ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА — СЕГЕ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_0 С КОНСТАНТОЙ БОЛЬШЕЙ, ЧЕМ КЛАССИЧЕСКАЯ[1]

А. О. Леонтьева

Во множестве $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов f_n порядка n с комплексными коэффициентами рассматривается производная Вейля (дробная производная) $f_n^{(\alpha)}$ вещественного неотрицательного порядка α. Изучается точная константа $B_n(\alpha,\theta)_p$ в неравенстве Бернштейна — Сеге $\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta+\tilde f_n^{(\alpha)}\sin\theta\|_p\leqslant B_n(\alpha,\theta)_p\|f_n\|_p$. Такие неравенства исследуются уже больше 90 лет. Известно, что при $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\alpha\geqslant 1$ и $\theta\in\mathbb{R}$ константа имеет классическое значение $B_n(\alpha,\theta)_p=n^\alpha$. Случай $p=0$ интересен как минимум по той причине, что константа $B_n(\alpha,\theta)_0$ является наибольшей по p при $p\in[0,\infty]$. В. В. Арестов доказал, что при $r\in\mathbb{N}$ неравенство Бернштейна в L_0 выполняется с константой $B_n(r,0)_0=n^r$, а константа $B_n(\alpha,\pi/2)_0$ в неравенстве Сеге в L_0 с ростом n ведет себя как $4^{n+o(n)}$. В 1994 г. В. В. Арестов, а в 2014 В. В. Арестов и П. Ю. Глазырина изучали вопрос об условиях на параметры n и α, при которых константа в неравенстве Бернштейна — Сеге принимает классическое значение n^α. Недавно автором была доказана гипотеза В. В. Арестова и П. Ю. Глазыриной о том, что при $\alpha\geqslant 2n-2$ при всех $\theta\in\mathbb{R}$ неравенство Бернштейна — Сеге выполняется с константой n^α. Открытым остается вопрос о точности границы $\alpha=2n-2$, точнее говоря, вопрос о точной константе при $\alpha<2n-2$. В данной статье доказано, что для любого $0\leqslant\alpha<n$ найдется $\theta^*(\alpha)$ такое, что $B_n(\alpha,\theta^*(\alpha))_0>n^\alpha$.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы, производная Вейля, неравенство Бернштейна — Сеге, пространство L_0.

A. O. Leont'eva. Bernstein–Szegő inequality for trigonometric polynomials in the space L_0 with a constant greater than classical.

In the set $\mathscr{T}_n$ of trigonometric polynomials f_n of order n with complex coefficients, the Weyl derivative (fractional derivative) $f_n^{(\alpha)}$ of real nonnegative order α is considered. The exact constant $B_n(\alpha,\theta)_p$ in Bernstein–Szegő inequality $\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta+\tilde f_n^{(\alpha)}\sin\theta\|_p\leqslant B_n(\alpha,\theta)_p\|f_n\|_p$ is analyzed. Such inequalities have been studied for more than 90 years. It is known that, for $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\alpha\geqslant 1$, and $\theta\in\mathbb{R}$, the constant takes the classical value $B_n(\alpha,\theta)_p=n^\alpha$. The case $p=0$ is of interest at least because the constant $B_n(\alpha,\theta)_0$ takes the maximum value in p for $p\in[0,\infty]$. V. V. Arestov proved that, for $r\in\mathbb{N}$, the Bernstein inequality in L_0 holds with the constant $B_n(r,0)_0=n^r$, and the constant $B_n(\alpha,\pi/2)_0$ in the Szegő inequality in L_0 behaves as $4^{n+o(n)}$. V. V. Arestov in 1994 and V. V. Arestov and P. Yu. Glazyrina in 2014 studied the question of conditions on the parameters n and α under which the constant in the Bernstein–Szegő inequality takes the classical value n^α. Recently, the author has proved Arestov and Glazyrina's conjecture that the Bernstein–Szegő inequality holds with the constant n^α for $\alpha\geqslant 2n-2$ and all $\theta\in\mathbb{R}$. The question about the exactness of the bound $\alpha=2n-2$, more precisely, the question of the best constant for $\alpha<2n-2$ remans open. In the present paper, we prove that for any $0\leqslant\alpha<n$ one can find $\theta^*(\alpha)$ such that $B_n(\alpha,\theta^*(\alpha))_0>n^\alpha$.

Keywords: trigonometric polynomials, Weyl derivative, Bernstein–Szegő inequality, space L_0.

MSC: 41A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-128-136

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2022-874).

1. Введение. Основной результат

1.1. Обозначения

Пусть $\mathscr{T}_n = \mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ — множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \tag{1.1}$$

порядка n с комплексными коэффициентами. Вместе с полиномом (1.1) будем рассматривать полином

$$\tilde{f}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos kt - a_k \sin kt) = i \sum_{k=-n}^{n} c_k (\operatorname{sign} k) e^{ikt},$$

который называют сопряженным для f_n.

При $0 \leqslant p \leqslant \infty$ рассмотрим на $\mathscr{T}_n$ функционалы

$$\|f_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|f_n\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f_n\|_p = \|f_n\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f_n(t)| \colon t \in \mathbb{R}\},$$

$$\|f_n\|_0 = \lim_{p \to +0} \|f_n\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f_n(t)| dt \right);$$

только при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ эти функционалы являются нормами.

Для вещественного $\alpha \geqslant 0$ *дробной производной*, или *производной Вейля* порядка α полинома (1.1), называется (см. [17, а также 11, гл. 4, § 19]) полином

$$D^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k |k|^\alpha e^{i\frac{\pi\alpha}{2}\operatorname{sign} k} e^{ikt}.$$

При $\alpha \in \mathbb{N}$ производная Вейля совпадает с классической производной: $D^\alpha f_n = f_n^{(\alpha)}$. В случае $\alpha = 0$ оператор D^0 удаляет свободный член полинома: $D^0 f_n(t) = f_n(t) - (a_0/2)$. Для производных Вейля выполняется полугрупповое свойство $D^\beta D^\alpha = D^{\alpha+\beta}, \alpha,\ \beta \geqslant 0$. В дальнейшем будем для вещественного $\alpha \geqslant 0$ вместо $D^\alpha f_n$ писать $f_n^{(\alpha)}$.

Для вещественного θ рассмотрим оператор

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = f_n^{(\alpha)}(t) \cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)}(t) \sin\theta$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right)\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k |k|^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)\operatorname{sign} k} e^{ikt}; \tag{1.2}$$

будем называть его *оператором Вейля — Сеге*. Нас интересует норма оператора (1.2) в пространстве $\mathscr{T}_n$ относительно функционала $\|\cdot\|_p$, а точнее, наименьшая константа $B_n(\alpha,\theta)_p$ в неравенстве

$$\|D_\theta^\alpha f_n\|_p \leqslant B_n(\alpha,\theta)_p \|f_n\|_p, \quad f_n \in \mathscr{T}_n. \tag{1.3}$$

Неравенства такого типа называются *неравенствами Бернштейна — Сеге*, при $\theta = 0$ — *неравенствами Бернштейна*, при $\theta = \pi/2$ — *неравенствами Сеге*.

Для константы $B_n(\alpha,\theta)_p$ в (1.3) справедливы неравенства

$$B_n(\alpha,\theta)_p \leqslant B_n(\alpha,\theta)_\infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

$$n^{\alpha} = B_n(\alpha,\theta)_2 \leqslant B_n(\alpha,\theta)_p \leqslant B_n(\alpha,\theta)_0, \quad 0 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{1.4}$$

Первое из них — известное свойство операторов свертки, последнее доказано В. В. Арестовым [3]. Тот факт, что величина $B_n(\alpha,\theta)_p$ принимает наибольшее значение по $p \in [0,\infty]$ при $p = 0$, есть одна из причин того, что случай $p = 0$ имеет в этой тематике большое значение.

История исследования неравенств (1.3) подробно описана в [2; 5–7; 14–16]. Наиболее полно эти неравенства изучены при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\alpha \geqslant 1$. В этом случае для любого вещественного θ выполняется точное неравенство

$$\big\| f_n^{(\alpha)} \cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)} \sin\theta \big\|_p \leqslant n^{\alpha} \|f_n\|_p, \quad f_n \in \mathscr{T}_n. \tag{1.5}$$

Вопрос о том, когда неравенство (1.5) выполняется при $0 \leqslant p < 1$ с той же константой n^{α}, оказался сложным. Ниже в подразделе 1.2 будут изложены известные автору результаты по этому вопросу. Именно этой теме посвящена данная статья.

1.2. Неравенства Бернштейна и Сеге в пространстве L_0. Гипотезы В. В. Арестова и П. Ю. Глазыриной

В. В. Арестов [1–3] создал новый метод исследования экстремальных задач для алгебраических многочленов на единичной окружности и, что то же самое в силу формулы

$$f_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}), \tag{1.6}$$

для тригонометрических полиномов на периоде относительно широкого класса “норм”, в том числе в пространствах L_p, $0 \leqslant p \leqslant \infty$. В [1; 2] при помощи этого метода он доказал, что для любого $0 \leqslant p \leqslant \infty$ во множестве тригонометрических полиномов $\mathscr{T}_n$ выполняется точное неравенство Бернштейна $\|f_n'\|_p \leqslant n\|f_n\|_p$, $f_n \in \mathscr{T}_n$. Отсюда следует, что во множестве тригонометрических полиномов $\mathscr{T}_n$ для целого неотрицательного r точное неравенство Бернштейна

$$\|f_n^{(r)}\|_p \leqslant n^r \|f_n\|_p, \quad f_n \in \mathscr{T}_n, \tag{1.7}$$

выполняется не только в классическом случае $1 \leqslant p \leqslant \infty$, но и в случае $0 \leqslant p < 1$.

В [4] В. В. Арестов показал, что в неравенстве Сеге для производной неотрицательного целого порядка r сопряженных тригонометрических полиномов в пространстве L_0

$$\big\| \tilde{f}_n^{(r)} \big\|_0 \leqslant B_n(r,\pi/2)_0 \, \|f\|_0 \,, \quad f_n \in \mathscr{T}_n, \tag{1.8}$$

ситуация иная в сравнении с неравенством Бернштейна (1.7). А именно, при фиксированном целом неотрицательном r константа в неравенстве Сеге ведет себя следующим образом: $B_n(r,\pi/2)_0 = 4^{n+o(n)}$ при $n \to \infty$. Таким образом, она растет существенно быстрее, чем константа n^r в неравенстве Бернштейна (1.7) для $r \in \mathbb{N}$ в L_0. Здесь же был изучен вопрос о таких значениях параметров r и n, при которых неравенство (1.8) для производной сопряженного полинома выполнялось бы с классической константой $B_n(r,\pi/2)_0 = n^r$. Было отмечено, что для этого достаточно выполнения неравенства $r \geqslant n \ln 2n$.

В 1994 г. В. В. Арестов в результате экспериментов на ПК высказал следующую гипотезу относительно константы $B_n(r,\pi/2)_0$ в неравенстве (1.8): *для того чтобы неравенство Сеге (1.8) в L_0 для производной порядка $r \in \mathbb{N}$ сопряженного полинома порядка n выполнялось с константой n^r, необходимо и достаточно, чтобы $r \geqslant 2n - 2$.*

Следуя [7], для $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$ обозначим через $\alpha_n(\theta)$ наименьшее неотрицательное вещественное число такое, что при $\alpha \geqslant \alpha_n(\theta)$ неравенство Бернштейна — Сеге выполнялось бы с классической константой $B_n(\alpha,\theta)_0 = n^{\alpha}$:

$$\big\| f_n^{(\alpha)} \cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)} \sin\theta \big\|_0 \leqslant n^{\alpha} \|f_n\|_0, \quad f_n \in \mathscr{T}_n, \tag{1.9}$$

при $\alpha \geqslant \alpha_n(\theta)$. В 2014 г. В. В. Арестов и П. Ю. Глазырина (см. [7]) в связи с изучением неравенства Бернштейна — Сеге сформулировали и обосновали для $n = 2$ следующие гипотезы.

Гипотеза 1. Если $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\alpha \geqslant 2n - 2$, то неравенство Бернштейна — Сеге в L_0 для производной порядка α полинома порядка n выполняется с константой n^α при любом θ, т.е. $\alpha_n(\theta) \leqslant 2(n-1)$.

Гипотеза 2. При $\theta = 0$, т. е. для неравенства Бернштейна, имеет место равенство $\alpha_n(0) = 2(n-1)$.

Н. В. Попов в тезисах нескольких докладов за 2017–2021 гг. (см. [10] и приведенную там библиографию) анонсировал результат, который по сути означает, что при $\theta = 0$ для $3 \leqslant n \leqslant 10$ имеет место равенство $\alpha_n(0) = 2n - 2$. Этот результат подтверждает гипотезу 2 при $n \leqslant 10$.

В работе автора [16] была доказана гипотеза 1, т. е. доказано, что неравенство (1.9) выполняется при любом $n \in \mathbb{N}$ и любом $\theta \in \mathbb{R}$ для значений $\alpha \geqslant 2n - 2$. Ниже в теореме 1 будут даны достаточные условия строгого неравенства $B_n(\alpha, \theta)_0 > n^\alpha$.

1.3. Формулировка основного результата

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Для любых $n \geqslant 2$ и $0 \leqslant \alpha < n$ найдется $\theta^* = \theta_n^*(\alpha)$ такое, что*

$$B_n\big(\alpha, \theta^*\big)_0 > n^\alpha.$$

Следствие 1. *Для любых $n \geqslant 2$ и $0 \leqslant \alpha < n$ найдется $\theta^* = \theta_n^*(\alpha)$ такое, что*

$$n \leqslant \alpha_n(\theta^*) \leqslant 2n - 2.$$

Замечание. На самом деле из доказательства следует, что утверждение теоремы 1 выполняется для точек θ^* из некоторого множества положительной меры $\Theta^* = \Theta_n^*(\alpha) \subseteq [0, 2\pi)$.

2. Доказательство основного результата

2.1. Переход к изучению производной Вейля — Сеге экстремального полинома

Для изучения неравенства Бернштейна — Сеге (1.3) будем использовать метод В. В. Арестова исследования экстремальных задач для тригонометрических полиномов [2; 3]. В [16, § 2] (см. также [8; 9]) описан этот метод и показано его применение для оператора Вейля — Сеге при произвольных α и θ. Этот метод позволяет свести задачу к изучению производной Вейля — Сеге $D_\theta^\alpha h_n$ полинома

$$h_n(t) = 2^n(1+\cos t)^n = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} e^{ikt} = C_{2n}^n + 2\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n+k}\cos kt,$$

который является экстремальным в неравенстве (1.3) при $p = 0$. Производная Вейля — Сеге полинома h_n имеет вид

$$D_\theta^\alpha h_n(t) = e^{-int}\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}(e^{it}) = 2\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n+k} k^\alpha \cos\Big(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\Big),$$

по формуле (1.6) ей соответствует алгебраический многочлен

$$\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}(z) = \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n+k} k^\alpha \big(e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n-k} + e^{i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n+k}\big). \tag{2.1}$$

Задача сводится именно к исследованию многочлена (2.1) и его среднего геометрического на единичной окружности $\|\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}\|_0$.

Для произвольного алгебраического многочлена P_m его среднее геометрическое определяется как

$$\|P_m\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|P_m(e^{it})\right| dt\right). \tag{2.2}$$

Если старший коэффициент многочлена P_m степени m равен $a_m \neq 0$, то как следствие формулы Йенсена (см., например, [12, т. 1, отд. 3, гл. 4, § 2, задача 175]) справедливо представление для величины (2.2) через нули z_j, $j = 1, \dots, m$, многочлена P_m

$$\|P_m\|_0 = |a_m| \prod_{j=1}^{m} \max\{1, |z_j|\}. \tag{2.3}$$

В дальнейшем мы будем использовать представление (2.3) среднего геометрического (2.2) многочлена P_m при доказательстве теоремы 1.

Справедливо утверждение, отмеченное в [16, разд. 2].

Утверждение 1. *Для точной константы в неравенстве* (1.3) *при* $p = 0$ *справедливы равенства*

$$B_n(\alpha,\theta)_0 = \|\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}\|_0 = \|D_\theta^\alpha h_n\|_0. \tag{2.4}$$

Формула (2.4) и неравенства (1.4) влекут следующее утверждение.

Утверждение 2. *Для тройки параметров* n, α, θ *неравенство* (1.3) *выполняется с классической константой* n^α *во всех* L_p, $0 \leqslant p \leqslant \infty$, *тогда и только тогда, когда* $\|\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}\|_0 = n^\alpha$.

В дальнейшем (см. подраздел 2.3) будет показано, что при $0 \leqslant \alpha < n$ найдется $\theta^* \in [0,\pi)$, для которого $\|\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta^*}\|_0 > n^\alpha$. Отсюда и будет следовать утверждение основной теоремы.

2.2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть* $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ *— многочлен степени* n *с вещественными коэффициентами,* τ *— вещественный параметр. Многочлену* P *и параметру* τ *сопоставим многочлен* R_τ *степени* $2n$*, определяемый формулой*

$$R_\tau(z) = P^*(z) + e^{i\tau} z^n P(z), \quad P^*(z) = z^n P(1/z).$$

Тогда найдется $\tau \in [0, 2\pi)$ *такое, что* $\|R_\tau\|_0 \geqslant \|P\|_0$.

Доказательство. На единичной окружности в силу того, что все коэффициенты многочлена P вещественны, имеем

$$R_\tau(e^{it}) = e^{int}(P(e^{-it}) + e^{i\tau}P(e^{it})) = e^{int}(\overline{P(e^{it})} + e^{i\tau}P(e^{it})).$$

Заметим, что для любых $z \in \mathbb{C}$ и $p > 0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{z} + e^{i\tau}z|^p d\tau = |z|^p \|1 + e^{i\tau}\|_p^p.$$

Взяв здесь $z = P(e^{it})$, получим

$$|P(e^{it})|^p = \frac{1}{2\pi\|1 + e^{i\tau}\|_p^p}\int_0^{2\pi} |R_\tau(e^{it})|^p d\tau.$$

Проинтегрируем это соотношение по t от 0 до 2π:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|P(e^{it})|^p dt=\frac{1}{4\pi^2\|1+e^{i\tau}\|_p^p}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|R_\tau(e^{it})|^p d\tau dt=\frac{1}{4\pi^2\|1+e^{i\tau}\|_p^p}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|R_\tau(e^{it})|^p dt d\tau.$$

Возведем в степень $1/p$:

$$\|P\|_p=\frac{1}{\|1+e^{i\tau}\|_p}\left(\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|R_\tau(e^{it})|^p dt d\tau\right)^{1/p}.$$

Переходя к пределу при $p\to 0$, получаем

$$\|P\|_0=\exp\left(\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|R_\tau(e^{it})|dt d\tau\right) \tag{2.5}$$

ввиду того, что p-средние функций при $p\to +0$ сходятся к средним геометрическим (см., например, [13, гл. VI, п. 6.8]).

Соотношение (2.5) можно записать в виде

$$\|P\|_0=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|R_\tau(e^{it})|dt d\tau\right)=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\|R_\tau\|_0 d\tau\right).$$

Это представление влечет выполнение неравенства $\|R_\tau\|_0\geqslant\|P\|_0$ по τ на множестве положительной меры из $[0,2\pi)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *При $\gamma>n-2$ все нули многочлена*

$$Q_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(k+1)^\gamma z^k$$

лежат в единичном круге $\mathscr{D}=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма 2 может быть доказана применением леммы 1 из [16] к многочлену $zQ_{n-1}(-z)$, если взять в ней $a=1$ и вполне монотонную функцию $g(t)=1/t^\beta$, где $\beta=\gamma-n+2>0$. Для этого нужно показать, что

$$S_\nu=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k q_k g^{(\nu)}(k+1)=0,\quad \nu=0,1,\dots,n-2;$$

здесь использовано обозначение $q_k=C_{n-1}^k(k+1)^\gamma$. Суммы S_ν можно записать в виде конечных разностей порядка $n-1$ с шагом 1 от степенной функции $(x+1)^{n-2-\nu}$ неотрицательной целой степени $n-2-\nu\leqslant n-2$:

$$(-1)^\nu\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\nu)}S_\nu=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k\frac{(k+1)^{\beta+n-2}}{(k+1)^{\beta+\nu}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k(k+1)^{n-2-\nu}=\Delta^{n-1}(k+1)^{n-2-\nu}=0,\quad \nu=0,1,\dots,n-2.$$

Следовательно, условия леммы 1 из [16] выполнены.

Лемма доказана.

Лемма 3. *При $0 \leqslant \alpha < n$ у многочлена $P_n^\alpha(z) = \sum_{k=1}^n C_{2n}^{n+k} k^\alpha z^k$ найдется хотя бы один нуль z_0 вне единичного круга: $|z_0| > 1$.*

Доказательство. В доказательстве будет использовано понятие и свойства аполярных многочленов (см. [12, т. 2, отд. 5, гл. 2, § 3]). Два многочлена степени не выше m

$$A(z) = \sum_{k=0}^m C_m^k a_k z^k \quad \text{и} \quad B(z) = \sum_{k=0}^m C_m^k b_k z^k$$

называются *аполярными* [12, т. 2, отд. 5, гл. 2, § 3, задача 139], если

$$\sum_{k=0}^m C_m^k (-1)^k a_k b_{m-k} = 0.$$

Если при этом все нули A_m находятся в круговой области K (в замкнутой внутренней или замкнутой внешней области круга или в замкнутой полуплоскости), то хотя бы один нуль B_m лежит в K [12, т. 2, отд. 5, гл. 2, § 3, задача 145].

Рассмотрим многочлен

$$Q_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (k+1)^{2n-2-\alpha} z^k$$

и убедимся, что $Q_{n-1}^*(z) = z^{n-1} Q(1/z)$ аполярен к $P_n^\alpha(z)/z$. Действительно

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k C_{2n}^{n+k} k^\alpha k^{2n-2-\alpha} = \sum_{k=1}^n (-1)^k C_{2n}^{n+k} k^{2n-2} = \frac{(-1)^{n-1}}{2} h_n^{(2n-2)}(\pi) = 0;$$

тем самым условие аполярности проверено.

Согласно лемме 2 у многочлена Q_{n-1} все нули лежат в $\mathscr{D}$. Следовательно, все нули Q_{n-1}^* лежат в $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathscr{D}}$. Поскольку этих нулей конечное число, то они лежат в замкнутом множестве $F_\varepsilon = \{z\colon |z| \geqslant 1 + \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Поскольку Q_{n-1}^* аполярен $P_n^\alpha(z)/z$, хотя бы один нуль P_n^α лежит в F_ε и, значит, в $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathscr{D}}$.

Лемма доказана.

2.3. Завершение доказательства основного результата

Будем исходить из соотношения (2.4). Заметим, что многочлен (2.1) может быть представлен в виде

$$\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}(z) = e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} \big(z^n P_n^\alpha(1/z) + z^n P_n^\alpha(z)\big), \quad P_n^\alpha = \sum_{k=1}^n C_{2n}^{n+k} k^\alpha z^k, \quad \tau = \pi\alpha/2 + \theta.$$

В силу леммы 3 у многочлена P_n^α при $0 \leqslant \alpha < n$ есть хотя бы один нуль, по модулю больший 1. Поэтому в силу (2.3) $\|P_n^\alpha\|_0 > n^\alpha$. Согласно лемме 1 найдется $\theta^* = \theta_n^*(\alpha)$ такое, что

$$B_n(\alpha, \theta^*)_0 = \big\|\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta^*}\big\|_0 \geqslant \|P_n^\alpha\|_0 > n^\alpha.$$

Тем самым теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В. В.** О неравенствах С. Н. Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1289–1292.
2. **Арестов В. В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1981. Т. 45, №1. С. 3–22.
3. **Арестов В. В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 7–18.
4. **Арестов В. В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 6. С. 10–26.
5. **Арестов В. В.** Точные неравенства для тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 38–53.
6. **Арестов В. В., Глазырина П. Ю.** Интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 6. С. 727–731.
7. **Арестов В. В., Глазырина П. Ю.** Неравенство Бернштейна — Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 17–31.
8. **Леонтьева А. О.** Неравенство Бернштейна для производных Вейля тригонометрических полиномов в пространстве L_0 // Мат. заметки. 2018. Т. 104, № 2. С. 255–264. doi: 10.4213/mzm11757 .
9. **Леонтьева А. О.** Неравенство Бернштейна — Сеге для производных Вейля тригонометрических полиномов в пространстве L_0 // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 199–207. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-199-207 .
10. **Попов Н. В.** Об одном интегральном неравенстве для тригонометрических полиномов // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф.: Воронеж. зим. мат. шк. (28 января — 2 февраля 2021 г.) / Воронеж. гос. ун-т; Москов. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. 334 с.
11. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 638 с.
12. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1: 391 с.; Т. 2: 431 с.
13. **Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
14. **Arestov V. V., Glazyrina P. Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512. doi: 10.1016/j.jat.2012.08.004 .
15. **Erdèlyi T.** Arestov's theorems on Bernstein's inequality // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 250, art. no. 105323. doi: 10.1016/j.jat.2019.105323 .
16. **Leont'eva A. O.** Bernstein–Szegő inequality for trigonometric polynomials in L_p, $0 \leqslant p \leqslant \infty$, with the classical value of the best constant // J. Approx. Theory. 2022. Vol. 276, art. no. 105713. doi: 10.1016/j.jat.2022.105713 .
17. **Weyl H.** Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich. 1917. Bd 62, № 1–2. S. 296–302.

Поступила 20.05.2022
После доработки 25.09.2022
Принята к публикации 3.10.2022

Леонтьева Анастасия Олеговна
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: lao-imm@yandex.ru

REFERENCES

1. Arestov V.V. On inequalities of S. N. Bernstein for algebraic and trigonometric polynomials. *Soviet Math. Dokl.*, 1979, vol. 20, no. 3, pp. 600–603.

2. Arestov V.V. On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives. *Math. USSR Izv.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 1–17. doi: 10.1070/IM1982v018n01ABEH001375 .
3. Arestov V.V. Integral inequalities for algebraic polynomials on the unit circle. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, no. 4, pp. 977–984. doi: 10.1007/BF01139596 .
4. Arestov V.V. The Szego inequality for derivatives of a conjugate trigonometric polynomial in L_0. *Math. Notes*, 1994, vol. 56, no. 6, pp. 1216–1227. doi: 10.1007/BF02266689 .
5. Arestov V.V. Sharp inequalities for trigonometric polynomials with respect to integral functionals. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. 21–36. doi: 10.1134/S0081543811050038 .
6. Arestov V.V., Glazyrina P.Yu. Integral inequalities for algebraic and trigonometric polynomials. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 85, no. 1, pp. 104–108. doi: 10.1134/S1064562412010371 .
7. Arestov V.V., Glazyrina P.Yu. The Bernstein-Szegő inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 13–28. doi: 10.1134/S0081543815020030 .
8. Leont'eva A.O. Bernstein's inequality for the Weyl derivatives of trigonometric polynomials in the space L_0. *Math. Notes*, 2018, vol. 104, no. 1-2, pp. 263–270. doi: 10.1134/S0001434618070271 .
9. Leont'eva A.O. Bernstein–Szegő inequality for the Weyl derivative of trigonometric polynomials in L_0. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, suppl. 1, pp. 127–134. doi: 10.1134/S0081543820020108 .
10. Popov N.V. On integral inequality for trigonometric polynomials. In: *Proc. Int. Conf. Voronezh Winter Math. School "Modern methods in theory of functions and adjacent problems"*. Voronezh: Voronezh Univ. Publ., 2021, pp. 244–246 (in Russian). ISBN: 978-5-9273-3153-6 .
11. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Yverdon: Gordon and Breach, 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641 . Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya.* Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 638 p.
12. Pólya G., Szegö G. *Problems and theorems in analysis.* Berlin: Springer, 1998, vol. 1: 393 p. doi: 10.1007/978-3-642-61983-0 ; vol. 2: 392 p. doi: 10.1007/978-3-642-61905-2 . Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza*, Moscow: Nauka Publ., 1978, vol. 1: 391 p.; vol. 2: 431 p.
13. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. *Inequalities.* London: Cambridge Univ. Press, 1988, 340 p. ISBN: 978-0-521-35880-4 . Translated to Russian under the title *Neravenstva*, Moscow: Inostr. Liter. Publ., 1948, 456 p.
14. Arestov V., Glazyrina P. Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials. *J. Approx. Theory*, 2012, vol. 164, no. 11, pp. 1501–1512. doi: 10.1016/j.jat.2012.08.004 .
15. Erdèlyi T. Arestov's theorems on Bernstein's inequality. *J. Approx. Theory*, 2020, vol. 250, art. no. 105323. doi: 10.1016/j.jat.2019.105323 .
16. Leont'eva A.O. Bernstein–Szegő inequality for trigonometric polynomials in L_p, $0 \leqslant p \leqslant \infty$, with the classical value of the best constant. *J. Approx. Theory*, 2022, vol. 276, art. no. 105713. doi: 10.1016/j.jat.2022.105713 .
17. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 1917, vol. 62, no. 1-2, pp. 296–302.

Received May 20, 2022
Revised September 25, 2022
Accepted October 3, 2022

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2022-874).

Anastasiya Olegovna Leont'eva, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: lao-imm@yandex.ru .

Cite this article as: A. O. Leont'eva. Bernstein–Szegő inequality for trigonometric polynomials in the space L_0 with a constant greater than classical. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 128–136 .