ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 4 2022

УДК 517.518.454, 517.518.832

ПОРЯДКОВЫЕ РАВЕНСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p(\mathbb{T})$, $1<p<\infty$, ДЛЯ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ[1]

Н. А. Ильясов

Посвящается светлой памяти
члена-корреспондента РАН, профессора Ю. Н. Субботина
и профессора С. А. Теляковского
— эталонов советской и русской интеллигентности,
моих старших товарищей по Школе С. Б. Стечкина

Обозначим через $M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ класс всех функций $f\in L_p(\mathbb{T})$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условиям: $a_0(f)=0$, $0<n^r a_n(f)\downarrow 0$, $0<n^r b_n(f)\downarrow 0$ $(n\uparrow\infty)$, где $1<p<\infty$, $r\in\mathbb{N}$, $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$. В статье установлены порядковые равенства на классе $M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ между наилучшими приближениями $E_{n-1}(f^{(r)})_p$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ и модулями гладкости $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p$ k-х порядков r-х производных $f^{(r)}$, с одной стороны, и различными выражениями, содержащими элементы последовательностей $\{E_{\nu-1}(f)_p\}_{\nu=1}^\infty$ и $\{\omega_l(f;\pi/\nu)_p\}_{\nu=1}^\infty$, где $l,k\in\mathbb{N}$, $l>r$, с другой стороны. Ниже сформулированы основные результаты, полученные в этой работе. Для того чтобы функция f из $M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ принадлежала классу $L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ (— класс функций $f\in L_p(\mathbb{T})$, имеющих абсолютно непрерывные $(r-1)$-е производные $f^{(r-1)}$ и $f^{(r)}\in L_p(\mathbb{T})$; $f^{(0)}\equiv f$, $L_p^{(0)}(\mathbb{T})\equiv L_p(\mathbb{T})$), необходимо и достаточно выполнения одного из следующих эквивалентных условий: $E(f;p;r):=\big(\sum_{n=1}^\infty n^{pr-1}E_{n-1}^p(f)_p\big)^{1/p}<\infty \Leftrightarrow \Omega(f;p;l;r):=\big(\sum_{n=1}^\infty n^{pr-1}\omega_l^p(f;\pi/n)_p\big)^{1/p}<\infty \Leftrightarrow \sigma(f;p;r):=\big(\sum_{n=1}^\infty n^{pr+p-2}(a_n(f)+b_n(f))^p\big)^{1/p}<\infty$; при этом имеют место порядковые равенства

(a) $E(f;p;r)\asymp\|f^{(r)}\|_p\asymp\sigma(f;p;r)\asymp\Omega(f;p;l;r)$;

(b) $E_{n-1}(f^{(r)})_p\asymp n^r E_{n-1}(f)_p+\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\big)^{1/p},\ n\in\mathbb{N}$;

(c) $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p\asymp n^{-k}\big(\sum_{\nu=1}^n \nu^{p(k+r)-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\big)^{1/p}+\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\big)^{1/p},\ n\in\mathbb{N}$;

(d) $E_{n-1}(f^{(r)})_p+n^r\omega_l(f;\pi/n)_p\asymp\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}\omega_l^p(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/p}\asymp$
$\asymp\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p+n^r\omega_l(f;\pi/n)_p,\ n\in\mathbb{N},\ l<k+r$;

(e) $n^{-(l-r)}\big(\sum_{\nu=1}^n \nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\big)^{1/p}\asymp\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}\omega_l^p(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/p}\asymp$
$\asymp n^{-(l-r)}\big(\sum_{\nu=1}^n \nu^{p(l-r)-1}\omega_k^p(f^{(r)};\pi/\nu)_p\big)^{1/p},\ n\in\mathbb{N},\ l<k+r$;

(f) $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p\asymp\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}\omega_l^p(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/p},\ n\in\mathbb{N},\ l=k+r$;

(g) $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p\asymp n^{-k}\big(\sum_{\nu=1}^n \nu^{p(k+r)-1}\omega_l^p(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/p}+\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}\omega_l^p(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/p}$,

$n\in\mathbb{N},\ l>k+r$.

В общем случае слагаемое $n^r\omega_l(f;\pi/n)_p$ в п. (d) не допускает исключения как при оценке снизу в левой части (при $l>r$), так и при оценке сверху в правой части (при $r<l<k+r$). Однако, если $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^\infty\in B_l^{(p)}$ $(\Rightarrow\{E_{n-1}(f^{(r)})_p\}_{n=1}^\infty\in B_{l-r}^{(p)})$, либо $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^\infty\in B_l^{(p)}$ $(\Rightarrow\{\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p\}_{n=1}^\infty\in B_{l-r}^{(p)})$, где $B_l^{(p)}$ — класс всех последовательностей $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ $(0<\varphi_n\downarrow 0$ при $n\uparrow\infty)$, удовлетворяющих $(B_l^{(p)})$-условию Н. К. Бари $n^{-l}\big(\sum_{\nu=1}^n \nu^{pl-1}\varphi_\nu^p\big)^{1/p}=\mathcal{O}(\varphi_n),\ n\in\mathbb{N}$, равносильному (S_l)-условию С. Б. Стечкина, то

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (номер соглашения 075-15-2022-284).

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p \asymp \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{pr-1}\omega_l^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\Big)^{1/p} \asymp \omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль гладкости, прямая и обратная теоремы с производными теории приближений периодических функций, тригонометрический ряд Фурье с монотонными коэффициентами, порядковые равенства.

N. A. Il'yasov. Order equalities in the spaces $L_p(\mathbb{T})$, $1<p<\infty$, for best approximations and moduli of smoothness of derivatives of periodic functions with monotone Fourier coefficients.

Denote by $M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ the class of all functions $f\in L_p(\mathbb{T})$ whose Fourier coefficients satisfy the conditions: $a_0(f)=0$, $0<n^r a_n(f)\downarrow 0$, and $0<n^r b_n(f)\downarrow 0$ $(n\uparrow\infty)$, where $1<p<\infty$, $r\in\mathbb{N}$, and $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$. We establish order equalities in the class $M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ between the best approximations $E_{n-1}(f^{(r)})_p$ by trigonometric polynomials of order $n-1$ and the kth-order moduli of smoothness $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p$ of rth-order derivatives $f^{(r)}$, on the one hand, and various expressions containing elements of the sequences $\{E_{\nu-1}(f^{(r)})_p\}_{\nu=1}^\infty$ and $\{\omega_l(f;\pi/\nu)_p\}_{\nu=1}^\infty$, where $l,k\in\mathbb{N}$ and $l>r$, on the other hand. The main results obtained in the present paper can be briefly described as follows. A necessary and sufficient condition for a function f from $M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ to lie in the class $L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ (this class consists of all functions $f\in L_p(\mathbb{T})$ with absolutely continuous $(r-1)$th derivatives $f^{(r-1)}$ and $f^{(r)}\in L_p(\mathbb{T})$; here $f^{(0)}\equiv f$ and $L_p^{(0)}(\mathbb{T})\equiv L_p(\mathbb{T})$) is that one of the following equivalent conditions is satisfied: $E(f;p;r):=\big(\sum_{n=1}^\infty n^{pr-1}E_{n-1}^p(f)_p\big)^{1/p}<\infty \Leftrightarrow \Omega(f;p;l;r):=\big(\sum_{n=1}^\infty n^{pr-1}\omega_l^p(f;\pi/n)_p\big)^{1/p}<\infty \Leftrightarrow \sigma(f;p;r):=\big(\sum_{n=1}^\infty n^{pr+p-2}(a_n(f)+b_n(f))^p\big)^{1/p}<\infty$. Moreover, the following order equalities hold:

(a) $E(f;p;r)\asymp\|f^{(r)}\|_p\asymp\sigma(f;p;r)\asymp\Omega(f;p;l;r)$;

(b) $E_{n-1}(f^{(r)})_p\asymp n^rE_{n-1}(f)_p+\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\big)^{1/p}$, $n\in\mathbb{N}$;

(c) $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p\asymp n^{-k}\big(\sum_{\nu=1}^n \nu^{p(k+r)-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\big)^{1/p}+\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\big)^{1/p}$, $n\in\mathbb{N}$;

(d) $E_{n-1}(f^{(r)})_p+n^r\omega_l(f;\pi/n)_p\asymp\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}\omega_l^p(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/p}\asymp$ $\asymp\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p+n^r\omega_l(f;\pi/n)_p$, $n\in\mathbb{N}$, $l<k+r$;

(e) $n^{-(l-r)}\big(\sum_{\nu=1}^n \nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\big)^{1/p}\asymp\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}\omega_l^p(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/p}\asymp$ $\asymp n^{-(l-r)}\big(\sum_{\nu=1}^n \nu^{p(l-r)-1}\omega_k^p(f^{(r)};\pi/\nu)_p\big)^{1/p}$, $n\in\mathbb{N}$, $l<k+r$;

(f) $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p\asymp\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}\omega_l^p(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/p}$, $n\in\mathbb{N}$, $l=k+r$;

(g) $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p\asymp n^{-k}\big(\sum_{\nu=1}^n \nu^{p(k+r)-1}\omega_l^p(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/p}+\big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{pr-1}\omega_l^p(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/p}$, $n\in\mathbb{N}$, $l>k+r$.

In the general case, one cannot drop the term $n^r\omega_l(f;\pi/n)_p$ in item (d) either in the lower estimate on the left-hand side (for $l>r$) or in the upper estimate on the right-hand side (for $r<l<k+r$). However, if $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^\infty\in B_l^{(p)}$ $(\Rightarrow\{E_{n-1}(f^{(r)})_p\}_{n=1}^\infty\in B_{l-r}^{(p)})$ or $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^\infty\in B_l^{(p)}$ $(\Rightarrow\{\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p\}_{n=1}^\infty\in B_{l-r}^{(p)})$, where $B_l^{(p)}$ is the class of all sequences $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ $(0<\varphi_n\downarrow 0$ as $n\uparrow\infty)$ satisfying the Bari $(B_l^{(p)})$-condition: $n^{-l}\big(\sum_{\nu=1}^n \nu^{pl-1}\varphi_\nu^p\big)^{1/p}=\mathcal{O}(\varphi_n)$, $n\in\mathbb{N}$, which is equivalent to the Stechkin (S_l)-condition, then

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p \asymp \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{pr-1}\omega_l^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\Big)^{1/p} \asymp \omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Keywords: best approximation, modulus of smoothness, direct and inverse theorems with derivatives of the theory of approximation of periodic functions, trigonometric Fourier series with monotone coefficients, order equalities.

MSC: 42A10, 41A17, 41A25, 41A27, 42A32

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-103-120

1. Введение: обозначения и формулировки основных результатов

Пусть $L_p(\mathbb{T})$, $1\le p<\infty$, — пространство всех измеримых 2π-периодических функций с конечной $L_p(\mathbb{T})$-нормой $\|f\|_p=\Big(\pi^{-1}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}$;

$L_\infty(\mathbb{T})\equiv C(\mathbb{T})$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty=\max\big\{|f(x)|\colon x\in\mathbb{T}\big\}$, где $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$;

$L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$, — класс функций $f \in L_p(\mathbb{T})$, имеющих абсолютно непрерывные производные $f^{(r-1)}$ порядка $(r-1)$ и $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{T})$ (при $p = \infty$ — обычные производные $f^{(r)} \in C(\mathbb{T})$; $f^{(0)} \equiv f$, $L_p^{(0)}(\mathbb{T}) \equiv L_p(\mathbb{T})$);
$E_n(f)_p$ — наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T})$ приближение функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n \in \mathbb{Z}_+$;
$\omega_k(f;\delta)_p$ — модуль гладкости k-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0,+\infty)$:

$$\omega_k(f;\delta)_p = \sup\big\{\|\Delta_h^k f(\cdot)\|_p : h \in \mathbb{R},\ |h| \le \delta\big\},$$

где $\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu} f(x+\nu h)$, $\binom{k}{\nu} = k!/(\nu!(k-\nu)!)$, $\nu = \overline{0,k}$.

Между $E_n(f)_p$ и $\omega_k(f;\delta)_p$ функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, существуют известные связи, называемые прямой и обратной теоремами (без производных) теории приближений периодических функций в пространствах $L_p(\mathbb{T})$

$$C_1^{-1}(k)E_{n-1}(f)_p \le \omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \le C_2(k)n^{-k}\sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1}E_{\nu-1}(f)_p, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

(см. [1, п. 3, теорема 1; 2, § 2, теорема 1, неравенство (2.5) и § 5, теорема 8, неравенство (5.14); 3, п. 2, теорема 4, неравенство (10); 4, гл. 5, п. 5.1.32, неравенство (16) и п. 5.11, неравенство (1), а также гл. 6, п. 6.1.1, неравенство (1)]).

Здесь и всюду в дальнейшем $C_j(k,r,p,\ldots)$, $j \in \mathbb{N}$, обозначают положительные постоянные величины, зависящие только от указанных в скобках параметров.

В случае, когда $1 < p < \infty$ и коэффициенты Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ удовлетворяют условию $0 < a_n(f) \downarrow 0$, $0 < b_n(f) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$ (условие монотонности), либо условию $0 < a_n(f) \to 0$, $0 < b_n(f) \to 0$ и существует некоторое число $\tau > 0$ такое, что $n^{-\tau}a_n(f) \downarrow 0$, $n^{-\tau}b_n(f) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$ (условие квазимонотонности с показателем τ), то оценки в (1.1) допускают уточнения, приводящие к порядковому равенству

$$\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \asymp C_3(k,p)n^{-k}\bigg(\sum_{\nu=1}^n \nu^{pk-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Напомним, что порядковое равенство $\varphi_n \asymp C_4(k,r,p,\ldots)\psi_n$ означает существование таких постоянных величин $0 < C_5 \le C_6$, зависящих лишь от указанных в C_4 параметров $k,r,p,\ldots$, что $C_5\psi_n \le \varphi_n \le C_6\psi_n$. Далее при наличии ссылок на выписанное ранее порядковое равенство слово "порядковое" мы будем опускать.

В силу известного (см. ниже п. 2) замечания 2) порядкового равенства (при $1 \le p \le \infty$, $l > k$, $1 \le \alpha < \infty$)

$$\bigg(\sum_{\nu=1}^n \nu^{\alpha k-1}E_{\nu-1}^\alpha(f)_p\bigg)^{1/\alpha} \asymp C_7(l,k,\alpha)\bigg(\sum_{\nu=1}^n \nu^{\alpha k-1}\omega_l^\alpha\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}, \tag{1.3}$$

из (1.2) следует порядковое равенство (при $1 < p < \infty$, $l > k$)

$$\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \asymp C_8(l,k,p)n^{-k}\bigg(\sum_{\nu=1}^n \nu^{pk-1}\omega_l^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

допускающее интегральную форму записи

$$\omega_k(f;\delta)_p \asymp C_9(l,k,p)\delta^k\bigg(\int_\delta^{2\pi} t^{-(pk+1)}\omega_l^p(f;t)_p\,dt\bigg)^{1/p}, \quad \delta \in (0,\pi]. \tag{1.5}$$

З а м е ч а н и е 1. Равенства (1.2) и (1.5) для функций $f \in L_p(\mathbb{T})$ с квазимонотонными коэффициентами Фурье анонсированы в [5, теоремы 1 и 4], а доказательства, в том числе и равенства (1.4), приведены в [6, теоремы 1.1 и 1.4]. В статье [7, теорема 1] для функций $f \in L_p(\mathbb{T})$ с монотонными коэффициентами Фурье была независимо доказана справедливость импликации $\omega_2(f;\delta)_p = \mathcal{O}(\delta) \Rightarrow \omega_1(f;\delta)_p = \mathcal{O}(\delta(\ln(\pi e/\delta))^{1/p})$, $\delta \in (0,\pi]$, которая также следует из оценки сверху в (1.5). Отметим, что оценки сверху и снизу в (1.2) являются уточнениями на классе функций $f \in L_p(\mathbb{T})$ с квазимонотонными коэффициентами Фурье соответствующих неравенств, установленных в [8, теорема 1, неравенства (7)] (оценка сверху в (1.2) с показателем $\theta = \min\{2,p\}$ вместо p) и [9, неравенство (2)] (оценка снизу в (1.2) с показателем $\beta = \max\{2,p\}$ вместо p) для произвольных функций $f \in L_p(\mathbb{T})$.

Для заданных чисел $r \in \mathbb{Z}_+$ и $1 < p < \infty$ обозначим через $M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ класс всех функций $f \in L_p(\mathbb{T})$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условиям $a_0(f) = 0$, $0 < n^r a_n(f) \downarrow 0$, $0 < n^r b_n(f) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$ (в случае $r = 0$ полагаем $M_p^{(0)}(\mathbb{T}) \equiv M_p(\mathbb{T})$).

В этой работе получены различного типа порядковые равенства на классе $M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ для величин $\|f^{(r)}\|_p$, $E_{n-1}(f^{(r)})_p$ и $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p$ в терминах выражений, содержащих элементы последовательностей $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$, где $1 < p < \infty$, $r,k,l \in \mathbb{N}$, $l > r$.

Для краткости и удобства изложения при $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $l,r \in \mathbb{N}$, $l > r$, $\gamma \in [1,\infty)$ введем также обозначения:

$$E^{(\gamma)}(f;p;r) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma r-1} E_{n-1}^{\gamma}(f)_p\right)^{1/\gamma}, \quad \Omega^{(\gamma)}(f;p;l;r) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma r-1} \omega_l^{\gamma}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\right)^{1/\gamma};$$

при $\gamma = p$ полагаем $E^{(p)}(f;p;r) := E(f;p;r)$, $\Omega^{(p)}(f;p;l;r) := \Omega(f;p;l;r)$.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $k,r \in \mathbb{N}$. Для того чтобы функция $f \in M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ принадлежала классу $L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$E(f;p;r) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{pr-1} E_{n-1}^{p}(f)_p\right)^{1/p} < \infty, \tag{1.6}$$

при этом имеют место следующие порядковые равенства:

1) $\|f^{(r)}\|_p \asymp C_{10}(r,p) E(f;p;r)$;

2) $E_{n-1}(f^{(r)})_p \asymp C_{11}(r,p)\left\{n^r E_{n-1}(f)_p + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{pr-1} E_{\nu-1}^{p}(f)_p\right)^{1/p}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$;

3) $\omega_k\Big(f^{(r)};\dfrac{\pi}{n}\Big)_p \asymp C_{12}(k,r,p)\left\{n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{p(k+r)-1} E_{\nu-1}^{p}(f)_p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{pr-1} E_{\nu-1}^{p}(f)_p\right)^{1/p}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е 2.

1) Оценки сверху и снизу в п. 1) теоремы 1 являются уточнениями на классе $M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ соответствующих неравенств из [10, неравенства (4) и (6), неравенства (5) и (7)], установленных в несколько иной, но эквивалентной следующей формулировке: если f из $L_p(\mathbb{T})$ и $E^{(\theta)}(f;p;r) < \infty$, где $\theta = \min\{2,p\}$, то $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и $\|f^{(r)}\|_p \le C_{13}(r,p) E^{(\theta)}(f;p;r)$; если $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, то $E^{(\beta)}(f;p;r) < \infty$, где $\beta = \max\{2,p\}$, и $E^{(\beta)}(f;p;r) \le C_{14}(r,p)\|f^{(r)}\|_p$. Оценка сверху в п. 3) теоремы 1 (с показателем $\theta = \min\{2,p\}$ вместо p) для произвольных функций $f \in L_p(\mathbb{T})$, удовлетворяющих условию $E^{(\theta)}(f;p;r) < \infty$, фактически получена в [10, теорема 2].

2) Автором предложен метод, позволяющий доказывать оценки сверху и снизу в пп. 1)–3) утверждения теоремы 1 для функций $f \in L_p(\mathbb{T})$ соответственно при выполнении условий $E^{(\theta)}(f;p;r) < \infty$ для оценок сверху и $f \in L_p^{(r)}$ для оценок снизу (см. [11, разд. 2, леммы 2 и 3]). В этой же статье [11, разд. 1, первый абзац после замечания 8] приведено доказательство равенства (1.3).

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $l, k, r \in \mathbb{N}$, $l > r$. *Для того чтобы функция* f *из* $M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *принадлежала классу* $L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\Omega(f;p;l;r) := \biggl(\sum_{n=1}^{\infty} n^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\biggr)^{1/p} < \infty, \tag{1.7}$$

при этом имеют место порядковые равенства

1) $\|f^{(r)}\|_p \asymp C_{15}(l,r,p)\Omega(f;p;l;r)$;

2) $E_{n-1}(f^{(r)})_p + n^r\omega_l\Bigl(f;\dfrac{\pi}{n}\Bigr)_p \asymp C_{16}(l,r,p)\biggl(\displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}$;

3) $n^{-(l-r)}\biggl(\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\biggr)^{1/p} \asymp C_{17}(l,r,p)\biggl(\displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}$;

4) $\omega_k\Bigl(f^{(r)};\dfrac{\pi}{n}\Bigr)_p \asymp C_{18}(l,k,r,p)\biggl(\displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad l = k + r$;

5) $$\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p \asymp C_{19}(l,k,r,p)\biggl\{\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p} + n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}\biggr\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad l > k + r;$$

6) $\omega_k\Bigl(f^{(r)};\dfrac{\pi}{n}\Bigr)_p + n^r\omega_l\Bigl(f;\dfrac{\pi}{n}\Bigr)_p \asymp C_{20}(l,k,r,p)\biggl(\displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad l < k + r$;

7) $n^{-(l-r)}\biggl(\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}\omega_k^p\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p} \asymp C_{21}(l,k,r,p)\biggl(\displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}$,

$n \in \mathbb{N}, \quad l < k + r$.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $l, r \in \mathbb{N}$, $l > r$ *и* $\Omega(f;p;l;r) < \infty$; *тогда для каждой функции* $f \in M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *имеют место порядковые равенства*

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p + n^r\omega_l\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p \asymp C_{16}(l,r,p)\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}$$
$$\asymp C_{22}(l,r,p)n^{-(l-r)}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\biggr)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Следствие 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $l, k, r \in \mathbb{N}$, $r < l < k + r$ *и* $\Omega(f;p;l;r) < \infty$; *тогда для каждой функции* $f \in M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *имеют место порядковые равенства*

$$\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p + n^r\omega_l\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p \asymp C_{20}(l,k,r,p)\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}$$

$$\asymp C_{23}(l,k,r,p)n^{-(l-r)}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}\omega_k^p\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Следствие 3. *Пусть* $1<p<\infty$, $l,k,r\in\mathbb{N}$, $r<l<k+r$ *и* $\Omega(f;p;l;r)<\infty$; *тогда для каждой функции* $f\in M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *имеют место порядковые равенства*

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p+n^r\omega_l\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\asymp C_{24}(l,k,r,p)\Bigl\{\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p+n^r\omega_l\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\Bigr\}$$

$$\asymp C_{25}(l,k,r,p)n^{-(l-r)}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\biggr)^{1/p}$$

$$\asymp C_{26}(l,k,r,p)n^{-(l-r)}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}\omega_k^p\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Замечание 3.

1) Равенства (1.8) и (1.9) следуют соответственно из сопоставления равенств в пп. 2), 3) и в пп. 6), 7) утверждения теоремы 2, а равенство (1.10) является следствием (1.8) и (1.9). Формулировка в виде отдельных следствий выделенных порядковых равенств преследует цель привлечь внимание к разнообразию соотношений между величинами $E_{n-1}(f^{(r)})_p$, $\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p$ и $\omega_l(f;\pi/n)_p$, которое, как правило, необозримо при установлении различных неравенств между ними в общем случае.
2) При оценке снизу в пп. 2) и 6) теоремы 2 второе слагаемое $n^r\omega_l(f;\pi/n)_p$, $n\in\mathbb{N}$, в общем случае не допускает исключения. Однако при условии определенной регулярности в поведении последовательностей $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^\infty$ либо $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^\infty$ исключение указанной величины возможно (см. ниже теорему 3).

Обозначим через $B_l^{(\alpha)}$ класс всех последовательностей $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ ($0<\varphi_n\downarrow 0$ при $n\uparrow\infty$), удовлетворяющих так называемому ($B_l^{(\alpha)}$)-условию Н. К. Бари: $n^{-l}\bigl(\sum_{\nu=1}^n\nu^{\alpha l-1}\varphi_\nu^\alpha\bigr)^{1/\alpha}=\mathcal{O}(\varphi_n)$, $n\in\mathbb{N}$, где $\alpha\in[1,\infty)$, $l\in\mathbb{N}$. При $\alpha=1$ это условие совпадает с известным (B_l)-условием Н. К. Бари, которое равносильно (S_l)-условию С. Б. Стечкина: существует $\varepsilon\in(0,l)$ такое, что последовательность $\{n^{l-\varepsilon}\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ почти возрастает (см., например, [12, § 2]; там же приведены эквивалентные описания этих условий).

Известно (см., например, [13, Введение, замечание 5; разд. 3, п. 2]), что условия

$$\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^\infty\in B_l^{(\alpha)}\quad\text{и}\quad\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^\infty\in B_l^{(\alpha)}$$

равносильны при любых $\alpha\in[1,\infty)$, $f\in L_p(\mathbb{T})$, $1\le p\le\infty$, $l\in\mathbb{N}$; кроме того, в силу последнего утверждения имеем $\bigl\{E_{n-1}(f)_p\bigr\}\in B_l^{(\alpha)}\Leftrightarrow\bigl\{E_{n-1}(f)_p\bigr\}\in B_l^{(\beta)}$, $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}\in B_l^{(\alpha)}\Leftrightarrow\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}\in B_l^{(\beta)}$ при любых $\alpha,\beta\in[1,\infty)$ и, следовательно, $\{E_{n-1}(f)_p\}\in B_l^{(\alpha)}\Leftrightarrow\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}\in B_l^{(\beta)}$.

Теорема 3. *Пусть* $1<p<\infty$, $l,k,r\in\mathbb{N}$, $r<l<k+r$, $f\in M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и* $\Omega(f;p;l;r)<\infty$. *Если*

$$\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^\infty\in B_l^{(p)}\quad\textit{либо}\quad\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^\infty\in B_l^{(p)},$$

то справедливы порядковые равенства

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p\asymp C_{27}(l,r,p)\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}\asymp C_{28}(l,k,r,p)\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{x}{n}\Bigr)_p,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{1.11}$$

З а м е ч а н и е 4.

1) В силу п. 3) в утверждении теоремы 2 имеем: для справедливости равенства в левой части (1.11) необходимо и достаточно, чтобы $\{E_{n-1}(f^{(r)})_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_{l-r}^{(p)},\ r < l$.
2) В силу п. 7) в утверждении теоремы 2 имеем: для справедливости равенства в правой части (1.11) необходимо и достаточно, чтобы $\{\omega_k(f^{(r)}; \pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_{l-r}^{(p)},\ l < k + r$.

2. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

Вначале приведем несколько простых замечаний относительно последовательностей $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям: $d_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$, и $n^r d_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$, где $r \in \mathbb{N}$.

(*a*) Если $n^r d_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$, то $d_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$. Действительно, если $n^r d_n \downarrow\ (n \uparrow)$, то $n^r d_n \geq (n+1)^r d_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$, откуда $d_n \geq ((n+1)/n)^r d_{n+1} = (1 + 1/n)^r d_{n+1} > d_{n+1}$, и, следовательно, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ — строго убывающая последовательность. Далее, если $n^r d_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} n^r d_n \cdot \lim_{n\to\infty} n^{-r} = 0$.

(*b*) Если $d_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$, то $n^{-\tau} d_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$ при любом $\tau > 0$, и тем более $n^{-\gamma} d_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ при любом $\gamma > \tau$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: существуют немонотонные последовательности $d_n \to 0\ (n \to \infty)$ такие, что $n^{-\tau_0} d_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$ при некотором $\tau_0 > 0$. Например, последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $y_{2k-1} = (2k+1)^{-1}$, $y_{2k} = (2k)^{-1},\ k \in \mathbb{N}$, не является монотонной и $y_n \to 0\ (n \to \infty)$, однако $n^{-1} y_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$, поскольку $(2k-1)^{-1} y_{2k-1} = (4k^2 - 1)^{-1} > (4k^2)^{-1} = (2k)^{-1} y_{2k} > (2k+1)^{-1} y_{2k+1} = (4(k+1)^2 - 1)^{-1},\ k \in \mathbb{N}$.

(*c*) Если $n^{-\tau_0} d_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$ для некоторого $\tau_0 > 0$, то последовательность $\{n^r d_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазимонотонна с показателем $r + \tau_0$, и, следовательно, $\{n^r d_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазимонотонна с любым показателем $\tau \geq r + \tau_0:\ n^{-\tau}(n^r d_n) = n^{-\tau_0} d_n n^{-(\tau - r - \tau_0)} \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$.

Первая часть следующего утверждения в случае $r = 0$ представляет известный результат Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см., например, [14, гл. 10, § 3; 15, т. 2, гл. 12, лемма 6.6]).

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty, r \in \mathbb{Z}_+,\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, *где* $n^r a_n \downarrow 0$, $n^r b_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$. *Тогда* $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{pr+p-2}(a_n + b_n)^p < \infty$, *при этом* $a_n = a_n(f)$, $b_n = b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, *и справедливы оценки*

$$C_{29}(p)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{pr+p-2}(a_n(f) + b_n(f))^p\right)^{1/p} \leq \|f^{(r)}\|_p \leq C_{30}(p)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{pr+p-2}(a_n(f) + b_n(f))^p\right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как было отмечено выше, в случае $r = 0$ первая часть утверждения леммы 1 известна:

$$f \in L_p(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}(a_n + b_n)^p < \infty, \quad \text{где} \ \ 0 < a_n \downarrow 0, \quad 0 < b_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty).$$

Приведенный в указанных источниках [14;15] метод доказательства (в части — необходимость) позволяет утверждать, что ряд, определяющий функцию f, сходится всюду за исключением, быть может, счетного множества точек $x \equiv 0 \,(\operatorname{mod} 2\pi)$ (см., например, [14, гл. 1, § 30]) и является рядом Фурье этой функции, так что $a_n = a_n(f),\ b_n = b_n(f),\ n \in \mathbb{N}$. Кроме того, подробное рассмотрение доказательства показывает справедливость оценок (2.1) при $r = 0$.

Рассмотрим случай $r \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\sigma(f; p; r)$ ряд, выписанный в (2.1). Поскольку $0 < n^r a_n \downarrow 0,\ 0 < n^r b_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$, то почти всюду на $\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = g(x) \equiv g(x; r; f) \quad (g(x; 0; f) \equiv f(x)),$$

где $g(x)$ — сумма указанного ряда, откуда следует, что

$$g(\cdot;r;f)\in L_p(\mathbb{T})\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}(n^r a_n+n^r b_n)<\infty,$$

при этом $a_n(g)=n^r a_n=n^r a_n(f)$, $b_n(g)=n^r b_n=n^r b_n(f)$, $n\in\mathbb{N}$, и справедливы оценки

$$C_{31}(p)\sigma(f;p;r)\le\|g(\cdot;r;f)\|_p\le C_{32}(p)\sigma(f;p;r). \tag{2.2}$$

Здесь и в дальнейшем нам понадобятся известные неравенства М. Рисса [16, разд. 1, п. 8, с. 225, неравенство (11) и разд. 2, п. 13, с. 230, неравенство (30)] (см. также [14, гл. 8, § 14, неравенство (14.5) и § 20, теорема 1; 15, т. 1, гл. 7, разд. 2, теорема 2.4, неравенство (2.5) и разд. 6, теорема (6.4), неравенства (6.5)]):

$$\|\widetilde{\psi}\|_p\le C_{33}(p)\|\psi\|_p\ \text{ и }\ \|S_n(\psi;\cdot)\|_p\le C_{34}(p)\|\psi\|_p,\quad\text{где}\quad\psi\in L_p(\mathbb{T}),\quad 1<p<\infty,$$

$\widetilde{\psi}$ — функция, тригонометрически сопряженная ψ, $S_n(\psi;x)$ — частная сумма порядка $n\in\mathbb{N}$ ряда Фурье функции ψ. В качестве следствий из этих неравенств выводится справедливость следующих утверждений (см. [16, разд. 1, п. 9, с. 226, теорема III и разд. 2, п. 14, с. 230, равенство (31); 14, гл. 8, § 20, теорема 2; 15, т. 1, гл. 7, разд. 6, теорема (6.4), неравенства (6.6)]): $\psi\in L_p(\mathbb{T})\Leftrightarrow\widetilde{\psi}\in L_p(\mathbb{T})$, при этом ряд, сопряженный ряду Фурье функции ψ, совпадает с рядом Фурье сопряженной функции $\widetilde{\psi}$; имеют место предельные соотношения

$$\|\psi(\cdot)-S_n(\psi;\cdot)\|_p\to 0,\quad\|\widetilde{\psi}(\cdot)-\widetilde{S}_n(\psi;\cdot)\|_p\to 0\ \ (n\to\infty).$$

Покажем, что если $\sigma(f;p;r)<\infty$, то $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и $\|f^{(r)}\|_p\le C_{35}(p)\sigma(f;p;r)$. Поскольку

$$\sigma(f;p;r)<\infty\Rightarrow\sigma(f;p;0)<\infty\Rightarrow f(\cdot)\equiv g(\cdot;0;f)\in L_p(\mathbb{T}),$$

то $\|f(\cdot)-S_n(f;\cdot)\|_p\to 0$ $(n\to\infty)$. Далее, из правой оценки в (2.2) следует включение $g(\cdot;r;f)\in L_p(\mathbb{T})$, так что $\|g(\cdot)-S_n(g;\cdot)\|_p\to 0$ $(n\to\infty)$ и $\|\widetilde{g}(\cdot)-\widetilde{S}_n(g;\cdot)\|_p\to 0$ $(n\to\infty)$.

В случае четного r имеем $S_n^{(r)}(f;x)=(-1)^{r/2}S_n(g;x)$, откуда

$$\|(-1)^{r/2}g(\cdot;r;f)-S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p=\|g(\cdot;r;f)-S_n(g;\cdot)\|_p\to 0\ \ (n\to\infty).$$

В случае нечетного r имеем $S_n^{(r)}(f;x)=(-1)^{(r+5)/2}\widetilde{S}_n(g;x)$, откуда

$$\|(-1)^{(r+5)/2}\widetilde{g}(\cdot;r;f)-S_n^{(r)}(f;\cdot)\|_p=\|\widetilde{g}(\cdot;r;f)-\widetilde{S}_n(g;\cdot)\|_p\to 0\ \ (n\to\infty).$$

Отсюда следует (см., например, [4, гл. 6, разд. 6.3, лемма 6.3.31]), что $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и производная $f^{(r)}(x)$ почти всюду совпадает с $(-1)^{r/2}g(x;r;f)$ при четном r и с $(-1)^{(r+5)/2}\widetilde{g}(x;r;f)$ при нечетном r, так что $\|f^{(r)}\|_p=\|g(\cdot;r;f)\|_p$ при четном r и $\|f^{(r)}\|_p=\|\widetilde{g}(\cdot;r;f)\|_p$ при нечетном r.

В случае четного r в силу правой оценки в (2.2) имеем $\|f^{(r)}\|_p\le C_{32}(p)\sigma(f;p;r)$, а в случае нечетного r, применяя первое неравенство М. Рисса и учитывая правую оценку в (2.2), получаем

$$\|f^{(r)}\|_p=\|\widetilde{g}(\cdot;r;f)\|_p\le C_{33}(p)\|g(\cdot;r;f)\|_p\le C_{33}(p)C_{32}(p)\sigma(f;p;r).$$

Осталось убедиться в том, что если $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, то $\sigma(f;p;r)<\infty$ и $\sigma(f;p;r)\le C_{36}(p)\|f^{(r)}\|_p$. Поскольку (см. (2.2)) $\sigma(f;p;r)\asymp C_{37}(p)\|g(\cdot;r;f)\|_p$, то для этого достаточно установить справедливость импликации $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})\Rightarrow\|g(\cdot;r;f)\|_p<\infty$ и оценки $\|g(\cdot;r;f)\|_p\le C_{38}(p)\|f^{(r)}\|_p$. Если $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, то почти всюду существующая производная $f^{(r)}(x)=(-1)^{r/2}g(x;r;f)$ при четном r и $f^{(r)}(x)=(-1)^{(r+5)/2}\widetilde{g}(x;r;f)$ при нечетном r, а поскольку $f^{(r)}\in L_p(\mathbb{T})$, то

$$\|g(\cdot;r;f)\|_p = \|f^{(r)}\|_p < \infty \quad \text{при четном} \quad r$$

$$\text{и} \quad \|g(\cdot;r;f)\|_p \le C_{33}(p)\|\widetilde{g}(\cdot;r;f)\|_p = C_{33}(p)\|f^{(r)}\|_p < \infty \quad \text{при нечетном} \quad r. \qquad \square$$

З а м е ч а н и е 5. В случае $r = 1$ первая часть утверждения леммы 1 и левая оценка в (2.1) установлены другим способом в [7, разд. 1, п. (ii) утверждения теоремы 3].

Следующее утверждение в случае $r = 0$ доказано в [17, § 1, теорема 4, неравенство (1.21); 18, § 2, неравенство (21)].

Лемма 2. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, *где* $n^r a_n \downarrow 0$, $n^r b_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{pr+p-2}(a_n + b_n)^p < \infty \quad \text{\textit{при некотором}} \quad 1 < p < \infty.$$

Тогда $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и справедлива оценка*

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p \le C_{39}(p)\Biggl\{n^{r+1-1/p}(a_n + b_n) + \biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{pr+p-2}(a_\nu + b_\nu)^p\biggr)^{1/p}\Biggr\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

При $p \ge 2$ *в правой части* (2.3) *первое слагаемое можно опустить.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу первой части утверждения леммы 1 из сходимости ряда в условии данной леммы следует, что $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, при этом $a_n = a_n(f)$, $b_n = b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, и справедлива оценка $\|g(\cdot;r;f)\|_p \le C_{32}(p)\sigma(f;p;r) = C_{32}(p)\bigl(\sum_{n=1}^{\infty} n^{pr+p-2}(a_n + b_n)^p\bigr)^{1/p} < \infty$, где $g(x;r;f)$ — функция, рассмотренная в доказательстве леммы 1. Применяя к функции $g(x;r;f)$, где $r \in \mathbb{N}$, установленную в [17; 18] для случая $r = 0$ оценку (2.3), получим

$$E_{n-1}(g)_p \le C_{40}(p)\Biggl\{n^{r+1-1/p}(a_n + b_n) + \biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{pr+p-2}(a_\nu + b_\nu)^p\biggr)^{1/p}\Biggr\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Так как $g(x;r;f) = (-1)^{r/2} f^{(r)}(x)$ при четном r, то $E_{n-1}(g)_p = E_{n-1}(f^{(r)})_p$. При нечетном r имеем $g(x;r;f) = (-1)^{(r+3)/2}\widetilde{f}^{(r)}(x)$, откуда $\widetilde{g}(x;r;f) = (-1)^{(r+3)/2}\widetilde{\widetilde{f}}^{(r)}(x) = (-1)^{(r+5)/2} f^{(r)}(x)$, и в силу первого неравенства М. Рисса (см. доказательство леммы 1), неравенства $\|\psi(\cdot) - S_n(\psi;\cdot)\|_p \le (1 + C_{34}(p))E_n(\psi)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$, вытекающего из оценки, установленной в [19, с. 539, п. i) леммы C], выводим

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p = E_{n-1}(\widetilde{g})_p \le \|\widetilde{g}(\cdot) - \widetilde{S}_{n-1}(g;\cdot)\|_p \le C_{33}(p)\|g(\cdot) - S_{n-1}(g;\cdot)\|_p$$

$$\le C_{33}(p)(1 + C_{34}(p))E_{n-1}(g)_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что в случае нечетного r на самом деле $E_{n-1}(g)_p \asymp C_{41}(p)E_{n-1}(f^{(r)})_p$, $n \in \mathbb{N}$, поскольку

$$E_{n-1}(g)_p \le \|g(\cdot) - S_{n-1}(g;\cdot)\|_p \le C_{33}(p)\|\widetilde{g}(\cdot) - \widetilde{S}_{n-1}(g;\cdot)\|_p = C_{33}(p)\|\widetilde{g}(\cdot) - S_{n-1}(\widetilde{g};\cdot)\|_p$$

$$= C_{33}(p)\|f^{(r)}(\cdot) - S_{n-1}(f^{(r)};\cdot)\|_p \le C_{33}(p)(1 + C_{34}(p))E_{n-1}(f^{(r)})_p.$$

Учитывая приведенные выше равенство $E_{n-1}(f^{(r)})_p = E_{n-1}(g)_p$ (r — четное) и неравенство $E_{n-1}(f^{(r)})_p \le C_{42}(p)E_{n-1}(g)_p$ (r — нечетное) в (2.4), получим требуемую оценку в (2.3). $\square$

Лемма 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $l, r \in \mathbb{N}$, $l > r$ *и* $f \in M_p^{(r)}(\mathbb{T})$; *тогда*

1) $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow E(f;p;r) < \infty$, *при этом* $\|f^{(r)}\|_p \asymp C_{43}(r,p)E(f;p;r) \asymp C_{44}(r,p)\sigma(f;p;r)$;

2) $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \Omega(f;p;l;r) < \infty$, *при этом* $\|f^{(r)}\|_p \asymp C_{45}(l,r,p)\Omega(f;p;l;r) \asymp C_{46}(l,r,p)\sigma(f;p;r)$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение 1), поскольку в силу равенства (1.3) (полагаем $k = r$, $\alpha = p$) имеем $E(f;p;r) \asymp C_7(l,r,p)\Omega(f;p;l;r)$, и, следовательно, $E(f;p;r) < \infty \Leftrightarrow \Omega(f;p;l;r) < \infty$.

Если $E(f;p;r) < \infty$, то, учитывая включение $M_p^{(r)}(\mathbb{T}) \subset M_p(\mathbb{T})$, в силу неравенства (см. [17, § 1, следствие 2, неравенство (1.19)]) $a_n(f) + b_n(f) \le C_{47}(l,p)n^{1/p-1}\omega_l(f;\pi/n)_p$, где $l \in \mathbb{N}$, имеем

$$\sigma(f;p;r) \le C_{47}(r+1,p)\Omega(f;p;r+1;r) \asymp C_{48}(r,p)E(f;p;r) < \infty,$$

откуда в силу первой части утверждения леммы 1 и правой оценки в (2.1) получаем, что $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и $\|f^{(r)}\|_p \le C_{30}(p)\sigma(f;p;r) \le C_{49}(r,p)E(f;p;r)$.

С другой стороны, если $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, то, применяя оценку (2.3) при $r = 0$ и учитывая левую оценку в (2.1), получим $(M_p^{(r)}(\mathbb{T}) \subset M_p(\mathbb{T}))$

$$\begin{aligned}(E(f;p;r))^p &\le C_{39}^p(p)2^{p-1}\biggl\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{pr+p-2}(a_n+b_n)^p + \sum_{n=1}^{\infty} n^{pr-1}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}(a_\nu+b_\nu)^p\biggr\} \\ &\le C_{39}^p(p)2^{p-1}\biggl\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{pr+p-2}(a_n+b_n)^p + \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{p-2}(a_\nu+b_\nu)^p\sum_{n=1}^{\nu} n^{pr-1}\biggr\} \\ &\le C_{39}^p(p)2^p(\sigma(f;p;r))^p \le 2^pC_{39}^p(p)(C_{29}^p(p))^{-1}\|f^{(r)}\|_p^p,\end{aligned}$$

откуда следует, что $E(f;p;r) < \infty$ и $E(f;p;r) \le 2C_{39}(p)\sigma(f;p;r) \le 2C_{39}(p)C_{29}^{-1}(p)\|f^{(r)}\|_p$. □

Лемма 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и* $E(f;p;r) < \infty$; *тогда* $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и справедлива оценка*

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p \le C_{50}(r,p)\biggl\{n^rE_{n-1}(f)_p + \biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\biggr)^{1/p}\biggr\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Из сходимости ряда $E(f;p;r) < \infty$ в силу п. 1) леммы 3 следует, что $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и справедлива оценка $\|f^{(r)}\|_p \le C_{51}(r,p)E(f;p;r)$. Требуемая оценка (2.5) устанавливается привлечением последней аналогично доказательству неравенства п. 2) в утверждении леммы 2 из [11, разд. 2] с предварительной заменой показателя $\theta = \min\{2,p\}$ в неравенстве $\|f^{(r)}\|_p \le C_{52}(r,p)E(f;p;r;\theta)$ (см. [11, разд. 2, п. 1) леммы 2]) на показатель p. Отметим, что величина $E(f;p;r;\theta) := E^{(\theta)}(f;p;r)$ в случае $\theta = p$ совпадает с $E(f;p;r)$. □

В заключение приведем одну простую, но общую лемму, позволяющую судить о роли условия $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_l^{(\alpha)}$, где $\alpha \in [1,\infty)$, в формулировке утверждения теоремы 3.

Лемма 5. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $l,k \in \mathbb{N}$, $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и* $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_l^{(\alpha)}$ *при некотором* $\alpha \in [1,\infty)$; *тогда справедливы оценки*

$$n^r\omega_l\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p \le C_{53}(l,r)E_{n-1}(f^{(r)})_p \le C_{54}(l,k,r)\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Поскольку $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_l^{(\alpha)} \Leftrightarrow \{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_l^{(1)}$, то в силу правой и левой оценок в (1.1) имеем

$$n^r\omega_l\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p \preccurlyeq n^{r-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}E_{\nu-1}(f)_p \preccurlyeq n^rE_{n-1}(f)_p \preccurlyeq E_{n-1}(f^{(r)})_p \preccurlyeq \omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p,$$

откуда и следуют требуемые оценки. □

Замечание 6. Из утверждения леммы 5 следует, что если в условиях теоремы 2 последовательность $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_l^{(p)}$, то при оценке снизу в пп. 2) и 6) второе слагаемое $n^r\omega_l(f;\pi/n)_p$ можно опустить.

3. Доказательство теорем 1, 2 и 3

Для удобства и краткости изложения примем следующее соглашение: если известны параметры в используемых ниже порядковых равенствах либо неравенствах, то при доказательстве соответствующих утверждений обозначение постоянной величины, содержащей эти параметры, мы будем опускать (при условии отсутствия особой необходимости), т. е. вместо обозначений $\varphi_n \asymp C_4(k,r,p,\dots)\psi_n \Leftrightarrow C_5(k,r,p,\dots)\psi_n \le \varphi_n \le C_6(k,r,p,\dots)\psi_n$ будем соответственно использовать обозначения $\varphi_n \asymp \psi_n \Leftrightarrow \psi_n \preccurlyeq \varphi_n \preccurlyeq \psi_n \Leftrightarrow \psi_n \preccurlyeq \varphi_n$ и $\varphi_n \preccurlyeq \psi_n$.

Доказательство теоремы 1. 1) Первая часть утверждения теоремы 1 и равенство 1) при выполнении условия (1.6) установлены в п. 1) леммы 3.

2) Оценка сверху в равенстве 2) утверждения теоремы 1 при выполнении условия $E(f;p;r) < \infty$ приведена в лемме 4. Оценка снизу в этом равенстве получается аналогично доказательству неравенства 2) в утверждении леммы 3 из [11, разд. 2] с предварительной заменой показателя $\beta = \max\{2,p\}$ в неравенстве $E(f;p;r;\beta) \le C_{55}(r,p)\|f^{(r)}\|_p$ (см. [11, разд. 2, п. 1) леммы 3]) на показатель p. Отметим, что $E(f;p;r;\beta) := E^{(\beta)}(f;p;r)$ в случае $\beta = p$ совпадает с $E(f;p;r)$.

3) *Оценка сверху*: привлекая оценку (2.5) из леммы 4 в равенстве (1.2), имеем

$$n^{pk}\omega_k^p\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p \asymp \sum_{\nu=1}^{n}\nu^{pk-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p \preccurlyeq \sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}E_{\nu-1}^p(f)_p$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{pk-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{pr-1}E_{\mu-1}^p(f)_p + \sum_{\nu=1}^{n}\nu^{pk-1}\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{pr-1}E_{\mu-1}^p(f)_p$$

$$\preccurlyeq \sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}E_{\nu-1}^p(f)_p + \sum_{\mu=1}^{n}\mu^{pr-1}E_{\mu-1}^p(f)_p\sum_{\nu=1}^{\mu}\nu^{pk-1} + n^{pk}\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{pr-1}E_{\mu-1}^p(f)_p$$

$$\preccurlyeq 2\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}E_{\nu-1}^p(f)_p + n^{pk}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p,$$

откуда и следует оценка

$$\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p \preccurlyeq n^{-k}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p} + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Оценка снизу: в силу равенства (1.2), доказанной оценки снизу в п. 2) утверждения доказываемой теоремы и левого неравенства в (1.1) получаем

$$n^{-k}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p} + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p}$$

$$\preccurlyeq n^r\omega_{k+r}\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p + E_{n-1}(f^{(r)})_p \preccurlyeq (\pi^r + C_1(k))\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. 1) Первая часть утверждения теоремы 2 и равенство п. 1) при выполнении условия (1.7) установлены в п. 2) леммы 3.

2) *Оценка сверху*: в силу оценки (2.5) из леммы 4 и левого неравенства в (1.1) имеем

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p + n^r\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \preccurlyeq n^rE_{n-1}(f)_p + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p} + n^r\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p$$

$$\preccurlyeq n^r\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p+\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/p}\preccurlyeq\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/p}, \tag{3.2}$$

поскольку (см., например, [13, разд. 2, неравенство (2.1)])

$$n^r\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\preccurlyeq C_{56}(l,r,\alpha)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\alpha r-1}\omega_l^{\alpha}\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\alpha},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{3.3}$$

где $C_{56}(l,r,\alpha)=2^l(2^{\alpha r}-1)^{-1/\alpha}(\alpha r)^{1/\alpha},\ \alpha\in[1,\infty)$.

Оценка снизу: в силу равенства (1.2) (полагаем $k=l$) имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\asymp\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p(r-l)-1}\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{pl-1}E_{\mu-1}^p(f)_p$$

$$=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-p(l-r)-1}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{pl-1}E_{\mu-1}^p(f)_p+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p(r-l)-1}\sum_{\mu=n+1}^{\nu}\mu^{pl-1}E_{\mu-1}^p(f)_p$$

$$\asymp n^{-p(l-r)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{pl-1}E_{\mu-1}^p(f)_p+\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{pl-1}E_{\mu-1}^p(f)_p\sum_{\nu=\mu}^{\infty}\nu^{-p(l-r)-1}$$

$$\asymp\Big(n^r\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big)^p+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p,$$

откуда, учитывая оценку снизу в п. 2) утверждения теоремы 1, получаем

$$\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/p}\preccurlyeq E_{n-1}(f^{(r)})_p+n^r\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.4}$$

3) *Оценка сверху*: аналогично доказательству оценки сверху в п. 3) утверждения теоремы 1 имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\preccurlyeq\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{pl-1}E_{\nu-1}^p(f)_p+n^{p(l-r)}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p,$$

откуда следует оценка

$$n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\bigg)^{1/p}\preccurlyeq n^{r-l}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{pl-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p}+\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p},$$

учитывая в которой равенство (1.2), а также применяя левую оценку в (1.1) и оценку (3.3), получим

$$n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\bigg)^{1/p}\preccurlyeq\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Оценка снизу: применяя в оценке (3.4) очевидное неравенство

$$n^{r-l}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\bigg)^{1/p}\geq(p(l-r))^{-1/p}E_{n-1}(f^{(r)})_p,$$

оценку сверху в равенстве (1.2) и известное неравенство (см., например, [4, гл. 5, п. 5.11.4]) $E_{n-1}(\psi)_p\leq C_{57}(r)n^{-r}E_{n-1}(\psi^{(r)})_p,\ n\in\mathbb{N}$, где $\psi\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, $1\leq p\leq\infty$, имеем

$$\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/p}\preccurlyeq E_{n-1}(f^{(r)})_p+n^r\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p$$

$$\preccurlyeq n^{r-l}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^{p}(f^{(r)})_p\biggr)^{1/p}+n^{r-l}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{pl-1}E_{\nu-1}^{p}(f)_p\biggr)^{1/p}$$

$$\preccurlyeq n^{-(l-r)}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^{p}(f^{(r)})_p\biggr)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.6}$$

4) *Оценка сверху*: повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве неравенства (218) [20, гл. 3, § 6, теорема 7], применительно к пространству $L_p(\mathbb{T})$, где $1<p<\infty$, получаем, что для любой функции $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$ справедлива оценка

$$\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\le 2^k(1+C_{34}(p))E_n(f^{(r)})_p+2^{-(k+r)}\pi^kC_{34}(p)n^r\omega_{k+r}\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p$$

$$\le C_{58}(k,r,p)\Bigl\{E_{n-1}(f^{(r)})_p+n^r\omega_{k+r}\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\Bigr\},$$

где $C_{34}(p)$ — постоянная во втором неравенстве М. Рисса (см. разд. 2, доказательство леммы 1), откуда в силу оценки (3.2) (полагаем $l=k+r$) имеем

$$\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\preccurlyeq\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_{k+r}^{p}\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Оценка снизу: полагая $l=k+r$ в оценке (3.4) и применяя левую оценку из (1.1), получаем

$$\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_{k+r}^{p}\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}\preccurlyeq E_{n-1}(f^{(r)})_p+n^r\omega_{k+r}\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p$$

$$\preccurlyeq C_1(k)\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p+\pi^r\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\preccurlyeq(C_1(k)+\pi^r)\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p. \tag{3.8}$$

5) *Оценка сверху*: применяя левую оценку в (1.1) (вместо k полагаем $l>k+r$) в оценке (3.1), имеем

$$\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\preccurlyeq C_1(l)\biggl\{n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}+\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}\biggr\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Оценка снизу: в силу равенства (1.3) ($l>k+r$), оценки (3.8) и оценки снизу в равенстве (1.2) получаем

$$\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}+n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}$$

$$\preccurlyeq 2^{l-(k+r)}\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_{k+r}^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}+n^{-k}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\biggr)^{1/p}$$

$$\preccurlyeq\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p+n^r\omega_{k+r}\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\preccurlyeq(1+\pi^r)\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p,\quad n\in\mathbb{N}.$$

6) *Оценка сверху*: в силу оценок (3.7) и (3.3) имеем (при $l<k+r$)

$$\omega_k\Bigl(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Bigr)_p+n^r\omega_l\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\preccurlyeq\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_{k+r}^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}$$

$$+\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p}\preccurlyeq(2^{k+r-l}+1)\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Оценка снизу: в силу оценки (3.4) и левой оценки в (1.1) получаем

$$\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}\omega_l^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/p}\preccurlyeq E_{n-1}(f^{(r)})_p+n^r\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\preccurlyeq C_1(k)\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p+n^r\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p.$$

7) *Оценки сверху и снизу*: поскольку $l<k+r\Leftrightarrow l-r<k$, то в силу равенства (1.3) имеем

$$n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}\omega_k^p\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p\bigg)^{1/p}\asymp n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\bigg)^{1/p},$$

откуда следует оценка сверху в силу (3.5) и оценка снизу в силу (3.6).

Теорема 2 доказана.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобятся две вспомогательные леммы.

Лемма 6. *Пусть* $1<p<\infty$, $l,r\in\mathbb{N}$, $l>r$, $f\in M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и выполнено условие* (1.6) $E(f;p;r)<\infty$; *тогда справедлива импликация*

$$\big\{E_{n-1}(f)_p\big\}_{n=1}^{\infty}\in B_l^{(p)}\Rightarrow\big\{E_{n-1}(f^{(r)})_p\big\}_{n=1}^{\infty}\in B_{l-r}^{(p)}.$$

Доказательство. Поскольку $E(f;p;r)<\infty\Leftrightarrow f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, то (см. доказательство оценки сверху в п. 3) утверждения теоремы 2)

$$n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\bigg)^{1/p}\preccurlyeq n^{r-l}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{pl-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p}+\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p},$$

откуда, учитывая условие $\big\{E_{n-1}(f)_p\big\}_{n=1}^{\infty}\in B_l^{(p)}$ и оценку снизу в п. 2) теоремы 1, получим

$$n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\bigg)^{1/p}\preccurlyeq n^rE_{n-1}(f)_p+E_{n-1}(f^{(r)})_p\preccurlyeq E_{n-1}(f^{(r)})_p,\quad n\in\mathbb{N},$$

и, следовательно, последовательность $\big\{E_{n-1}(f^{(r)})_p\big\}_{n=1}^{\infty}\in B_{l-r}^{(p)}$. □

Лемма 7. *Пусть* $1<p<\infty$, $l,k,r\in\mathbb{N}$, $r<l<k+r$, $f\in M_p^{(r)}(\mathbb{T})$ *и выполнено условие* (1.7) $\Omega(f;p;l;r)<\infty$; *тогда справедлива импликация*

$$\Big\{\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big\}_{n=1}^{\infty}\in B_l^{(p)}\Rightarrow\Big\{\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big\}_{n=1}^{\infty}\in B_{l-r}^{(p)}.$$

Доказательство. Поскольку $\big\{\omega_l(f;\pi/n)_p\big\}_{n=1}^{\infty}\in B_l^{(p)}\Leftrightarrow\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}\in B_l^{(p)}$ (см. разд. 1, абзац перед формулировкой теоремы 3) и $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}\in B_l^{(p)}\Rightarrow\big\{E_{n-1}(f^{(r)})_p\big\}_{n=1}^{\infty}\in B_{l-r}^{(p)}$ (см. утверждение леммы 6), то в силу равенства (1.3) ($r<l<k+r\Leftrightarrow 0<l-r<k$) и левой оценки в (1.1) имеем

$$\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}\omega_k^p\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/p}\asymp\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E_{\nu-1}^p(f^{(r)})_p\bigg)^{1/p}$$

$$\preccurlyeq n^{l-r}E_{n-1}(f^{(r)})_p\preccurlyeq C_1(k)n^{l-r}\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p,$$

откуда следует, что последовательность $\big\{\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p\big\}_{n=1}^{\infty}\in B_{l-r}^{(p)}$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Из утверждения леммы 6 следует справедливость порядкового равенства

$$n^{-(l-r)}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}E^{p}_{\nu-1}(f^{(r)})_p\Big)^{1/p}\asymp E_{n-1}(f^{(r)})_p,$$

откуда в силу равенства в п. 3) утверждения теоремы 2 получаем левое равенство в (1.11). Аналогично из утверждения леммы 7 следует равенство

$$n^{-(l-r)}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-r)-1}\omega_k^p\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\right)^{1/p}\asymp\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p,$$

откуда в силу равенства в п. 7) теоремы 2 получаем правое равенство в (1.11).

Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 7. Порядковым равенствам, приведенным в пп. 1)–7) теоремы 2, предшествовали соответствующие оценки сверху для произвольных функций $f\in L_p(\mathbb{T})$ при условии $\Omega^{(\theta)}(f;p;l;r)<\infty$, гарантирующем включение $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, где $1<p<\infty$, $\theta=\min\{2,p\}$, $l,r\in\mathbb{N}$, $l>r$. Эти оценки могут быть получены привлечением усиленных версий прямой и обратной теорем (без производных и с производными) в пространствах $L_p(\mathbb{T})$, где $1<p<\infty$ (см., например, [21; 22, § 2; 23]; в этих же работах приведена подробная библиография).

Для создания у читателя представления об указанных оценках, ниже приводится краткая схема их доказательства.

Если $f\in L_p(\mathbb{T})$ и $\Omega^{(\theta)}(f;p;l;r)<\infty$, то $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})$, поскольку в силу левой оценки в (1.1) имеем (см. разд. 1, п. 1) замечания 2)

$$\|f^{(r)}\|_p\le C_{13}(r,p)E^{(\theta)}(f;p;r)\le C_{13}(r,p)C_1(l)\Omega^{(\theta)}(f;p;l;r).\tag{3.9}$$

Из левой оценки в (3.9) следует неравенство (см., например, [11, разд. 2, п. 2) леммы 2])

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p\le C_{59}(r,p)\left\{n^rE_{n-1}(f)_p+\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(f)_p\right)^{1/\theta}\right\},\quad n\in\mathbb{N}.\tag{3.10}$$

В силу левой оценки в (1.1) и оценки (3.3) из неравенства (3.10) следует оценка ($l>r$)

$$E_{n-1}(f^{(r)})_p\le C_{60}(l,r,p)\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}\omega_l^{\theta}\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\right)^{1/\theta},\quad n\in\mathbb{N}.\tag{3.11}$$

Применяя оценки (3.11) и (3.3) для значений $l\le k+r$ в оценке (см. доказательство оценки сверху в п. 4) утверждения теоремы 2)

$$\omega_{l-r}\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p\le C_{58}(l-r,r,p)\Big\{E_{n-1}(f^{(r)})_p+n^r\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big\},\quad n\in\mathbb{N},$$

получаем $\big(\omega_k(f^{(r)};\pi/n)_p\le 2^{k-(l-r)}\omega_{l-r}(f^{(r)},\pi/n)_p,\ l\le k+r\big)$

$$\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p\le 2^{k-(l-r)}C_{58}(l-r,r,p)\big(C_{60}(l,r,p)+C_{56}(l,r,p)\big)\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}\omega_l^{\theta}\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\right)^{1/\theta},\quad n\in\mathbb{N}.\tag{3.12}$$

Для значений $l>k+r$ в силу обратной теоремы с производными (см. разд. 1, второй абзац в п. 1) замечания 2) и левой оценки в (1.1) имеем

$$\omega_k\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p\le C_{61}(k,r,p)\left\{n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta(k+r)-1}E^{\theta}_{\nu-1}(f)_p\right)^{1/\theta}+\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1}(f)_p\right)^{1/\theta}\right\}$$

$$\leq C_{61}(k,r,p)C_1(l)\bigg\{n^{-k}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta(k+r)-1}\omega_l^\theta\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\theta}+\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}\omega_l^\theta\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\theta}\bigg\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Далее, в силу усиленной версии прямой теоремы в $L_p(\mathbb{T})$ (см. [9, неравенство (2)]) аналогично доказательству (3.12) получаем (при $\beta=\max\{2,p\}$)

$$n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta(l-r)-1}E_{\nu-1}^\beta(f^{(r)})_p\bigg)^{1/\beta}\leq C_{62}(l,r,p)\omega_{l-r}\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\Big)_p$$

$$\leq C_{62}(l,r,p)C_{58}(l-r,r,p)\big(C_{60}(l,r,p)+C_{56}(l,r,p)\big)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}\omega_l^\theta\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\theta},\quad n\in\mathbb{N}. \quad (3.13)$$

И, наконец, если $l<k+r$, то в силу равенства (1.3) и оценки (3.13) имеем ($\beta=\max\{2,p\}$)

$$n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta(l-r)-1}\omega_k^\beta\Big(f^{(r)};\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\beta}\asymp C_7(k,l-r,\beta)n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta(l-r)-1}E_{\nu-1}^\beta(f^{(r)})_p\bigg)^{1/\beta}$$

$$\leq C_{63}(k,l-r,\beta)C_{64}(l,r,p)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}\omega_l^\theta\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\theta},\quad n\in\mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Отметим, что оценки (3.11), (3.13) и (3.14) впервые установлены автором в [23]. В этой же работе [23, лемма 5] доказано, что для любого $\omega\in\Omega_l(0,\pi]$ существует функция $f_0(\cdot;p;\omega)\in L_p(\mathbb{T})$ с $\omega_l(f_0;\delta)_p=\mathcal{O}(\omega(\delta))$, $\delta\in(0,\pi]$, такая, что $f_0\in L_p^{(r)}(\mathbb{T})\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n^{\theta r-1}\omega^\theta(\pi/n)<\infty$ и справедливы порядковые равенства

$$n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta(l-r)-1}E_{\nu-1}^\beta(f_0^{(r)})\bigg)^{1/\beta}\asymp\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}\omega^\theta\Big(\frac{\pi}{\nu}\Big)\bigg)^{1/\theta}$$

$$\asymp n^{-(l-r)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta(l-r)-1}\omega_k^\beta\Big(f_0^{(r)};\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\beta},\quad n\in\mathbb{N},$$

где $\Omega_l(0,\pi]$ — класс всех функций $\omega=\omega(\delta)$, определенных на $(0,\pi]$ и удовлетворяющих условиям $0<\omega(\delta)\downarrow 0$ ($\delta\downarrow 0$) и $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow$ ($\delta\uparrow$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1949. Т. 65, № 2. С. 135–137.
2. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
3. **Тиман А.Ф., Тиман М.Ф.** Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71, № 1. С. 17–20.
4. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
5. **Кокилашвили В.М.** О структурных и конструктивных характеристиках одного класса периодических функций // Сообщения АН Грузинской ССР. 1966. Т. XVIII, № 1. С. 3–8.
6. **Кокилашвили В.М.** О приближении периодических функций // Тр. Тбилис. мат. ин-та. 1968. Т. 34. С. 51–81.
7. **Aljančić S.** On the integral module of continuity in L_p ($1<p<\infty$) of Fourier series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, no. 2. P. 287–294.
8. **Тиман М.Ф.** Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p ($1\leq p\leq\infty$) // Мат. сб. 1958. Т. 46(88), № 1. С. 125–132.
9. **Тиман М.Ф.** О теореме Джексона в пространствах L_p // Укр. мат. журн. 1966. Т. 18, № 1. С. 134–137.

10. **Бесов О.В.** О некоторых условиях принадлежности к L_p производных периодических функций // Науч. докл. высш. школы. Физ-мат. науки. 1959. № 1. С. 13–17.
11. **Ильясов Н.А.** О равносильности некоторых неравенств теории приближений периодических функций в пространствах $L_p(\mathbb{T}),\ 1 < p < \infty$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 93–106. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-93-106 .
12. **Бари Н.К., Стечкин С.Б.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
13. **Ильясов Н.А.** Прямая теорема в разных метриках теории приближений периодических функций с монотонными коэффициентами Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 144–158. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-144-158 .
14. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
15. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
16. **Riesz M.** Sur les fonctions conjuguees // Math. Zeit. 1927. Bd. 27, no. 2. S. 218–244.
17. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.
18. **Конюшков А.А.** О наилучших приближениях при преобразовании коэффициентов Фурье методом средних арифметических и о рядах Фурье с неотрицательными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 1. С. 56–78.
19. **Quade E.S.** Trigonometric approximation in the mean // Duke Math. J. 1937. Vol. 3, no. 3. P. 529–543.
20. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. 368 с.
21. **Ильясов Н.А.** Теоремы вложения для некоторых классов периодических функций в L_p, $1 \le p \le \infty$ // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 6. С. 1301–1304.
22. **Ильясов Н.А.** Теоремы вложения для структурных и конструктивных характеристик функций: дис. … канд. физ.-мат. наук / Бакин. гос. ун-т. Баку, 1987. 150 с.
23. **Ильясов Н.А.** К неравенствам между наилучшими приближениями и модулями гладкости разных порядков периодических функций в $L_p,\ 1 \le p \le \infty$ // Сингулярные интегральные операторы: темат. сб. науч. тр. Баку: Из-во Бакин. гос. ун-та, 1991. С. 40–52.

Поступила 8.09.2022
После доработки 17.10.2022
Принята к публикации 24.10.2022

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент
старший науч. сотрудник отдела теории функций
Институт математики и механики национальной АН Азербайджана
г. Баку;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
г. Москва
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

REFERENCES

1. Stechkin S.B. On the order of the best approximations of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1949, vol. 65, no. 2, pp. 135–137 (in Russian).
2. Stechkin S.B. On the order of the best approximations of continuous functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.,* 1951, vol. 15, no. 3, pp. 219–242 (in Russian).
3. Timan A.F., Timan M.F. Generalized modulus of continuity and best approximation in the mean. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1950, vol. 71, no. 1, pp. 17–20 (in Russian).
4. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of a real variable.* Oxford; London; N.Y.: Pergamon Press, 1963, 655 p. ISBN: 048667830X . Original Russian text published in Timan A.F. *Teoriya priblizheniya funktsii deystvitel'nogo peremennogo*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1960, 624 p.
5. Kokilashvili V.M. On structural and constructive characteristics of a class of periodic functions. *Communications of the Academy of Sciences of the Georgian SSR*, 1966, vol. XVIII, no. 1, pp. 3–8 (in Russian).
6. Kokilashvili V.M. On approximation of periodic functions. *Tr. Tbilis. Mat. In-ta*, 1968, vol. 34, pp. 51–81 (in Russian).

7. Aljančić S. On the integral module of continuity in L_p $(1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 17, no. 2, pp. 287–294. doi: 10.2307/2035151 .
8. Timan M.F. Inverse theorems of the constructive theory of functions in spaces L_p $(1 \le p \le \infty)$. *Math. Sb.*, 1958, vol. 46(88), no. 1, pp. 125–132 (in Russian).
9. Timan M.F. On the Jackson theorem in L_p spaces. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 1966, vol. 18, no. 1, pp. 134–137 (in Russian).
10. Besov O.V. On some conditions for derivatives of periodic functions to belong to L_p. *Nauch. Dokl. Vyssh. Shkoly. Fiz.-Mat. Nauki*, 1959, no. 1, pp. 13–17 (in Russian).
11. Il'yasov N.A. On the equivalence of some inequalities in the theory of approximation of periodic functions in the spaces $L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 93–106 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-93-106 .
12. Bari N.K., Stechkin S.B. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. *Trudy Mosk. Mat. Obsh.*, 1956, vol. 5, pp. 483–522 (in Russian).
13. Il'yasov N.A. The direct theorem of the theory of approximation of periodic functions with monotone Fourier coefficients in different metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 303, suppl. 1, pp. 100–114. doi: 10.1134/S0081543818090110 .
14. Bari N.K. *A treatise on trigonometric series.* Oxford; NY: Pergamon Press, 1964. Original Russian text published in Bari N.K. *Trigonometricheskie rjady*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 936 p.
15. Zygmund A. *Trigonometric series.* Vols. I & II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003, 616 p. ISBN: 0-521-89053-5 . Translated to Russian under the title *Trigonometricheskie rjady*, Moscow: Mir Publ., 1965, vol. I, 616 p.; vol. II, 538 p.
16. Riesz M. Sur les fonctions conjuguées. *Math. Z.*, 1927, vol. 27, no. 2, pp. 218–244. doi: 10.1007/BF01171098 .
17. Konyushkov A.A. Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 44(86), no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
18. Konyushkov A.A. On the best approximations when transforming the Fourier coefficients by the method of arithmetic means and on Fourier series with non-negative coefficients. *Sib. Mat. Zhurn.*, 1962, vol. 3, no. 1, pp. 56–78 (in Russian).
19. Quade E.S. Trigonometric approximation in the mean. *Duke Math. J.*, 1937, vol. 3, no. 3, pp. 529–543.
20. Zhuk V.V. *Approksimatsiya periodicheskikh funktsii* [Approximation of periodic functions]. Leningrad: Leningrad Univ. Publ., 1982, 368 p.
21. Il'yasov N.A. Embedding theorems for some classes of periodic functions in L_p, $1 \le p \le \infty$. *Dokl. AN SSSR*, 1984, vol. 276, no. 6, pp. 1301–1304 (in Russian).
22. Il'yasov N.A. *Teoremy vlozheniya dlya strukturnykh i konstruktivnykh kharakteristik funktsiy* [Embedding theorems for structural and constructive characteristics of functions]. Dissertation, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Baku, 1987, 150 p.
23. Il'yasov N.A. On inequalities between best approximations and moduli of smoothness of different orders of periodic functions in L_p, $1 \le p \le \infty$. *Singulyarnyye integral'nyye operatory: tematicheskiy sb. nauchnykh trudov* [Singular integral operators: thematic coll. scientific works], Baku: Baku State Univer. Publ., 1991, pp. 40–52 (in Russian).

Received September 8, 2022
Revised October 17, 2022
Accepted October 24, 2022

Funding Agency: This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within a program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (agreement no. 075-15-2022-284).

Niyazi Aladdin ogly Il'yasov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, Department of Theory of Functions, Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia. e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com .

Cite this article as: N. A. Il'yasov. Order equalities in the spaces $L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, for best approximations and moduli of smoothness of derivatives of periodic functions with monotone Fourier coefficients. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 103–120 .