дан в работе автора [6], где были доказаны неравенства (2) и (3). Из (2), например, следует, что если $M = c\ln r$, где c достаточно мало, то при достаточно больших r имеем $\varliminf\limits_{n\to\infty} K_n/d_n \geqslant \exp(\sqrt{r})$.

В настоящей работе мы устраняем оставшийся пробел и доказываем нижнюю оценку в формуле (1). Наше доказательство следует идеям из упомянутой работы Тихомирова.

Отметим, что при $r = 1, 2$, как показал Коновалов [2], относительный поперечник совпадает по порядку с колмогоровским уже при $M = 1$.

2. Доказательство

Для простоты обозначений мы работаем с 1-периодическими функциями вместо 2π-периодических. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 3$. Предположим, ε достаточно мало и $\varepsilon n^2 \geqslant 1$, докажем, что

$$K_n(W^r_\infty, (1+\varepsilon)W^r_\infty, L_\infty) \geqslant c(r) n^{-r} \varepsilon^{1-r/2}.$$

Пусть Q_n — некоторое приближающее пространство. Оценим уклонение, используя двойственность и интегрирование по частям (см. [6]):

$$E := E\bigl(W^r_\infty, Q_n \cap (1+\varepsilon)W^r_\infty, L_\infty\bigr) = \sup_{\|g\|_1 \leqslant 1} \left(\sup_{f \in W^r_\infty} \langle f, g\rangle - \sup_{h \in Q_n \cap (1+\varepsilon) W^r_\infty} \langle h, g\rangle \right)$$

$$= \sup_{\|G^{(r)}\|_1 \leqslant 1} \left(E(G)_1 - (1+\varepsilon) \sup_{u \in Q_n^{(r)}, \|u\|_\infty \leqslant 1} \langle u, G\rangle \right).$$

Здесь $E(G)_1$ есть наилучшее приближение функции константами, а $Q_n^{(r)}$ состоит из r-х производных функций из Q_n.

Положим $m := \lfloor A n \varepsilon^{1/2} \rfloor$, где A — положительная абсолютная постоянная, которую подберем позже. Мы построим функцию G со свойствами

(i) $E(G)_1 = \|G\|_1$,

(ii) $\|G^{(r)}\|_1 \leqslant C_r \|G\|_1 m^r$,

(iii) $\langle u, G\rangle \leqslant (1-2\varepsilon)\|G\|_1$ для $u \in Q_n^{(r)}$, $\|u\|_\infty \leqslant 1$.

Заметим, что из свойств (i), (ii) и (iii) вытекает нужная нам оценка. Действительно, нормируем функцию G условием $\|G^{(r)}\|_1 = 1$, получим

$$E \geqslant E(G)_1 - (1+\varepsilon)\sup\langle u, G\rangle \geqslant \|G\|_1 - (1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)\|G\|_1$$

$$\geqslant \varepsilon \|G\|_1 \geqslant C_r^{-1} \varepsilon m^{-r} \asymp n^{-r} \varepsilon^{1-r/2}.$$

Начнем с того, что построим функцию $s = \operatorname{sign} G$. Разобьем $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на m равных отрезков; на каждом из них возьмем s равной некоторому знаку на левой половине и противоположному знаку на правой:

$$s_\tau(x) := \sum_{k=0}^{m-1} \tau_k \Bigl(\chi_{(\frac{k}{m}, \frac{k+1/2}{m})}(x) - \chi_{(\frac{k+1/2}{m}, \frac{k+1}{m})}(x) \Bigr), \quad \tau = (\tau_0, \ldots, \tau_{m-1}) \in \{-1, 1\}^m.$$

Чуть позже мы докажем, что существует набор знаков τ и сдвиг $\theta \in \mathbb{T}$, такие что

$$\inf_{u \in Q_n^{(r)}} \|s_\tau(x-\theta) - u(x)\|_2 \geqslant c\sqrt{\frac{m}{n}}. \tag{4}$$

Предположим пока, что неравенство (4) выполнено; для простоты обозначений считаем $\theta = 0$ в нем. Построим функцию G, $\operatorname{sign} G = s_\tau$, удовлетворяющую условиям (i)–(iii).

Зафиксируем бесконечно-гладкую 1-периодическую функцию φ, такую что

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 0.1, \\ 1, & 0.2 \leqslant x \leqslant 0.3, \\ 0.5 - x, & 0.4 \leqslant x \leqslant 0.6, \\ -1, & 0.7 \leqslant x \leqslant 0.8, \\ x - 1, & 0.9 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

и $1/10 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ на $[0.1, 0.4]$, $-1 \leqslant \varphi(x) \leqslant -1/10$ на $[0.6, 0.9]$.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{G}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \tau_k \varphi(mx-k) \chi_{(\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m})}(x).$$

Ясно, что $\operatorname{sign} \widetilde{G} = s_\tau$, однако в точках $(k+1)/m$, в которых $\tau_k \tau_{k+1} = -1$, происходит разрыв производной; исправим это. Мы имеем $\widetilde{G}(x) = -\tau_k$ при $mx \in [k+0.7, k+0.8]$ и $\widetilde{G}(x) = \tau_{k+1} = -\tau_k$ при $mx \in [k+1.2, k+1.3]$. Сделаем функцию константой на проблемном участке: $G(x) := -\tau_k$ при $mx \in [k+0.7, k+1.3]$. Проделав это для всех проблемных k, получим искомую функцию G (в остальных точках $G(x) = \widetilde{G}(x)$). Проверим выполнение условий.

Условие (i) следует из того, что $\operatorname{sign} G = s_\tau \perp \{\mathrm{const}\}$ (см., например, [7, § 10]).

Условие (ii) следует из того, что в каждой точке x либо $G^{(r)}(x) = 0$, либо $G^{(r)}(x) = \pm m^r \varphi^{(r)}(x')$ для некоторой точки x', поэтому $\|G^{(r)}\|_1 \leqslant \|G^{(r)}\|_\infty \leqslant C_r m^r$. В то же время $\|G\|_1 \geqslant 0.2$.

Для дальнейшего нам понадобятся множества $U_\gamma := \{x\colon |G(x)| \leqslant \gamma\}$. Заметим, что G имеет не более $2m$ нулей, $|G(x)| < 1/10$ только в окрестности этих нулей, причем $|G'| = m$ в этих окрестностях. Следовательно, при $\gamma < 1/10$ имеем $\mu(U_\gamma) \leqslant 2m \cdot 2\gamma/m = 4\gamma$.

Проверим (iii). Пусть $u \in Q_n^{(r)}$, $\|u\|_\infty \leqslant 1$. Тогда

$$\|G\|_1 - \langle u, G\rangle = \int G(\operatorname{sign} G - u) = \int G(s_\tau - u) = \int |G|\psi,$$

где $\psi = |s_\tau - u|$. Заметим, что $0 \leqslant \psi \leqslant 2$, и в силу (4) $\int \psi \geqslant (1/2) \int \psi^2 \geqslant \delta := c_1 m/n$.

Оценим снизу интеграл $\int |G|\psi$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\int |G|\varphi \to \min, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2, \quad \int \varphi \geqslant \delta.$$

Экстремальная функция φ^* имеет вид $\varphi^*(x) = 2$ на подходящем множестве U меры $\delta/2$ и $\varphi^*(x) = 0$ — в остальных точках. Имеем

$$\mu(U_{\delta/16}) \leqslant \frac{1}{4}\delta \leqslant \frac{1}{4}\int \varphi^* = \frac{1}{2}\mu(U).$$

Следовательно, $|G| > \delta/16$ на половине носителя φ^*, откуда

$$\|G\|_1 - \langle u, G\rangle = \int |G|\psi \geqslant \int |G|\varphi^* \geqslant \Big(\frac{\delta}{16}\Big)\mu(U) \geqslant \frac{\delta^2}{32}.$$

При достаточно большом A (см. определение m) имеем $\delta \geqslant 10\varepsilon^{1/2}$, откуда

$$\frac{\delta^2}{32} \geqslant 2\varepsilon \geqslant 2\varepsilon\|G\|_1.$$

Свойство (iii) установлено.

Наконец, докажем (4). Пусть $\mathbf{s}$ — функция $x \mapsto s_\tau(x-\theta)$, где все $\tau_k \in \{-1, 1\}$ и $\theta \in \mathbb{T}$ выбраны случайно, равномерно и независимо друг от друга. Нетрудно видеть, что за счет усреднения по θ при любых $j \neq l$ имеем $\mathsf{E}\,\widehat{\mathbf{s}}(j)\overline{\widehat{\mathbf{s}}(l)} = 0$. Известно, что в этом случае справедливо соотношение

$$d_n\big(\{s_\tau(\cdot - \theta)\}_{\tau,\theta}, L_2\big)^2 \geqslant d_n^{\mathrm{avg}}(\mathbf{s}, L_2)_2^2 := \inf_{\dim V_n \leqslant n} \mathsf{E}\rho(\mathbf{s}, V_n)_2^2 = \sum_{j>n} \sigma_j^2, \tag{5}$$

где $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots$ — невозрастающая перестановка последовательности величин $(\mathsf{E}\,|\widehat{\mathsf{s}}(j)|^2)^{1/2}$. Мы используем стандартное обозначение $\widehat{f}(j)$ для коэффициентов Фурье. По поводу обозначения d_n^{avg} см. [8]. Неравенство вида (5) использовалось в работе [9] (оценка снизу была сформулирована для поперечника, но доказывалась для усредненного уклонения).

Вычислим σ^j, положив для краткости $f_k := \chi_{(\frac{k}{m},\frac{k+1/2}{m})} - \chi_{(\frac{k+1/2}{m},\frac{k+1}{m})}$:

$$\mathsf{E}\,|\widehat{\mathsf{s}}(j)|^2 = \mathsf{E}\,|\widehat{s_\tau}(j)|^2 = \mathsf{E}\sum_{k_1=0}^{m-1}\tau_{k_1}\widehat{f_{k_1}}(j)\sum_{k_2=0}^{m-1}\tau_{k_2}\overline{\widehat{f_{k_2}}(j)} = \sum_{k=0}^{m-1}|\widehat{f}_k(j)|^2 = m|\widehat{f}_0(j)|^2 = \frac{4m\sin^4\frac{\pi j}{2m}}{\pi^2 j^2}.$$

Задача свелась к следующей: из последовательности $\{mj^{-2}\sin^4(\pi j/(2m))\}_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ убрали n наибольших чисел, нужно оценить снизу сумму оставшихся. Разобьем множество индексов на пачки $\{j\colon |j| = 2sm + k,\ 1 \leqslant k \leqslant 2m\}$ для $s = 0, 1, \ldots$. Так как всего убрали n чисел, есть не более $n/2m$ пачек, из которых убрали больше половины. Нетрудно видеть, что в каждой из оставшихся пачек сумма чисел не меньше $c(s+1)^{-2}$. Следовательно, оцениваемая сумма не меньше $c\sum_{s>\frac{n}{2m}} s^{-2} \asymp m/n$. Неравенство (4) следует из (5).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихомиров В.М.** Теория приближений // Анализ — 2. Итоги науки и техники. Сер. Современ. проблемы математики. Фундамент. направления. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 14. С. 103–260.
2. **Коновалов В.Н.** Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 3. С. 369–380.
3. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 871–879.
4. **Tikhomirov V.M.** Some remarks on relative diameters // Banach Center Publications. 1989. Т. 22, no. 1. С. 471–474. (Approximation and function spaces: Proc. 27th Semest., Warsaw/Pol. 1986.)
5. **Бабенко В.Ф.** О наилучших равномерных приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 6. С. 24–30.
6. **Малыхин Ю.В.** Относительные поперечники классов Соболева в равномерной и интегральной метриках // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 217–223.
7. **DeVore R.A., Lorentz G.G.** Constructive approximation. Berlin; Heidelberg: Springer, 1993, 452 p. doi: 10.1007/978-3-662-02888-9 .
8. **Malykhin Yuri.** Widths and rigidty [e-resource]. 2022. 33 p. URL: https://arxiv.org/pdf/2205.03453.pdf .
9. **Исмагилов Р.С.** Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 1968. Т. 2, № 2. С. 32–39.

Поступила 7.06.2022
После доработки 24.08.2022
Принята к публикации 29.08.2022

Малыхин Юрий Вячеславович
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Математический Институт имени В. А. Стеклова РАН;
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: malykhin@mi-ras.ru

REFERENCES

1. Tikkomirov V.M. Approximation theory. In: *Analysis II.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 14. Berlin: Springer, 1990, pp. 93–243. doi: 10.1007/978-3-642-61267-1_2 .
2. Konovalov V.N. Estimates of Kolmogorov-type widths for classes of differentiable periodic functions. *Math. Notes*, 1984, vol. 35, no. 3, pp. 193–199. doi: 10.1007/BF01139916 .

3. Subbotin Yu.N., Telyakovskii S.A. Exact values of relative widths of classes of differentiable functions. *Math. Notes*, 1999, vol. 65, no. 6, pp. 731–738. doi: 10.1007/BF02675588 .
4. Tikhomirov V.M. Some remarks on relative diameters. In: *"Approximation and function spaces", Proc. 27th Semest., Warsaw/Pol. 1986*. Banach Center Publications, vol. 22. Warszawa: PWN, 1989, pp. 471–474.
5. Babenko V.F. On best uniform approximations by splines in the presence of restrictions on their derivatives. *Math. Notes*, 1991, vol. 50, no. 6, pp. 1227–1232. doi: 10.1007/BF01158262 .
6. Malykhin Yu.V. Relative widths of Sobolev classes in the uniform and integral metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, pp. 209–215. doi: 10.1134/S0081543816040155 .
7. DeVore R.A., Lorentz G.G. *Constructive approximation.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1993, 452 p. doi: 10.1007/978-3-662-02888-9 .
8. Malykhin Yuri. *Widths and rigidty* [e-resource]. 2022. 33 p. Available on: https://arxiv.org/pdf/2205.03453.pdf .
9. Ismagilov R.S. On n-dimensional diameters of compacts in a Hilbert space. *Funct. Anal. Appl.*, 1968, vol. 2, no. 2, pp. 125–132. doi: 10.1007/BF01075946 .

Received June 7, 2022
Revised August 24, 2022
Accepted August 29, 2022

Funding Agency: This research was carried out at Lomonosov Moscow State University with the financial support of the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00129).

Yuriy Vyacheslavovich Malykhin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences; Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: malykhin@mi-ras.ru .

Cite this article as: Yu. V. Malykhin. A complete description of the relative widths of Sobolev classes in the uniform metric. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 137–142 .