ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.518.475

О СХОДИМОСТИ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧАСТНЫХ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА ФУРЬЕ ПО ПРИНГСХЕЙМУ[1]

С. В. Конягин

Из знаменитой теоремы А. Н. Колмогорова (1925) вытекает, что частные суммы любой интегрируемой функции f сходятся к ней по мере. Следовательно, если подпоследовательность частных сумм имеет предел на множестве положительной меры, то она на этом множестве может сходиться только к f. В то же время Р. Д. Гецадзе (1986) показал, что в пространстве размерности больше 1 кубические частные суммы интегрируемой функции могут не сходиться по мере. В работе автора (1989) показано, что функцию можно выбрать так, что любая подпоследовательность кубических частных сумм почти всюду не ограничена. Оставался открытым вопрос: верно ли, что если подпоследовательность кубических частных сумм сходится на множестве положительной меры, то ее пределом почти всюду на этом множестве будет исходная функция? Мы даем положительный ответ на этот вопрос, причем не только для кубических сумм, но и для сумм по Прингсхейму. Для сферических сумм соответствующий вопрос остается открытым. Подпоследовательности частных сумм связаны с универсальными тригонометрическими рядами. Мы будем говорить, что d-мерный тригонометрический ряд является универсальным, если для любой измеримой d-мерной функции f, 2π-периодической по каждому переменному, найдется подпоследовательность частных сумм этого ряда, сходящаяся к f почти всюду. Это определение зависит от выбора класса частных сумм тригонометрического ряда. Из недавнего результата М. Г. Григоряна (2022), в частности, следует, что для любого d существует d-мерный тригонометрический ряд, универсальный как для сумм Прингсхейма, так и для сферических частных сумм. В силу основного результата настоящей работы ряд Фурье не может быть универсальным для сумм Прингсхейма.

Ключевые слова: измеримые функции, интегрируемые функции, тригонометрические ряды Фурье, сходимость по Прингсхейму, подпоследовательность частных сумм, сходимость почти всюду, метод Бернштейна суммируемости рядов Фурье.

S. V. Konyagin. On the Pringsheim convergence of a subsequence of partial sums of a Fourier trigonometric series.

As follows from A. N. Kolmogorov's famous theorem (1925), partial sums of any integrable function f converge to f in measure. Therefore, if a subsequence of partial sums has a limit on a set of positive measure, then this subsequence can converge on this set to f only. Meantime, R. D. Getsadze (1986) showed that in a space of dimension greater than 1 the cubic partial sums of an integrable function may diverge in measure. In the author's paper (1989), it was shown that one can choose a function in such a way that any subsequence of the cubic partial sums is unbounded almost everywhere. The following question remained open: is it true that if a subsequence of the cubic partial sums converges on a set of positive measure, then the limit coincides with the original function almost everywhere on this set? We give an affirmative answer to this question, moreover, not only for the cubic partial sums, but for Pringsheim's sums as well. The corresponding question for the spherical sums is still open. Subsequences of partial sums are connected with universal trigonometric series. We say that a d-dimensional trigonometric series is universal if, for any measurable d-dimensional function f that is 2π-periodic in each variable, there is a subsequence of partial sums of this series converging to f almost everywhere. This definition depends on the choice of the class of partial sums of the trigonometric series. As follows from M. G. Grigoryan's recent result (2022), for any d there is a d-dimensional trigonometric series that is universal both for Pringsheim's sums and for the spherical sums. Due to the main result of the present paper, a Fourier series cannot be universal for Pringsheim's sums.

Keywords: measurable functions, integrable functions, trigonometric Fourier series, Pringsheim convergence, subsequence of partial sums, almost everywhere convergence, Bernstein's summation method for Fourier series.

MSC: 42B05, 42B08

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-121-127

[1]Исследование выполнено в МГУ имени М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-11-00129).

Введение

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $L(\mathbb{T})$ — множество всех интегрируемых функций $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Каждой функции $f \in L(\mathbb{T})$ сопоставим ее тригонометрический ряд

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}, \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ определим n-ю частную сумму функции f как

$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k e^{ikx}.$$

Из знаменитой теоремы А. Н. Колмогорова [1] вытекает, что частные суммы любой интегрируемой функции f сходятся к ней по мере. Следовательно, если подпоследовательность частных сумм имеет предел на множестве положительной меры, то она на этом множестве может сходиться только к f.

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Для функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ определим ее разложение в тригонометрический ряд Фурье

$$f \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d),$$

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}d\mathbf{x}.$$

Определим суммы по Прингсхейму (или прямоугольные частные суммы) функции f:

$$S_{\mathbf{n}}(f;\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|\le\mathbf{n}} f(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, $|\mathbf{k}| = (|k_1|, \dots, |k_d|)$, а неравенство $\mathbf{m} \le \mathbf{n}$ понимается как $m_j \le n_j$ для $j = 1, \dots, d$. Сходимость по Прингсхейму (в том или ином смысле) означает, что $S_{\mathbf{n}}(f) \to f$ при $\min(n_1, \dots, n_d) \to \infty$. Через $S_n(f)$ будем обозначать кубические частные суммы Фурье, равные $S_{\mathbf{n}}(f)$, где $\mathbf{n} = (n, \dots, n)$.

Р. Д. Гецадзе [2], отвечая на вопрос Д. Е. Меньшова (см. [3]), показал, что в пространстве размерности больше 1 кубические частные суммы интегрируемой функции могут не сходиться по мере. В работе автора [4] показано, что функцию можно выбрать так, что любая подпоследовательность кубических частных сумм почти всюду не ограничена. В той же работе был поставлен вопрос: верно ли, что если подпоследовательность кубических частных сумм сходится к некоторой функции на множестве положительной меры, то на этом множестве пределом почти всюду будет исходная функция? Аналогичный вопрос может быть задан для сходимости по Прингсхейму. Мы даем положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Пусть подпоследовательность частных сумм по Прингсхейму функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ сходится на некотором множестве $E \subset \mathbb{T}^d$ положительной меры к конечной функции g. Тогда $g = f$ почти всюду на E.*

Эта теорема связана с теорией универсальных функциональных рядов. Мы не будем подробно останавливаться на этой теории; ряд относящихся к ней результатов приведен в [5]. Упомянем один класс универсальных рядов — класс рядов, универсальных относительно сходимости по подпоследовательностям почти всюду. Сначала отметим, что частные суммы $S_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ могут быть определены не только для тригонометрических рядов Фурье, но и для произвольных тригонометрических рядов (в частности, одномерных). Мы будем говорить, что d-мерный тригонометрический ряд $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\widehat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}}$ является универсальным, если для любой измеримой на $\mathbb{T}^d$ функции f найдется подпоследовательность частных сумм этого ряда, сходящаяся к f почти всюду. Конечно, определение зависит от выбора класса частных сумм тригонометрического ряда. Из недавнего результата М. Г. Григоряна [5, теорема 3], в частности, следует, что для любого d существует d-мерный тригонометрический ряд, универсальный как для прямоугольных, так и для сферических частных сумм.

В силу упомянутой выше теоремы А. Н. Колмогорова [1] одномерный универсальный ряд не может быть рядом Фурье. М. Г. Григорян в лекции на конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Сергея Борисовича Стечкина, поставил вопрос о том, может ли многомерный ряд Фурье быть универсальным. Этот вопрос стал источником теоремы 1, из которой следует, что многомерный ряд Фурье не может быть универсальным для частных сумм по Прингсхейму. Мы не знаем, справедлив ли аналог теоремы 1 для сферических частных сумм. Вопрос М. Г. Григоряна для таких частных сумм также остается открытым.

Чтобы избежать лишних технических осложнений, мы рассмотрим доказательство теоремы 1 в двумерном случае. Для пространств большей размерности оно проводится таким же образом.

Автор благодарен Мартину Геворговичу Григоряну за постановку задачи и полезные обсуждения. Идея использовать для решения задачи метод Бернштейна суммирования рядов Фурье была подсказана автору Р. М. Тригубом во время его лекции на вышеупомянутой конференции, за что автор благодарит Роальда Михайловича.

1. Метод Бернштейна суммирования рядов Фурье

Для доказательства теоремы 1 мы воспользуемся методом С. Н. Бернштейна суммирования рядов Фурье [6] (см.также [7]). Аналогичный метод предложил В. В. Рогозинский [8]. Отметим также недавнюю статью Р. М. Тригуба [9], в которой рассматривается обобщение методов Рогозинского и Бернштейна.

Для функции $f\in L(\mathbb{T})$ и $n\in\mathbb{N}$ определим

$$R_n(f;x)=\frac{1}{2}\Big(S_n(f;x)+S_n\Big(f;x+\frac{2\pi}{2n+1}\Big)\Big).$$

Мы имеем

$$R_n(f)=f*F_n,$$

где

$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}f(y)g(x-y)dy,$$

$$F_n(x)=\frac{1}{2}\bigg(\sum_{j=-n}^{n}e^{ijx}+\sum_{j=-n}^{n}e^{ij\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)}\bigg).$$

В [6] показано, что

$$\sup_n\|F_n\|_1<\infty.$$

Можно рассмотреть и суммирование по Бернштейну многомерных рядов Фурье. В двумерном случае оно определяется как

$$R_{\mathbf{n}}(f;\mathbf{x})=\frac{1}{4}\Big(S_{\mathbf{n}}(f;\mathbf{x})+S_{\mathbf{n}}\Big(f;\Big(x_1+\frac{2\pi}{2n_1+1},x_2\Big)\Big)$$
$$+S_{\mathbf{n}}\Big(f;\Big(x_1,x_2+\frac{2\pi}{2n_2+1}\Big)\Big)+S_{\mathbf{n}}\Big(f;\Big(x_1+\frac{2\pi}{2n_1+1},x_2+\frac{2\pi}{2n_2+1}\Big)\Big)\Big).$$

Мы имеем

$$R_{\mathbf{n}}(f) = f * F_{n_1}(x_1)F_{n_2}(x_2),$$

где двумерная свертка определяется как

$$f * g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

Из ограниченности L-нормы функций вида $F_{n_1}(x_1)F_{n_2}(x_2)$ легко вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любой функции* $f \in L(\mathbb{T}^2)$

$$\|f - R_{\mathbf{n}}(f)\|_1 \to 0 \quad (\min(n_1, n_2) \to \infty).$$

2. Доказательство теоремы 1

Через μ_j мы будем обозначать j-мерную меру подмножества j-мерного тора $\mathbb{T}^j$. Пусть $f \in L(\mathbb{T}^2)$, $E \subset \mathbb{T}^2$, $\mu_2(E) > 0$, и пусть последовательность $\{\mathbf{n}^{(\nu)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ такова, что

$$\mathbf{n}^{(\nu)} = (n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}), \quad \lim_{\nu\to\infty} n_1^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} n_2^{(\nu)} = \infty$$

и

$$S_{\mathbf{n}^{(\nu)}}(f; \mathbf{x}) \to g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E,$$

где g — конечная на E функция. Мы должны доказать, что $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ почти всюду на E. По теореме Егорова [10, гл. V, § 4, теорема 6] без ограничения общности можно считать, что сходимость $S_{\mathbf{n}^{(\nu)}}$ к g на E равномерная. В частности, функция g ограничена на E. Также в дальнейшем мы будем полагать, что $g(\mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^2 \setminus E$.

Согласно лемме 1

$$\lim_{\nu\to\infty} \|f - R_{\mathbf{n}^{(\nu)}}(f)\|_1 = 0.$$

Следовательно, существует подпоследовательность $\{(\mathbf{n}')^{(\nu)}\}$ последовательности $\{\mathbf{n}^{(\nu)}\}$ такая, что $R_{(\mathbf{n}')^{(\nu)}}(f)$ сходится к f при $\nu \to \infty$ почти всюду. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем без ограничения общности считать, что

$$\lim_{\nu\to\infty} R_{\mathbf{n}^{(\nu)}}(f) = f \quad \text{почти всюду.} \tag{2.1}$$

Для функции h, определенной на $\mathbb{T}^2$, и $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ обозначим соответствующий сдвиг функции h:

$$h_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x} + \mathbf{u}).$$

Для любой $h \in L(\mathbb{T}^2)$ (см., например, [11, § 2]) имеем

$$\lim_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2,\, \mathbf{u}\to 0} \|h_{\mathbf{u}} - h\|_1 = 0,$$

откуда вытекает

Лемма 2. *Для произвольной функции* $h \in L(\mathbb{T}^2)$ *любая сходящаяся к нулю последовательность* $\{\mathbf{u}^{(\nu)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *векторов из* $\mathbb{R}^2$ *содержит подпоследовательность* $\{(\mathbf{u}')^{(\nu)}\}$ *такую, что функции* $h_{(\mathbf{u}')^{(\nu)}}$ *сходятся к* h *почти всюду.*

Следующая лемма является ключевой для доказательства теоремы 1.

Лемма 3. *Пусть $E \subset \mathbb{T}^2$ — множество положительной меры, функция g ограничена на E и равна нулю на $\mathbb{T}^2 \setminus E$. Пусть $f \in L(\mathbb{T}^2)$, и пусть последовательность $\{\mathbf{n}^{(\nu)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ такова, что*

$$\mathbf{n}^{(\nu)} = (n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}), \quad \lim_{\nu\to\infty} n_1^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} n_2^{(\nu)} = \infty$$

и

$$S_{\mathbf{n}^{(\nu)}}(f;\mathbf{x}) \to g(\mathbf{x})$$

равномерно на E. Пусть также последовательность $\{\mathbf{u}^{(\nu)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ векторов из $\mathbb{R}^2$ сходится к нулю. Тогда существует возрастающая последовательность $\{\nu_j\}$ такая, что $S_{\mathbf{n}^{(\nu_j)}}(f_{\mathbf{u}^{(\nu_j)}};\mathbf{x}) \to g(\mathbf{x})$ почти всюду на E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть h — характеристическая функция множества E, т. е. $h(\mathbf{x}) = 1$ для $\mathbf{x} \in E$ и $h(x) = 0$ для $x \in \mathbb{T}^2 \setminus E$. В силу леммы 2 существует возрастающая последовательность $\{\nu_j'\}$ такая, что $h_{\mathbf{u}^{(\nu_j')}}$ сходится почти всюду к h при $j \to \infty$. Отсюда следует, что для почти всех $\mathbf{x} \in E$, начиная с некоторого j, векторы $\mathbf{x} + \mathbf{u}^{(\nu_j')}$ принадлежат множеству E. Используя равномерную сходимость $S_{\mathbf{n}^{(\nu)}}$ к g на E, выводим, что

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{u}^{(\nu_j')}) - S_{\mathbf{n}^{(\nu_j')}}(f;\mathbf{x} + \mathbf{u}^{(\nu_j')}) \to 0 \quad (j \to \infty) \tag{2.2}$$

почти всюду на E. Далее, снова применяя лемму 2, мы получаем существование такой подпоследовательности $\{\nu_j\}$ последовательности $\{\nu_j'\}$, что

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{u}^{(\nu_j)}) - g(\mathbf{x}) \to 0 \quad (j \to \infty) \tag{2.3}$$

почти всюду. Из (2.2) и (2.3) непосредственно вытекает утверждение леммы 3. □

Для д о к а з а т е л ь с т в а теоремы 1 мы последовательно применяем лемму 3 к последовательностям, состоящим из векторов

$$\Big(\frac{2\pi}{2n_1^{(\nu)}+1}, 0\Big), \quad \Big(0, \frac{2\pi}{2n_2^{(\nu)}+1}\Big), \quad \Big(\frac{2\pi}{2n_1^{(\nu)}+1}, \frac{2\pi}{2n_2^{(\nu)}+1}\Big).$$

В итоге мы получим существование возрастающей последовательности $\{\nu_j\}$ такой, что почти всюду на E при $j \to \infty$ выполнены предельные соотношения

$$S_{\mathbf{n}^{(\nu_j)}}(f;\mathbf{x}) \to g(\mathbf{x}),$$

$$S_{\mathbf{n}^{(\nu_j)}}\Big(f; x_1 + \Big(\frac{2\pi}{2n_1^{(\nu_j)}+1}\Big), x_2\Big) \to g(\mathbf{x}),$$

$$S_{\mathbf{n}^{(\nu_j)}}\Big(f; x_1, , x_2 + \Big(\frac{2\pi}{2n_2^{(\nu_j)}+1}\Big)\Big) \to g(\mathbf{x}),$$

$$S_{\mathbf{n}^{(\nu_j)}}\Big(f; x_1 + \Big(\frac{2\pi}{2n_1^{(\nu_j)}+1}\Big), x_2 + \Big(\frac{2\pi}{2n_2^{(\nu_j)}+1}\Big)\Big) \to g(\mathbf{x}).$$

Отсюда и из определения суммирования по Бернштейну мы получаем сходимость $R_{\mathbf{n}^{(\nu_j)}}(f)$ к g почти всюду на E при $j \to \infty$. Вспоминая (2.1), мы выводим отсюда, что $f = g$ почти всюду на E. Тем самым теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. Если функция f является действительной, то действительными будут и все ее частные суммы по Прингсхейму. Следуя доказательству теоремы 1, можно показать, что подпоследовательность частных сумм Прингсхейма интегрируемой функции не может сходиться к $+\infty$ или к $-\infty$ на множестве положительной меры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kolmogoroff A. N.** Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier // Fund. Math. 1925. Vol. 7. P. 24–29. doi: 10.4064/fm-7-1-24-29.
2. **Гецадзе Р. Д.** О расходимости по мере кратных рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР. 1986. Т. 122, № 2. С. 269–271.
3. **Меньшов Д.Е.** О частичных суммах тригонометрических рядов // Мат. сб. 1947. Vol. 20, no. 2. С. 197–238.
4. **Конягин С. В.** О расходимости подпоследовательности частных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 190. С. 102–116.
5. **Григорян М. Г.** О почти универсальных двойных рядах Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 4. С. 91–102. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-91-102.
6. **Bernstein S.** Sur un procédé de summationes séries tigonométriques // Comptes Rendus. 1930. Vol. 5, no. 191. P. 976–979.
7. **Бернштейн С. Н.** Об одном методе суммирования тригонометрических рядов // Собрание сочинений. Т. 1: Конструктивная теория функций (1905–1930). М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 523–525.
8. **Rogosinski W.** Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen // Math. Ann. 1925. Bd. 95. S. 110–134.
9. **Тригуб Р. М.** Полиномиальный метод Рогозинского — Бернштейна суммирования тригонометрических рядов Фурье // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 4. С. 592–605.
10. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
11. **Винер Н.** Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963. 256 с.

Поступила 10.06.2022
После доработки 24.06.2022
Принята к публикации 27.06.2022

Конягин Сергей Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: konyagin@mi-ras.ru

REFERENCES

1. Kolmogoroff A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier. *Fund. Math.*, 1925, vol. 7, pp. 24–29. doi: 10.4064/fm-7-1-24-29.
2. Getsadze R.D. On the divergence in measure of multiple Fourier series. *Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR*, 1986, vol. 122, no. 2, pp. 269–271 (in Russian).
3. Menchoff D. On partial sums of trigonometric series. *Rec. Math.* [*Mat. Sbornik*] *N.S.*, 1947, vol. 20, no. 2, pp. 197–238 (in Russian).
4. Konyagin S.V. On the divergence of the sequence of the partial sums of multiple trigonometric Fourier series. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1992, vol. 190, pp. 107–121.
5. Grigoryan M.G. The almost everywhere convergence of universal double Fourier series. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 91–102 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-91-102.
6. Bernstein S. Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1930, vol. 191, pp. 976–979.
7. Bernstein S.N. On one method of summation of trigonometric series. In: *Sobranie sochinenii. T.* 1. *Konstruktivnaya teoriya funktsii* [Collected Works: Vol. I, Constructive theory of functions] (1905–1930). Moscow: Akad. Nauk SSSR Publ., 1952, pp. 523–525 (in Russian).
8. Rogosinski W. Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen. *Math. Ann.*, 1925, vol. 95, pp. 110–134.
9. Trigub R.M. Rogosinsky–Bernstein polynomial method of summation of trigonometric Fourier series. *Math. Notes*, 2022, vol. 111, no. 4, pp. 604–615. doi: 10.1134/S0001434622030294.

10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*, vol. 1, 2. Mineola; NY: Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830 . Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 496 p.
11. Wiener N. *The Fourier integral and certain of its applications.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988, 201 p. doi: 10.1017/CBO9780511662492 . Translated to Russian under the title *Integral Fur'e i nekotorye ego prilozheniya.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1963, 256 p.

Received June 10, 2022
Revised June 24, 2022
Accepted June 27, 2022

Funding Agency: This research was conducted at Lomonosov Moscow State University with the support of the Russian Science Foundation (grant no. 22-11-00129) .

Sergei Vladimirovich Konyagin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Lomonosov State University, Moscow, e-mail: konyagin@mi-ras.ru .

Cite this article as: S. V. Konyagin. On the Pringsheim convergence of a subsequence of partial sums of a Fourier trigonometric series. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 121–127.