ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.926

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В. А. Зайцев, И. Г. Ким

В статье обсуждаются вопросы устойчивости линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Показано, что, в отличие от уравнений с постоянными коэффициентами, условие гурвицевости характеристического многочлена для линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами не является ни необходимым, ни достаточным условием асимптотической устойчивости дифференциального уравнения. Доказано, что аналог теоремы Харитонова о робастной устойчивости не имеет места, если коэффициенты дифференциального уравнения не являются постоянными.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, устойчивость, нестационарная система, устойчивый многочлен, теорема Харитонова, робастная устойчивость.

V. A. Zaitsev, I. G. Kim. On the stability of linear time-varying differential equations.

The article discusses the stability of linear differential equations with time-varying coefficients. It is shown that, in contrast to equations with time-invariant coefficients, the condition for the characteristic polynomial to be Hurwitz for a linear differential equation with time-varying coefficients is neither necessary nor sufficient for the asymptotic stability of the differential equation. It is proved that the analog of Kharitonov's theorem on robust stability does not hold if the coefficients of the differential equation are time-varying.

Keywords: linear differential equations, stability, time-varying system, stable polynomial, Kharitonov's theorem, robust stability.

MSC: 34A30, 34D20, 93D09

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-94-113

1. Устойчивые многочлены

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)}+p_1x^{(n-1)}+p_2x^{(n-2)}+\ldots+p_nx=0, \qquad t\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R},\quad p_j\in\mathbb{R},\quad j=\overline{1,n}. \tag{1.1}$$

По уравнению (1.1) построим характеристический многочлен

$$\chi(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_n. \tag{1.2}$$

Для линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot z=Az,\quad t\in\mathbb{R},\quad z\in\mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

характеристический многочлен имеет вид $\chi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$. Напомним следующее определение [1, гл. 1, § 1].

О п р е д е л е н и е 1. Многочлен $\varphi(\lambda)=q_0\lambda^n+q_1\lambda^{n-1}+\ldots+q_{n-1}\lambda+q_n$ называется *устойчивым*, если все его корни λ_j, $j=\overline{1,n}$, лежат в левой полуплоскости $\Omega:=\{\zeta\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\zeta<0\}$.

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010.

Другое название устойчивого многочлена — *гурвицев полином*. Хорошо известные необходимые и достаточные условия гурвицевости полинома обеспечивают критерий Михайлова [1, гл. 1, § 2], теорема Эрмита — Билера [1, гл. 2, § 2], теорема Рауса [1, гл. 3, § 2], теоремы Гурвица и Льенара — Шипара [1, гл. 3, § 3].

Условие гурвицевости характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости дифференциального уравнения (1.1) (или, соответственно, системы (1.3)).

Для линейной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{z} = A(t)z, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

такой связи между корнями характеристического многочлена и асимптотической устойчивостью системы (1.4) нет: условие устойчивости характеристического многочлена $\chi(\lambda) = \det(\lambda I - A(t))$ не является ни необходимым, ни достаточным условием асимптотической устойчивости системы (1.4). Приведем соответствующие примеры.

Пусть

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 - 2\cos 4t & 2 + 2\sin 4t \\ -2 + 2\sin 4t & -1 + 2\cos 4t \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Тогда имеем $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, т. е. многочлен $\chi(\lambda)$ является устойчивым. В то же время система (1.4) с матрицей (1.5) допускает решение $z(t) = [e^t \sin 2t, e^t \cos 2t]^T$ с характеристическим показателем $+1$, следовательно является неустойчивой. Таким образом, условие устойчивости многочлена $\chi(\lambda)$ не является достаточным для асимптотической устойчивости системы (1.4). Рассматриваемый пример был приведен в [2, гл. IV, § 9, (9.3)] (примечание: в формуле (9.3) из [2] имеется опечатка в знаках элементов побочной диагонали). Другой, подобный, пример системы (1.4) с матрицей

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 5\cos t \sin t & -5\cos^2 t \\ 5\sin^2 t & -1 - 5\cos t \sin t \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

был предложен в [3, р. 3]. Имеем $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, но система (1.4) с матрицей (1.6) является неустойчивой: вектор-функция $z(t) = [e^t(2\cos t + \sin t), e^t(2\sin t - \cos t)]^T$ — частное решение данной системы.

В работе [2, гл. IV, § 9, п. 9.2] представлен некоторый общий метод построения подобных примеров. С помощью этого метода можно также построить обратные примеры (показывающие, что условие устойчивости многочлена $\chi(\lambda)$ не является необходимым для асимптотической устойчивости системы (1.4)). Покажем это. Возьмем систему

$$\dot{\xi} = B\xi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.7}$$

где $n = 2$, с постоянной матрицей

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

у которой

$$\Delta := b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0, \tag{1.9}$$

$$s := \operatorname{Sp} B := b_{11} + b_{22} < 0. \tag{1.10}$$

Тогда система (1.7) с матрицей (1.8) асимптотически устойчива. Произведем преобразование

$$\xi = U(t)z, \quad U(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}, \quad \omega = \text{const}. \tag{1.11}$$

Преобразование (1.11) приводит систему (1.7) к системе (1.4) с матрицей

$$A(t) = U^{-1}(t)BU(t) - U^{-1}(t)\dot{U}(t). \tag{1.12}$$

Так как $U(t)$ — унитарная матрица с ограниченной производной, то преобразование (1.11) является ляпуновским [2, гл. I, § 3, п. 3.5], поэтому оно сохраняет свойство асимптотической устойчивости системы. Обозначим $A_1(t) = U^{-1}(t)BU(t)$, $D(t) = U^{-1}(t)\dot{U}(t)$. Тогда $\operatorname{Sp} A_1(t) = \operatorname{Sp} B = s$ и $\det A_1(t) = \det B = \Delta$. Вычисляя $D(t)$, имеем

$$D(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{Sp} A(t) = \operatorname{Sp} A_1(t) = s$. Используя выкладки [2, гл. IV, § 9, п. 9.2], выводим

$$\det A(t) = \Delta + (b_{12} - b_{21})\omega + \omega^2. \tag{1.13}$$

Таким образом, подбирая коэффициенты матрицы B и число ω так, чтобы выполнялись неравенства (1.9), (1.10) и неравенство

$$\det A(t) < 0, \tag{1.14}$$

мы получим соответствующий пример. Выберем, допустим,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

и $\omega = 1$. Тогда $\Delta = 1$, $s = -2$ и $\det A(t) = -8$ согласно (1.13). Следовательно, неравенства (1.9), (1.10), (1.14) выполнены. Построим $A(t)$ по формуле (1.12):

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + 3\cos 2t - 5\sin 2t & 5 - 5\cos 2t - 3\sin 2t \\ -5 - 5\cos 2t - 3\sin 2t & -1 - 3\cos 2t + 5\sin 2t \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

Для матрицы (1.16) имеем $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 8$, т. е. многочлен $\chi(\lambda)$ не устойчивый. Однако система (1.4) с матрицей (1.16) является асимптотически устойчивой. Действительно, (нормированная в нуле) фундаментальная матрица системы (1.7), (1.15) есть

$$\Xi(t) = \exp(Bt) = \begin{bmatrix} e^{-t}(1 + 3t) & -te^{-t} \\ 9te^{-t} & e^{-t}(1 - 3t) \end{bmatrix}.$$

Значит, фундаментальная матрица системы (1.4), (1.16) есть

$$Z(t) = U^{-1}(t)\exp(Bt) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t}(1 + 3t) & -te^{-t} \\ 9te^{-t} & e^{-t}(1 - 3t) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, условие устойчивости многочлена $\chi(\lambda)$ не является необходимым для асимптотической устойчивости системы (1.4). Подобный пример системы (1.4) был приведен в [4].

З а м е ч а н и е 1. Для систем со слабо меняющимися коэффициентами условие отрицательности собственных значений матрицы системы может служить достаточным условием асимптотической устойчивости системы (1.4) при определенных дополнительных условиях. Эти результаты связаны с методом замораживания [2, гл. IV, п. 10.2; 3, p. 4–8; 5; 6; 7]. Отметим, что исследования нестационарных систем (1.4) на (асимптотическую) устойчивость, как правило, проводят в рамках второго метода Ляпунова (метода функции Ляпунова); работ, использующих первый метод Ляпунова, существенно меньше. Достаточные условия устойчивости в рамках первого метода Ляпунова были получены, в частности, в [8] — с помощью теории неосцилляции и в [9] — с помощью спектрального разложения линейной нестационарной системы; для периодических систем они были представлены в [10] (см. также фундаментальную монографию [11, гл. II, § 4; гл. VIII]).

Рассмотрим теперь линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{gathered} x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + p_2(t)x^{(n-2)} + \ldots + p_n(t)x = 0, \\ t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad p_j(t) \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Предполагаем, что функции $p_j(\cdot)$, $j=\overline{1,n}$, кусочно-непрерывные и ограниченные:

$$a_j \le p_j(t) \le b_j, \quad j=\overline{1,n}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

По уравнению (1.17) построим характеристический многочлен

$$\chi(t,\lambda)=\lambda^n+p_1(t)\lambda^{n-1}+\ldots+p_n(t). \tag{1.18}$$

Очевидно, он также с необходимостью имеет переменные коэффициенты (в отличие от систем (1.4): как показывают примеры выше, для системы (1.4) с переменными коэффициентами характеристический многочлен может иметь постоянные коэффициенты). Поставим следующий вопрос: предположим, что многочлен (1.18) является устойчивым для всех $t\in\mathbb{R}$; будет ли это условие необходимым и/или достаточным для асимптотической устойчивости уравнения (1.17)? (Отметим, что примеры, приведенные выше, не дают ответ на этот вопрос для уравнения (1.17).) Мы докажем, что ответ на этот вопрос — отрицательный. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Существует $n\in\mathbb{N}$ и существуют ограниченные кусочно-непрерывные функции $p_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, такие, что выполнены следующие свойства*: (*a*) *для всякого $t\in\mathbb{R}$ многочлен* (1.18) *является устойчивым*; (*b*) *уравнение* (1.17) *является неустойчивым.*

Теорема 2. *Существует $n\in\mathbb{N}$ и существуют ограниченные кусочно-непрерывные функции $p_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, такие, что выполнены следующие свойства*: (*a*) *для всякого $t\in\mathbb{R}$ многочлен* (1.18) *не является устойчивым*; (*b*) *уравнение* (1.17) *является асимптотически устойчивым.*

Доказательство теорем 1, 2 будет дано ниже.

2. Теорема Харитонова

Теорема 1 связана с известными теоремами Харитонова [12] о робастной устойчивости, или, по-другому, об устойчивости интервального семейства полиномов. Напомним формулировки этих теорем (см. также [13, Ch. 5, § 5.2]).

Рассмотрим семейство $\mathcal{I}(\lambda)$ вещественных многочленов степени n вида

$$\varphi(\lambda)=q_0\lambda^n+q_1\lambda^{n-1}+\ldots+q_{n-1}\lambda+q_n, \tag{2.1}$$

коэффициенты которых удовлетворяют следующим ограничениям:

$$q_0\in[a_0,b_0], \quad q_1\in[a_1,b_1], \quad \ldots, \quad q_n\in[a_n,b_n].$$

Обозначим $q:=[q_0,q_1,\ldots,q_n]$ и отождествим полином (2.1) с вектором q. Введем параллелотоп

$$\Pi:=\{q\in\mathbb{R}^{n+1}: a_j\le q_j\le b_j,\ j=\overline{0,n}\}. \tag{2.2}$$

Предполагаем, что $0\notin[a_0,b_0]$. Семейство (2.2), отождествляемое с $\mathcal{I}(\lambda)$, называется *интервальным семейством* полиномов.

Обозначим через $\Pi_e\subset\Pi$ множество вершин параллелотопа Π, т. е.

$$\Pi_e:=\{q\in\mathbb{R}^{n+1}: q_j=a_j \text{ или } q_j=b_j,\ j=\overline{0,n}\},$$

и рассмотрим соответствующее семейство $\mathcal{I}_e(\lambda)\subset\mathcal{I}(\lambda)$. Множество $\mathcal{I}_e(\lambda)$ состоит из 2^{n+1} полиномов. Справедлива следующая теорема [12].

Теорема 3. *Всякий полином в семействе $\mathcal{I}(\lambda)$ является устойчивым тогда и только тогда, когда всякий полином в семействе $\mathcal{I}_e(\lambda)$ устойчив.*

Таким образом, для изучения устойчивости интервального семейства полиномов достаточно исследовать лишь 2^{n+1} вершин этого семейства. Оказывается, что этот результат допускает существенное усиление, и на самом деле, достаточно исследовать лишь четыре из этих вершин [12] (см. также [13, Ch. 5, § 5.2, Theorem 5.1, Remark 5.1]).

Теорема 4. *Всякий полином в семействе $\mathcal{I}(\lambda)$ является устойчивым тогда и только тогда, когда следующие четыре полинома являются устойчивыми*:

$$\begin{aligned}
K^1(\lambda) &:= a_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + a_4\lambda^{n-4} + \ldots,\\
K^2(\lambda) &:= a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + b_3\lambda^{n-3} + a_4\lambda^{n-4} + \ldots,\\
K^3(\lambda) &:= b_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + b_3\lambda^{n-3} + b_4\lambda^{n-4} + \ldots,\\
K^4(\lambda) &:= b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + b_4\lambda^{n-4} + \ldots.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка (1.1) с постоянными коэффициентами. Предположим, что точные значения коэффициентов p_j, $j = \overline{1,n}$, неизвестны, а известны их верхние и нижние границы $a_j \le p_j \le b_j$, $j = \overline{1,n}$. Вопрос об устойчивости такого уравнения (1.1) (или семейства уравнений (1.1)) относится к проблемам робастной устойчивости. Для уравнения с постоянными коэффициентами (1.1) его асимптотическая устойчивость сводится к гурвицевости его характеристического многочлена (1.2), следовательно, теоремы Харитонова 3 и 4 дают критерий асимптотической устойчивости семейства уравнений (1.1).

Возьмем теперь линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{gathered}
x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + p_2(t)x^{(n-2)} + \ldots + p_n(t)x = 0,\\
t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad p_j(t) \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1,n}.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Предполагаем, что функции $p_j(\cdot)$, $j = \overline{1,n}$, кусочно-непрерывные и ограниченные:

$$a_j \le p_j(t) \le b_j, \quad j = \overline{1,n}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Положим $a_0 := b_0 := 1$. Рассмотрим множество вершин $\mathcal{I}_e(\lambda)$ семейства $\mathcal{I}(\lambda)$. Поставим следующий вопрос.

P1. *Предположим, что всякий полином в семействе $\mathcal{I}_e(\lambda)$ является устойчивым* (*или, что равносильно, всякий полином из четырех полиномов Харитонова* (2.3) *устойчив*). *Будет ли это условие достаточным для асимптотической устойчивости уравнения* (2.4)*?*

Мы докажем, что ответ на этот вопрос — отрицательный. Этот вывод — один из основных результатов работы. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Существуют $n \in \mathbb{N}$, числа a_j, b_j и кусочно-непрерывные функции $p_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$, такие, что выполнены следующие свойства.*

1. *Выполнены неравенства* (2.5).
2. *Многочлены* (2.3), *где $a_0 = b_0 = 1$, устойчивы.*
3. *Уравнение* (2.4) *неустойчиво.*

3. Доказательство теоремы 5

Положим $n := 2$, $a_1 := b_1 := 0.2$, $a_2 := 1/4$, $b_2 := 4$. Очевидно, что многочлены (2.3) устойчивы. Определим

$$p_1(t) \equiv 0.2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$$f(t) := \begin{cases} 1/4, & t \in [0, \pi), \\ 4, & t \in [\pi, 7\pi/4), \end{cases}$$

$$p_2(t) := f\big(t - (7\pi/4)k\big), \quad t \in \big[(7\pi/4)k, (7\pi/4)(k+1)\big), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Тогда неравенства (2.5) выполнены. Докажем, что уравнение

$$x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = 0 \tag{3.3}$$

с коэффициентами (3.1), (3.2) неустойчиво. Произведем замену переменных $z_1 = x$, $z_2 = x'$ в уравнении (3.3); обозначим $z := [z_1, z_2]^T \in \mathbb{R}^2$. Уравнение (3.3) преобразуется к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^2, \tag{3.4}$$

с матрицей

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_2(t) & -0.2 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Система (3.4), (3.5) является периодической с периодом $\omega = 7\pi/4$. Представим матрицу $A(t)$ в виде $A(t) = A_0(t) + D$, где

$$A_0(t) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_2(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим сначала систему

$$\dot{z} = A_0(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^2, \tag{3.6}$$

и докажем, что эта система неустойчива. Система (3.6) является периодической с периодом $\omega = 7\pi/4$. Следовательно, она является приводимой (ляпуновским преобразованием к системе с постоянной матрицей). Применим теорию Ляпунова — Флоке [14, гл. III, § 15; 11, гл. II, § 2]. Имеем

$$A_0(t) = A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, \pi); \qquad A_0(t) = A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [\pi, 7\pi/4). \tag{3.7}$$

Найдем матричную экспоненту для матриц A_1, A_2, получим

$$\exp(A_1 t) = \begin{bmatrix} \cos(t/2) & 2\sin(t/2) \\ (-1/2)\sin(t/2) & \cos(t/2) \end{bmatrix}, \quad \exp(A_2 t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) & (1/2)\sin(2t) \\ -2\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Обозначим через $Z(t, s)$ матрицу Коши системы (3.6), т. е. решение матричной задачи Коши $\dot{Z} = A_0(t)Z$, $Z(s) = I$. Тогда с учетом (3.7), (3.8) выводим

$$Z(t, 0) = \begin{cases} \exp(A_1 t), & t \in [0, \pi), \\ \exp\big(A_2(t - \pi)\big) \cdot \exp(A_1 \pi), & t \in [\pi, 7\pi/4), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos(t/2) & 2\sin(t/2) \\ (-1/2)\sin(t/2) & \cos(t/2) \end{bmatrix}, & t \in [0, \pi), \\ \begin{bmatrix} (-1/4)\sin(2t) & 2\cos(2t) \\ (-1/2)\cos(2t) & -4\sin(2t) \end{bmatrix}, & t \in [\pi, 7\pi/4). \end{cases}$$

Таким образом, матрица монодромии есть $Z(7\pi/4, 0) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Вычислим матрицу $\Lambda = \dfrac{1}{\omega} \ln Z(\omega, 0)$ (см. [14, гл. III, § 15, (3.15.7)]; получим

$$\Lambda = \frac{4}{7\pi} \begin{bmatrix} -\ln 4 & 0 \\ 0 & \ln 4 \end{bmatrix}.$$

Построим матрицу

$$L(t) = Z(t, 0) \exp(-\Lambda t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Тогда

$$L(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos(t/2) & 2\sin(t/2) \\ (-1/2)\sin(t/2) & \cos(t/2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{8t/7\pi} & 0 \\ 0 & 2^{-8t/7\pi} \end{bmatrix}, & t \in [0, \pi), \\ \begin{bmatrix} (-1/4)\sin(2t) & 2\cos(2t) \\ (-1/2)\cos(2t) & -4\sin(2t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{8t/7\pi} & 0 \\ 0 & 2^{-8t/7\pi} \end{bmatrix}, & t \in [\pi, 7\pi/4), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} 2^{8t/7\pi}\cos(t/2) & 2^{1-8t/7\pi}\sin(t/2) \\ -2^{-1+8t/7\pi}\sin(t/2) & 2^{-8t/7\pi}\cos(t/2) \end{bmatrix}, & t \in [0, \pi), \\ \begin{bmatrix} -2^{-2+8t/7\pi}\sin(2t) & 2^{1-8t/7\pi}\cos(2t) \\ -2^{-1+8t/7\pi}\cos(2t) & -2^{2-8t/7\pi}\sin(2t) \end{bmatrix}, & t \in [\pi, 7\pi/4), \end{cases} \tag{3.10}$$

и $L(t+\omega) = L(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (см. [14, гл. III, § 15, теорема Флоке]); кроме того, $L(0) = I$. Дифференцируя равенство (3.9), получаем, что матрица $L(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{L}(t) = A_0(t)L(t) - L(t)\Lambda. \tag{3.11}$$

Произведем преобразование Ляпунова

$$z = L(t)y \tag{3.12}$$

системы (3.6). С учетом (3.11) имеем

$$\dot{z} = \dot{L}(t)y + L(t)\dot{y} = A_0(t)L(t)y - L(t)\Lambda y + L(t)\dot{y} = A_0(t)z - L(t)(\Lambda y - \dot{y}). \tag{3.13}$$

Из (3.13) и (3.6) вытекает

$$\dot{y} = \Lambda y, \quad y \in \mathbb{R}^2. \tag{3.14}$$

Таким образом, преобразование Ляпунова (3.12) приводит систему (3.6) к системе (3.14) с постоянной матрицей. Покажем, что система (3.14) неустойчива, используя теорему Ляпунова о неустойчивости (см. замечание 3, утверждение 1, замечание 4). Построим функцию Ляпунова для системы (3.14) в виде квадратичной формы $V(y) = y^T P y$, где $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда $V(y) = y_2^2 - y_1^2$. Производная $\dot{V}(y)$ в силу системы (3.14) есть

$$\dot{V}(y) = y^T(\Lambda^T P + P\Lambda)y = y^T \begin{bmatrix} (8/7\pi)\ln 4 & 0 \\ 0 & (8/7\pi)\ln 4 \end{bmatrix} y.$$

Значит, $\dot{V}(y)$ положительно определенная. Мы имеем $V(0) = 0$, и существует точка y^0 (например, $y^0 = (0, \alpha)$, $\alpha \neq 0$) такая, что $V(y^0) > 0$. Следовательно, по теореме Ляпунова система (3.14) неустойчива.

Покажем, что система (3.6) неустойчива, также используя теорему Ляпунова. Положим

$$Q(t) = \big(L^{-1}(t)\big)^T P L^{-1}(t). \tag{3.15}$$

Тогда с учетом (3.10) получаем

$$Q(t) = \begin{cases} Q_1(t), & t \in [0, \pi), \\ Q_2(t), & t \in [\pi, 7\pi/4), \end{cases}$$

$$Q_1(t) = \begin{bmatrix} 2^{-2+16t/7\pi}\sin^2(t/2) - 2^{-16t/7\pi}\cos^2(t/2) & (2^{1-16t/7\pi} + 2^{-1+16t/7\pi})\cos(t/2)\sin(t/2) \\ (2^{1-16t/7\pi} + 2^{-1+16t/7\pi})\cos(t/2)\sin(t/2) & 2^{16t/7\pi}\cos^2(t/2) - 2^{2-16t/7\pi}\sin^2(t/2) \end{bmatrix},$$

$$Q_2(t) = \begin{bmatrix} 2^{-2+16t/7\pi}\cos^2(2t) - 2^{4-16t/7\pi}\sin^2(2t) & -(2^{3-16t/7\pi} + 2^{-3+16t/7\pi})\cos(2t)\sin(2t) \\ -(2^{3-16t/7\pi} + 2^{-3+16t/7\pi})\cos(2t)\sin(2t) & 2^{-4+16t/7\pi}\sin^2(2t) - 2^{2-16t/7\pi}\cos^2(2t) \end{bmatrix},$$

и $Q(t+\omega) = Q(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Построим функцию Ляпунова для системы (3.6) в виде квадратичной формы

$$W(t, z) = z^T Q(t) z. \tag{3.16}$$

Отсюда, согласно (3.12) и (3.15) выводим

$$\frac{d}{dt}W(t,z) = \frac{d}{dt}\big(y^T L^T(t) Q(t) L(t) y\big) = \frac{d}{dt}(y^T P y)$$

$$= y^T(\Lambda^T P + P\Lambda)y = z^T\big(L^{-1}(t)\big)^T(\Lambda^T P + P\Lambda)L^{-1}(t)z.$$

В силу того что $\Lambda^T P + P\Lambda$ положительно определенная и

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \max\{\|L(t)\|, \|L^{-1}(t)\|\} \le \alpha \tag{3.17}$$

для некоторого $\alpha > 0$, убеждаемся в том, что $\dfrac{d}{dt}W(t,z)$ — положительно определенная квадратичная форма равномерно по $t \in \mathbb{R}$; $W(t, 0) \equiv 0$. Далее, при $t_0 = k\omega$ ($k \in \mathbb{Z}$) имеем $Q(t_0) = P$, отсюда $W(t_0, z) = z^T P z = z_2^2 - z_1^2$. Значит, существует точка z^0 (например, $z^0 = (0, \alpha)$, $\alpha \ne 0$) такая, что $W(t_0, z^0) > 0$. Следовательно, по теореме Ляпунова система (3.6) неустойчива.

Рассмотрим теперь систему (3.4) с матрицей (3.5). Покажем, что эта система неустойчива, также используя теорему Ляпунова о неустойчивости. Выберем функцию Ляпунова для системы (3.4), (3.5) тоже в виде квадратичной формы (3.16) с матрицей (3.15). Из (3.15) вытекает, что

$$P = L^T(t) Q(t) L(t). \tag{3.18}$$

Продифференцируем равенство (3.18), получим равенство

$$\dot{L}^T(t)Q(t)L(t) + L^T(t)\dot{Q}(t)L(t) + L^T(t)Q\dot{L}(t) = 0. \tag{3.19}$$

Подставляя (3.11) в (3.19), приходим к равенству

$$L^T(t)A_0^T(t)Q(t)L(t) + L^T(t)\dot{Q}(t)L(t) + L^T(t)Q(t)A_0(t)L(t)$$

$$= \Lambda^T L^T(t)Q(t)L(t) + L^T(t)Q(t)L(t)\Lambda. \tag{3.20}$$

Найдем производную функции (3.16) в силу системы (3.4). Имеем

$$\frac{d}{dt}W(t,z) = \frac{d}{dt}\big(z^T Q(t) z\big) = \dot{z}^T Q(t) z + z^T \dot{Q}(t) z + z^T Q(t)\dot{z}$$

$$= z^T\Big(\big(A_0(t) + D\big)^T Q(t) + \dot{Q}(t) + Q(t)\big(A_0(t) + D\big)\Big)z. \tag{3.21}$$

Представим (3.21) в виде суммы $\Sigma_1+\Sigma_2$, где

$$\Sigma_1 = z^T\big(A_0^T(t)Q(t)+\dot Q(t)+Q(t)A_0(t)\big)z, \tag{3.22}$$

$$\Sigma_2 = z^T\big(D^TQ(t)+Q(t)D\big)z. \tag{3.23}$$

Подставляя (3.12) в (3.22) и используя (3.20) и (3.18), получаем

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= y^T\big(L^T(t)A_0^T(t)Q(t)L(t)+L^T(t)\dot Q(t)L(t)+L^T(t)Q(t)A_0(t)L(t)\big)y\\ &= y^T\big(\Lambda^TL^T(t)Q(t)L(t)+L^T(t)Q(t)L(t)\Lambda\big)y = y^T\big(\Lambda^TP+P\Lambda\big)y.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Далее обозначим

$$\widehat D(t) := L^{-1}(t)DL(t). \tag{3.25}$$

Тогда с учетом (3.12), (3.15) и (3.25) из (3.23) выводим

$$\begin{aligned}\Sigma_2 = y^TL^T(t)\Big(&\big(L(t)\widehat D(t)L^{-1}(t)\big)^T\big(L^{-1}(t)\big)^TPL^{-1}(t)\\ &+\big(L^{-1}(t)\big)^TPL^{-1}(t)\big(L(t)\widehat D(t)L^{-1}(t)\big)\Big)L(t)y = y^T\big(\widehat D^T(t)P+P\widehat D(t)\big)y.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Таким образом, из (3.21), (3.24) и (3.26) имеем

$$\frac{d}{dt}W(t,z) = y^T\big(\Lambda^TP+P\Lambda\big)y + y^T\big(\widehat D^T(t)P+P\widehat D(t)\big)y. \tag{3.27}$$

Покажем, что квадратичная форма (3.27) положительно определена относительно y равномерно по $t\in\mathbb{R}$ и, как следствие, в силу (3.17) положительно определена относительно z равномерно по $t\in\mathbb{R}$.

Построим матрицу $\widehat D(t)$ по формуле (3.25), получим

$$\widehat D(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} -0.2\sin^2(t/2) & 0.2\cdot 2^{1-16t/7\pi}\cos(t/2)\sin(t/2)\\ 0.2\cdot 2^{-1+16t/7\pi}\cos(t/2)\sin(t/2) & -0.2\cos^2(t/2)\end{bmatrix}, & t\in[0,\pi),\\ \begin{bmatrix} -0.2\cos^2(2t) & -0.2\cdot 2^{3-16t/7\pi}\cos(2t)\sin(2t)\\ -0.2\cdot 2^{-3+16t/7\pi}\cos(2t)\sin(2t) & -0.2\sin^2(2t)\end{bmatrix}, & t\in[\pi,7\pi/4).\end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned}&\widehat D^T(t)P+P\widehat D(t)\\ &= \begin{cases} \begin{bmatrix} 0.4\sin^2(t/2) & 0.2\,\mathrm{sh}\big((16t/7\pi-1)\ln 2\big)\sin t\\ 0.2\,\mathrm{sh}\big((16t/7\pi-1)\ln 2\big)\sin t & -0.4\cos^2(t/2)\end{bmatrix}, & t\in[0,\pi),\\ \begin{bmatrix} 0.4\cos^2(2t) & 0.2\,\mathrm{sh}\big((3-16t/7\pi)\ln 2\big)\sin(4t)\\ 0.2\,\mathrm{sh}\big((3-16t/7\pi)\ln 2\big)\sin(4t) & -0.4\sin^2(2t)\end{bmatrix}, & t\in[\pi,7\pi/4).\end{cases}\end{aligned}$$

Построим матрицу

$$\Theta(t) := \begin{bmatrix}\theta_{11}(t) & \theta_{12}(t)\\ \theta_{21}(t) & \theta_{22}(t)\end{bmatrix} := \big(\Lambda+\widehat D(t)\big)^TP + P\big(\Lambda+\widehat D(t)\big).$$

Тогда

$$\Theta(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} (16/7\pi)\ln 2+0.4\sin^2(t/2) & 0.2\,\mathrm{sh}\big((16t/7\pi-1)\ln 2\big)\sin t\\ 0.2\,\mathrm{sh}\big((16t/7\pi-1)\ln 2\big)\sin t & (16/7\pi)\ln 2-0.4\cos^2(t/2)\end{bmatrix}, & t\in[0,\pi),\\ \begin{bmatrix} (16/7\pi)\ln 2+0.4\cos^2(2t) & 0.2\,\mathrm{sh}\big((3-16t/7\pi)\ln 2\big)\sin(4t)\\ 0.2\,\mathrm{sh}\big((3-16t/7\pi)\ln 2\big)\sin(4t) & (16/7\pi)\ln 2-0.4\sin^2(2t)\end{bmatrix}, & t\in[\pi,7\pi/4),\end{cases}$$

и $\Theta(t+\omega)=\Theta(t)$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Покажем, что матрица $\Theta(t)$ положительно определена для всех $t\in[0,7\pi/4)$.

(a) Пусть $t\in[0,\pi)$. Тогда, используя неравенство $2^{16}>2.72^{11}>e^{11}$, выводим следующие оценки:

$$\theta_{11}(t)=(16/7\pi)\ln 2+0.4\sin^2(t/2)\geq(16/7\pi)\ln 2>(16/22)\ln 2>1/2>0. \tag{3.28}$$

Далее, с учетом (3.28) имеем

$$\theta_{22}(t)=(16/7\pi)\ln 2-0.4\cos^2(t/2)>0.5-0.4=0.1>0. \tag{3.29}$$

Оценим $\theta_{12}(t)=0.2\,\mathrm{sh}\big((16t/7\pi-1)\ln 2\big)\sin t$. Рассмотрим на $[0,\pi]$ функцию $g(t)=h(t)\sin t$, где $h(t)=\mathrm{sh}\big((16t/7\pi-1)\ln 2\big)$. Функция $h(t)$ возрастает при $t\in[0,\pi]$;

$$h(0)=\mathrm{sh}(-\ln 2)=-\mathrm{sh}(\ln 2)=-3/4;\qquad h(7\pi/8)=\mathrm{sh}(\ln 2)=3/4;$$

$$h(\pi)=\mathrm{sh}\big((9/7)\ln 2\big)=\big(2^{9/7}-2^{-9/7}\big)/2<2^{9/7}/2=2^{2/7}<3/2.$$

Таким образом, если $t\in[0,7\pi/8]$, то $|h(t)|\leq 3/4$, $|\sin t|\leq 1$; следовательно, $|g(t)|\leq 3/4<1$. Поэтому $|\theta_{12}(t)|<0.2$.

Если $t\in[7\pi/8,\pi)$, то $|h(t)|<3/2$, $0<\sin t<\sin(5\pi/6)=1/2$; значит, $|g(t)|<3/4<1$. Отсюда $|\theta_{12}(t)|<0.2$.

Таким образом,

$$\det\Theta(t)=\theta_{11}(t)\theta_{22}(t)-\theta_{12}^2(t)>0.5\cdot 0.1-0.2^2=0.01>0. \tag{3.30}$$

Из неравенств (3.28)–(3.30) вытекает, что матрица $\Theta(t)$ положительно определена при $t\in[0,\pi)$.

(b) Пусть $t\in[\pi,7\pi/4)$. Тогда аналогично неравенствам (3.28), (3.29) получаем

$$\theta_{11}(t)>1/2>0,\quad \theta_{22}(t)>0.1>0,$$

Рассмотрим функцию $h(t)=\mathrm{sh}\big((3-16t/7\pi)\ln 2\big)$ при $t\in[\pi,7\pi/4]$. Функция $h(t)$ убывает при $t\in[\pi,7\pi/4]$; $h(\pi)=\mathrm{sh}\big((5/7)\ln 2\big)<2^{5/7}/2<1$; $h(7\pi/4)=\mathrm{sh}(-\ln 2)=-3/4$.

Итак, если $t\in[\pi,7\pi/4)$, то $|h(t)|<1$. Следовательно,

$$|\theta_{12}(t)|=|0.2\,\mathrm{sh}\big((3-16t/7\pi)\ln 2\big)\sin(4t)|<0.2\cdot 1\cdot 1=0.2.$$

Таким образом, неравенство (3.30) выполнено и при $t\in[\pi,7\pi/4)$. Значит, матрица $\Theta(t)$ положительно определена при $t\in[\pi,7\pi/4)$.

Из (a) и (b) следует, что матрица $\Theta(t)$ положительно определена при $t\in[0,7\pi/4)$. В силу ω-периодичности и непрерывности матрица $\Theta(t)$ положительно определена для всех $t\in\mathbb{R}$ равномерно по $t\in\mathbb{R}$. Таким образом, квадратичная форма (3.27) положительно определена. По теореме Ляпунова система (3.4) с матрицей (3.5) неустойчива. Приходим к выводу, что уравнение (3.3) с коэффициентами (3.1), (3.2) неустойчиво.

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Доказательство неустойчивости системы (3.4), (3.5) можно провести другим способом, а именно “численно”. Система (3.4), (3.5) является периодической с периодом $\omega=7\pi/4$. Имеем

$$A(t)=\mathcal{A}_1:=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1/4 & -0.2\end{bmatrix},\quad t\in[0,\pi);\qquad A(t)=\mathcal{A}_2:=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -0.2\end{bmatrix},\quad t\in[\pi,7\pi/4).$$

Найдем матричную экспоненту для матриц $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, получим

$$e^{\mathcal{A}_1 t}=\begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{10}}\cos\left(\frac{t\sqrt{6}}{5}\right)+\frac{1}{2\sqrt{6}}e^{-\frac{t}{10}}\sin\left(\frac{t\sqrt{6}}{5}\right) & \frac{5}{\sqrt{6}}e^{-\frac{t}{10}}\sin\left(\frac{t\sqrt{6}}{5}\right)\\ -\frac{5}{4\sqrt{6}}e^{-\frac{t}{10}}\sin\left(\frac{t\sqrt{6}}{5}\right) & e^{-\frac{t}{10}}\cos\left(\frac{t\sqrt{6}}{5}\right)-\frac{1}{2\sqrt{6}}e^{-\frac{t}{10}}\sin\left(\frac{t\sqrt{6}}{5}\right)\end{bmatrix},$$

$$e^{\mathcal{A}_2 t}=\begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{10}}\cos\left(\frac{t\sqrt{399}}{10}\right)+\frac{1}{\sqrt{399}}e^{-\frac{t}{10}}\sin\left(\frac{t\sqrt{399}}{10}\right) & \frac{10}{\sqrt{399}}e^{-\frac{t}{10}}\sin\left(\frac{t\sqrt{399}}{10}\right)\\ -\frac{40}{\sqrt{399}}e^{-\frac{t}{10}}\sin\left(\frac{t\sqrt{399}}{10}\right) & e^{-\frac{t}{10}}\cos\left(\frac{t\sqrt{399}}{10}\right)-\frac{1}{\sqrt{399}}e^{-\frac{t}{10}}\sin\left(\frac{t\sqrt{399}}{10}\right)\end{bmatrix}.$$

Обозначим через $\mathcal{Z}(t,s)$ матрицу Коши системы (3.4), (3.5). Тогда матрица монодромии системы (3.4), (3.5) имеет вид

$$\mathcal{Z}(7\pi/4,0)=\exp\big((3\pi/4)\mathcal{A}_2\big)\exp(\pi\mathcal{A}_1). \tag{3.31}$$

Используя программные пакеты (например, Maple), можно численно найти приближенные значения коэффициентов матрицы (3.31) и ее собственных значений. Получим

$$\mathcal{Z}(7\pi/4,0)\approx\begin{bmatrix}0.139739257 & -0.016106519\\ 0.259430709 & 2.353239289\end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Собственные значения матрицы (3.32), т. е. мультипликаторы системы (3.4), (3.5), есть $\rho_1\approx 2.351349931$, $\rho_2\approx 0.1416286156$. Поскольку один из мультипликаторов по модулю больше единицы, отсюда следует, что система (3.4), (3.5) неустойчива. Предложенное доказательство является более коротким, чем приведенное выше. Его “недостаток” заключается в том, что оно выполнено с помощью компьютера: получение оценки $|\rho_1|>1$ для одного из собственных значений матрицы (3.31) “вручную” (без использования компьютера) может оказаться задачей не менее трудоемкой, чем проведенное выше доказательство. Кроме того, в доказательстве теоремы 5 был предложен некоторый метод построения нестационарной функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости. Проблема построения функции Ляпунова для нестационарных систем — это важная и, как правило, нетривиальная задача. Предложенная методика может быть полезной при исследовании других задач.

Замечание 3. Теорема Ляпунова о неустойчивости допускает различные формулировки (см., например, [14, гл. IV, § 5; 15, Ch. 5, Sect. 5.6, Theorem 5.29] и [16, гл. I, § 5, следствие 5.3]), имеющие большую или меньшую степень общности. Доказательства соответствующих утверждений также отличаются полнотой и деталями. Наиболее общая формулировка (из трех упомянутых выше) с полным и корректным доказательством представлена в [14, гл. IV, § 5]. Однако в этих формулировках требуется, чтобы функция Ляпунова была непрерывно дифференцируема по t, в то время как в нашем случае функция Ляпунова является кусочно непрерывно дифференцируемой по t. Тем не менее ясно, что условие непрерывной дифференцируемости функции Ляпунова по t в теоремах Ляпунова допускает ослабление до условия кусочной непрерывной дифференцируемой по t. Для полноты и корректности изложения приведем теорему Ляпунова о неустойчивости в формулировке, необходимой (и достаточной) для наших целей, при этом ограничимся линейной периодической системой с кусочно-непрерывной матрицей.

Утверждение 1. *Пусть задана система*

$$\dot z=A(t)z,\quad t\in\mathbb{R},\quad z\in\mathbb{R}^n, \tag{3.33}$$

с периодической кусочно-непрерывной матрицей

$$A(t)=\begin{cases}A_1(t), & t\in[0,\omega_1),\\ A_2(t), & t\in[\omega_1,\omega),\end{cases}\qquad 0<\omega_1\le\omega,$$

где $A_1(\cdot)$ *непрерывна на* $[0,\omega_1)$, $A_2(\cdot)$ *непрерывна на* $[\omega_1,\omega)$; $A(t+\omega)=A(t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Предположим, что существует функция Ляпунова

$$W(t,z)=z^TQ(t)z,\quad t\in\mathbb{R},\quad z\in\mathbb{R}^n,$$

удовлетворяющая следующим условиям:

(1) *матрица* $Q(t)$ *симметрическая, т. е.* $Q^T(t)=Q(t)\quad\forall\, t\in\mathbb{R}$;

(2) *функция* $t\mapsto Q(t)$, $t\in\mathbb{R}$, *непрерывна*;

(3) $Q(t+\omega)=Q(t)$, $t\in\mathbb{R}$;

(4) $Q(t)=\begin{cases} Q_1(t),\ t\in[0,\omega_1), & Q_1(\cdot)\ \text{непрерывно дифференцируема на}\ (0,\omega_1),\\ Q_2(t),\ t\in[\omega_1,\omega), & Q_2(\cdot)\ \text{непрерывно дифференцируема на}\ (\omega_1,\omega);\end{cases}$

(5) *Для некоторого* $\varkappa>0$ *выполнены неравенства*

$$\dot Q_1(t)+A_1^T(t)Q_1(t)+Q_1(t)A_1(t)\ge\varkappa I,\quad t\in(0,\omega_1),$$
$$\dot Q_2(t)+A_2^T(t)Q_2(t)+Q_2(t)A_2(t)\ge\varkappa I,\quad t\in(\omega_1,\omega),$$

в смысле квадратичных форм (т. е. производная функции Ляпунова в силу системы (3.33) *есть квадратичная форма, положительно определенная равномерно относительно п.в.* $t\in\mathbb{R}$, *за возможным исключением точек разрыва функции* $A(t)$*).*

Если существует $t_0\in\mathbb{R}$ *и существует* $z^0\in\mathbb{R}^n$ *такие, что* $W(t_0,z^0)>0$, *то нулевое решение* $\xi(t)\equiv 0$ *системы* (3.33) *неустойчиво в смысле Ляпунова при* $t\to+\infty$.

Доказательство утверждения 1 проводится в соответствии с доказательством теоремы 3 [14, гл. IV, § 5]. □

Замечание 4. Следует отметить, что соответствующие равенства в доказательстве теоремы 5 для выражений, содержащих производные, понимаются для почти всех $t\in\mathbb{R}$, за возможным исключением точек разрыва функции (3.5): это формулы (3.4), (3.11), (3.13), (3.19), (3.20)–(3.22), (3.24), (3.27).

Замечание 5. Пример системы, приведенный в доказательстве теоремы 5, очевидно, будет обеспечивать пример системы для теоремы 1. Таким образом, вместе с доказательством теоремы 5, теорема 1 также доказана. □

4. Доказательство теоремы 2

Пусть $n:=2$. Положим

$$f(t):=\begin{cases}2, & t\in[0,1),\\ -2, & t\in[1,1+\pi/6),\end{cases}\qquad g(t):=\begin{cases}-3, & t\in[0,1),\\ 5, & t\in[1,1+\pi/6),\end{cases}$$

$$\begin{aligned} p_1(t)&:=f\big(t-(1+\pi/6)k\big),\\ p_2(t)&:=g\big(t-(1+\pi/6)k\big),\end{aligned}\qquad t\in\big[(1+\pi/6)k,(1+\pi/6)(k+1)\big),\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

Функции (4.1) — это кусочно-постоянные периодические функции с периодом $\omega=1+\pi/6$. Уравнение (1.17) с коэффициентами (4.1) имеет вид

$$\begin{cases} x''+2x'-3x=0, & t\in\big[0+(1+\pi/6)k,1+(1+\pi/6)k\big),\\ x''-2x'+5x=0, & t\in\big[1+(1+\pi/6)k,(1+\pi/6)(k+1)\big),\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Очевидно, что при каждом $t\in\mathbb{R}$ многочлен (1.18) не является гурвицевым, т. е. свойство (a) теоремы 2 выполнено. Докажем, что уравнение (4.2) асимптотически устойчиво. Произведем замену переменных $z_1 = x$, $z_2 = x'$ в уравнении (4.2); обозначим $z := [z_1, z_2]^T \in \mathbb{R}^2$. Уравнение (4.2) преобразуется к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^2, \tag{4.3}$$

$$\text{где} \quad A(t) = A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1); \qquad A(t) = A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad t \in [1, 1+\pi/6), \tag{4.4}$$

и $A(t+\omega) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Найдем матричную экспоненту для матриц A_1, A_2, имеем

$$\exp(A_1 t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^t + e^{-3t} & e^t - e^{-3t} \\ 3e^t - 3e^{-3t} & e^t + 3e^{-3t} \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

$$\exp(A_2 t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t\big(2\cos(2t) - \sin(2t)\big) & e^t \sin(2t) \\ -5e^t \sin(2t) & e^t\big(2\cos(2t) + \sin(2t)\big) \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Обозначим через $Z(t,s)$ матрицу Коши системы (4.3), (4.4). Тогда матрица монодромии есть

$$Z(1+\pi/6, 0) = \exp\big((\pi/6)A_2\big) \exp\big(A_1\big). \tag{4.7}$$

Из формул (4.5), (4.6) выводим

$$\exp\big(A_1\big) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e + e^{-3} & e - e^{-3} \\ 3e - 3e^{-3} & e + 3e^{-3} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} e^{-3} \begin{bmatrix} 3e^4 + 1 & e^4 - 1 \\ 3e^4 - 3 & e^4 + 3 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

$$\exp\big((\pi/6)A_2\big) = \frac{1}{4} e^{\pi/6} \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Обозначим

$$s := \operatorname{Sp} Z(1+\pi/6, 0), \qquad \Delta := \det Z(1+\pi/6, 0).$$

Имеем

$$\det\big(\exp(A_1)\big) = \exp\big(\operatorname{Sp}(A_1)\big) = e^{-2}, \quad \det\Big(\exp\big((\pi/6)A_2\big)\Big) = \exp\Big(\operatorname{Sp}\big((\pi/6)A_2\big)\Big) = e^{\pi/3}.$$

Следовательно, в силу равенства (4.7) $0 < \Delta = e^{-2+\pi/3} < 1$.

Затем перемножим матрицы (4.9) и (4.8) и найдем след полученной матрицы; имеем

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{16} e^{-3+\pi/6} \big[(2-\sqrt{3})(3e^4+1) + \sqrt{3}(3e^4-3) - 5\sqrt{3}(e^4-1) + (2+\sqrt{3})(e^4+3)\big] \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4} e^{1+\pi/6} + \frac{2+\sqrt{3}}{4} e^{-3+\pi/6}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Очевидно, $s > 0$. Оценим сверху величину (4.10). Имеем $2.72^8 < 5^5$, значит, $2.72^{8/5} < 5$. Далее, $\pi/6 < 3/5$, поэтому $1 + \pi/6 < 8/5$. Таким образом, $e^{1+\pi/6} < e^{8/5} < 2.72^{8/5} < 5$. Отсюда

$$\frac{2-\sqrt{3}}{4} e^{1+\pi/6} < \frac{0.3}{4} \cdot 5 = 0.375. \tag{4.11}$$

Далее, $e^{-3+\pi/6} < e^{-2} < 2^{-2} = 0.25$. Следовательно,

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4} e^{-3+\pi/6} < 1 \cdot 0.25 = 0.25. \tag{4.12}$$

Из (4.10), (4.11) и (4.12) вытекает, что $s < 0.375 + 0.25 = 0.625 < 1$. Обозначим через ρ_1, ρ_2 собственные значения матрицы монодромии (4.7). Тогда

$$\rho_1 + \rho_2 = s < 1, \tag{4.13}$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \Delta < 1. \tag{4.14}$$

Так как $s > 0$ и $\Delta > 0$, то $\operatorname{Re}\rho_1 > 0$ и $\operatorname{Re}\rho_2 > 0$. Если одно из чисел, скажем ρ_1, вещественное и $\rho_1 \geq 1$, то другое также вещественное и больше 0. Тогда их сумма ≥ 1, что противоречит утверждению (4.13). Если одно из чисел, скажем ρ_1, комплексное и $|\rho_1| \geq 1$, то ρ_2 также комплексное, при этом $\rho_2 = \overline{\rho}_1$. Соответственно, $\rho_1\rho_2 = |\rho_1|^2 \geq 1$, что противоречит (4.14). Поэтому оба собственных значения ρ_1, ρ_2 по модулю меньше единицы. Следовательно, система (4.3), (4.4) асимптотически устойчива. Значит, уравнение (4.2) является асимптотически устойчивым.

Теорема доказана. □

5. Случаи $n \neq 2$

Обсудим, возможно ли построить соответствующие примеры в теоремах 1, 2, 5 для $n \neq 2$. Пусть $n = 1$. Рассмотрим уравнение

$$x' + p_1(t)x = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad p_1(t) \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Общее решение уравнения (5.1) имеет вид

$$x(t) = C \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} p_1(s)\, ds \right). \tag{5.2}$$

Предположим, что функция $p_1(t)$ удовлетворяет условию $a_1 \leq p_1(t) \leq b_1$, $t \in \mathbb{R}$. Если многочлены $\lambda + a_1$ и $\lambda + b_1$ устойчивы, то $0 < a_1 \leq b_1$. Тогда общее решение (5.2) уравнения (5.1) удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| \leq |C| e^{-a_1(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Следовательно, уравнение (5.1) с необходимостью является экспоненциально устойчивым. Таким образом, построить соответствующий пример в теореме 5 для $n = 1$ невозможно.

Если для всякого $t \in \mathbb{R}$ многочлен (1.18)

$$\lambda + p_1(t) \tag{5.3}$$

является устойчивым, то $p_1(t) > 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому интеграл $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} p_1(s)\, ds$ либо

(a) равен $+\infty$ (если он расходится), либо

(b) равен конечному числу $K > 0$ (если он сходится).

Тогда либо

(a) $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, либо

(b) $x(t) \to Ce^{-K}$ при $t \to +\infty$; т. е. либо

(a) уравнение асимптотически устойчиво, либо

(b) уравнение (неасимптотически) устойчиво. Таким образом, построить соответствующий пример в теореме 1 для $n = 1$ невозможно.

Далее, если для всякого $t \in \mathbb{R}$ многочлен (5.3) не устойчив, то $p_1(t) \leq 0$. Тогда общее решение (5.2) уравнения (5.1) удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| = |C| \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} p_1(s)\, ds \right) \geq |C| \exp(0) = |C|, \quad t \geq t_0.$$

Следовательно, уравнение (5.1) с необходимостью не является асимптотически устойчивым. Значит, построить соответствующий пример в теореме 2 для $n = 1$ также невозможно.

Пусть теперь $n > 2$. Тогда построить соответствующие примеры для теоремы 5 (и для теоремы 1), по-видимому, возможно для любого $n > 2$. Мы построим соответствующие примеры для $n = 3, 4, 5, 6$.

Теорема 6. *Пусть* $n = 3$, *или* $n = 4$, *или* $n = 5$, *или* $n = 6$. *Тогда существуют числа* a_j, b_j *и кусочно-непрерывные функции* $p_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, *такие, что выполнены следующие свойства.*

1. *Выполнены неравенства* (2.5).
2. *Многочлены* (2.3), *где* $a_0 = b_0 = 1$, *устойчивы.*
3. *Уравнение* (2.4) *неустойчиво.*

Доказательство. Опишем общую идею построения функций $p_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, $n > 2$. Воспользуемся теоремой 5, доказанной для случая $n = 2$. Характеристический многочлен (1.18) $\chi_2(t, \lambda)$ уравнения (3.3) с коэффициентами (3.1), (3.2) имеет вид

$$\chi_2(t, \lambda) = \lambda^2 + 0.2\lambda + 0.25, \qquad t \in [0, \pi),$$
$$\chi_2(t, \lambda) = \lambda^2 + 0.2\lambda + 4, \qquad t \in [\pi, 7\pi/4),$$

и $\chi_2(t + 7\pi/4, \lambda) = \chi_2(t, \lambda)$, $t \in \mathbb{R}$. Пусть $n > 2$. Будем искать характеристический многочлен $\chi_n(t, \lambda)$ для уравнения (2.4) в виде

$$\chi_n(t, \lambda) = \chi_2(t, \lambda)(\lambda + c)^{n-2}, \tag{5.4}$$

где $c > 0$ — число априори неизвестное, которое нам следует определить. Многочлен (5.4) так же, как и $\chi_2(t, \lambda)$, является кусочно-постоянным по t, периодическим с периодом $\omega = 7\pi/4$. По многочлену (5.4), раскрывая скобки в (5.4), построим функции $p_j(t)$, $j = \overline{1, n}$. Эти функции при $j = \overline{2, n}$ являются кусочно-постоянными, ω-периодическими и принимают два значения $p_j^1 < p_j^2$; при $j = 1$ функция $p_j(t)$ постоянная и принимает значение $p_1 = 0.2 + c(n-2)$. Положим $a_j := p_j^1$, $b_j := p_j^2$, $j = \overline{2, n}$; $a_1 := b_1 := p_1$; $a_0 := b_0 := 1$. Таким образом, неравенства (2.5) будут выполнены.

По построенным значениям a_j, b_j, $j = \overline{0, n}$, построим полиномы (2.3). Для каждого из четырех полиномов Харитонова (2.3) выпишем условия его гурвицевости: по теореме Гурвица эти условия представляют собой систему из n неравенств для миноров матрицы Гурвица. Составим систему из четырех систем неравенств. Разрешая (численно, с помощью Maple) эту систему алгебраических неравенств относительно c, мы находим решение этой системы в виде $c > \alpha_n$. В частности, получились следующие значения:

$$\alpha_3 \approx 18.54, \quad \alpha_4 \approx 37.28, \quad \alpha_5 \approx 56.03, \quad \alpha_6 \approx 74.84.$$

Выбирая число c больше, чем α_n, получим искомое значение числа c. Затем, вычисляя (приближенно с помощью Maple) мультипликаторы уравнения (2.4) с построенными функциями $p_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, показываем, что один из них по модулю больше 1, значит, уравнение (2.4) неустойчиво.

Выпишем найденные значения коэффициентов.

($\mathbf{n = 3}$) Берем $c = 20$. Тогда

$$\chi_3(t, \lambda) = \chi_2(t, \lambda)(\lambda + 20)$$

$$= \begin{cases} (\lambda^2 + 0.2\lambda + 0.25)(\lambda + 20), & t \in [0, \pi), \\ (\lambda^2 + 0.2\lambda + 4)(\lambda + 20), & t \in [\pi, 7\pi/4), \end{cases} = \begin{cases} \lambda^3 + 20.2\lambda^2 + 4.25\lambda + 5, & t \in [0, \pi), \\ \lambda^3 + 20.2\lambda^2 + 8\lambda + 80, & t \in [\pi, 7\pi/4). \end{cases}$$

Полагаем

$$p_1(t) := 20.2, \quad p_2(t) := \begin{cases} 4.25, & t \in [0, \pi), \\ 8, & t \in [\pi, 7\pi/4), \end{cases} \quad p_3(t) := \begin{cases} 5, & t \in [0, \pi), \\ 80, & t \in [\pi, 7\pi/4). \end{cases} \tag{5.5}$$

Продолжим $p_2(t)$ и $p_3(t)$ на $\mathbb{R}$ периодически с периодом $\omega = 7\pi/4$. Полагаем

$$a_0 := b_0 := 1, \quad a_1 := b_1 := 20.2, \quad a_2 := 4.25, \quad b_2 := 8, \quad a_3 := 5, \quad b_3 := 80. \tag{5.6}$$

Тогда неравенства (2.5) выполнены. Можно проверить, с помощью теоремы Гурвица, что многочлены (2.3) с коэффициентами (5.6) устойчивы. Один из мультипликаторов уравнения (2.4) с коэффициентами (5.5) определяется как $\rho_1 \approx 2.3513499305$. Значит, уравнение (2.4), (5.5) неустойчиво.

($\mathbf{n = 4}$) Берем $c = 40$. Тогда

$$\chi_4(t,\lambda) = \chi_2(t,\lambda)(\lambda+40)^2 = \begin{cases} \lambda^4 + 80.2\lambda^3 + 1616.25\lambda^2 + 340\lambda + 400, & t \in [0,\pi), \\ \lambda^4 + 80.2\lambda^3 + 1620\lambda^2 + 640\lambda + 6400, & t \in [\pi, 7\pi/4). \end{cases}$$

Полагаем

$$p_1(t) := 80.2, \qquad \begin{cases} p_2(t) := 1616.25, \quad p_3(t) := 340, \quad p_4(t) := 400, & t \in [0,\pi), \\ p_2(t) := 1620, \quad p_3(t) := 640, \quad p_4(t) := 6400, & t \in [\pi, 7\pi/4). \end{cases} \tag{5.7}$$

Продолжим $p_2(t)$, $p_3(t)$ и $p_4(t)$ на $\mathbb{R}$ периодически с периодом $\omega = 7\pi/4$. Полагаем

$$\begin{gathered} a_0 := b_0 := 1, \quad a_1 := b_1 := 80.2, \quad a_2 := 1616.25, \quad b_2 := 1620, \\ a_3 := 340, \quad b_3 := 640, \quad a_4 := 400, \quad b_4 := 6400. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Тогда неравенства (2.5) выполнены. Можно проверить с помощью теоремы Гурвица, что многочлены (2.3) с коэффициентами (5.8) устойчивы. Один из мультипликаторов уравнения (2.4) с коэффициентами (5.7) определяется как $\rho_1 \approx 2.3513499305$. Значит, уравнение (2.4), (5.7) неустойчиво.

($\mathbf{n = 5}$) Берем $c = 60$. Построим $\chi_5(t,\lambda) = \chi_2(t,\lambda)(\lambda+60)^3$. Раскроем скобки; построим функции $p_j(t)$, $j = \overline{1,n}$; по ним — a_j, b_j, $j = \overline{1,n}$. Многочлены (2.3) будут устойчивыми. Уравнение (2.4) будет иметь мультипликатор $\rho_1 \approx 2.3513499305$.

($\mathbf{n = 6}$) Берем $c = 80$. Построим $\chi_6(t,\lambda) = \chi_2(t,\lambda)(\lambda+80)^4$. Раскроем скобки; построим функции $p_j(t)$, $j = \overline{1,n}$; по ним — a_j, b_j, $j = \overline{1,n}$. Многочлены (2.3) будут устойчивыми. Уравнение (2.4) будет иметь мультипликатор $\rho_1 \approx 2.3513499305$.

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 6. Учитывая доказательство теоремы 6, можно выдвинуть гипотезу, что для произвольного $n > 2$ коэффициент c в формуле (5.4) можно взять равным $c = 20(n-2)$.

Построим соответствующие примеры для теоремы 2 для $n = 3, 4, 5, 6$.

Теорема 7. *Пусть $n = 3$, или $n = 4$, или $n = 5$, или $n = 6$. Тогда существуют ограниченные кусочно-непрерывные функции $p_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$, такие, что выполнены следующие свойства:*

(*a*) *для всякого $t \in \mathbb{R}$ многочлен* (1.18) *не является устойчивым*;

(*b*) *уравнение* (1.17) *является асимптотически устойчивым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опишем идею построения функций $p_i(t)$, $j = \overline{1,n}$, $n > 2$. Воспользуемся теоремой 2, доказанной для случая $n = 2$. Характеристический многочлен (1.18) $\chi_2(t,\lambda)$ уравнения (4.2) имеет вид

$$\chi_2(t,\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3, \qquad t \in [0,1), \tag{5.9}$$

$$\chi_2(t,\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5, \qquad t \in [1,\omega), \tag{5.10}$$

и $\chi_2(t+\omega,\lambda)=\chi_2(t,\lambda)$, $t\in\mathbb{R}$, где $\omega=1+\pi/6$. Пусть $n>2$. Положим характеристический многочлен (1.18) уравнения (1.17) равным

$$\chi_n(t,\lambda)=\chi_2(t,\lambda)\prod_{j=1}^{n-2}(\lambda+n+j). \tag{5.11}$$

Многочлен (5.11) так же, как и $\chi_2(t,\lambda)$, является кусочно-постоянным по t, периодическим с периодом $\omega=1+\pi/6$. По многочлену (5.11), раскрывая скобки в (5.11), построим функции $p_j(t)$, $j=\overline{1,n}$. Эти функции являются кусочно-постоянными, ω-периодическими и принимают два значения. Построим уравнение (1.17) с этими функциями $p_j(t)$, $j=\overline{1,n}$. Многочлен (5.9) имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$; многочлен (5.10) — $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$; т. е. многочлен $\chi_2(t,\lambda)$ для всякого $t\in\mathbb{R}$ имеет корень λ_j с $\operatorname{Re}\lambda_j>0$. Значит, и многочлен (5.11) обладает этим свойством, т. е. для всякого $t\in\mathbb{R}$ не является устойчивым.

Произведем замену переменных $z_1=x$, $z_2=x'$, …, $z_n=x^{(n-1)}$ в построенном уравнении (1.17); обозначим $z=[z_1,z_2,\dots,z_n]^T\in\mathbb{R}^n$. Уравнение (1.17) преобразуется к системе дифференциальных уравнений

$$\dot z=A(t)z,\quad z\in\mathbb{R}^n, \tag{5.12}$$

с кусочно-постоянной, периодической матрицей $A(t)=\{A_1,\ t\in[0,1);\ A_2,\ t\in[1,\omega)\}$ с периодом $\omega>0$. Матрица монодромии системы (5.12) есть $Z(\omega,0)=\exp\big((\pi/6)A_2\big)\exp(A_1)$. Вычисляя (приближенно, с помощью Maple) коэффициенты матрицы монодромии и ее собственные значения, показываем, что мультипликаторы по модулю меньше 1; значит, система (5.12) асимптотически устойчива, и, следовательно, уравнение (1.17) асимптотически устойчиво.

При $n=2$ матрица монодромии (4.7) имеет собственные значения

$$\Lambda_1\approx 0.1929002095+0.5902950345i,\quad \Lambda_2\approx 0.1929002095-0.5902950345i. \tag{5.13}$$

Имеем $|\Lambda_1|=|\Lambda_2|\approx 0.6210142660<1$. Следовательно, система (5.12) асимптотически устойчива (это было доказано в теореме 2 с помощью оценок).

($\mathbf{n=3}$) Имеем

$$\chi_3(t,\lambda)=\chi_2(t,\lambda)(\lambda+4)=\begin{cases}(\lambda^2+2\lambda-3)(\lambda+4), & t\in[0,1),\\ (\lambda^2-2\lambda+5)(\lambda+4), & t\in[1,\omega),\end{cases}=\begin{cases}\lambda^3+6\lambda^2+5\lambda-12, & t\in[0,1),\\ \lambda^3+2\lambda^2-3\lambda+20, & t\in[1,\omega).\end{cases}$$

Полагаем

$$\begin{cases}p_1(t):=6,\quad p_2(t):=5,\quad p_3(t):=-12, & t\in[0,1),\\ p_1(t):=2,\quad p_2(t):=-3,\quad p_3(t):=20, & t\in[1,\omega).\end{cases} \tag{5.14}$$

Продолжим $p_1(t)$, $p_2(t)$ и $p_3(t)$ на $\mathbb{R}$ периодически с периодом ω. Найдем мультипликаторы уравнения (1.17) с коэффициентами (5.14), получим

$$\rho_{1,2}\approx 0.1929002087\pm 0.5902950344i,\quad \rho_3\approx 0.0022554742.$$

Значения $\rho_{1,2}$ близки к (5.13); ρ_3 близко к

$$\exp(-4\omega)=\exp\big(-4(1+\pi/6)\big)\approx 0.0022554740. \tag{5.15}$$

Имеем $|\rho_1|=|\rho_2|\approx 0.6210142657<1$, $|\rho_3|<1$. Значит, уравнение (1.17), (5.14) асимптотически устойчиво.

($\mathbf{n=4}$) Имеем

$$\chi_4(t,\lambda)=\chi_2(t,\lambda)(\lambda+4)(\lambda+5)=\begin{cases}\lambda^4+11\lambda^3+35\lambda^2+13\lambda-60, & t\in[0,1),\\ \lambda^4+7\lambda^3+7\lambda^2+5\lambda+100, & t\in[1,\omega).\end{cases}$$

Полагаем

$$\begin{cases} p_1(t) := 11, \quad p_2(t) := 35, \quad p_3(t) := 13, \quad p_4(t) := -60, \quad t \in [0, 1), \\ p_1(t) := 7, \quad p_2(t) := 7, \quad p_3(t) := 5, \quad p_4(t) := 100, \quad t \in [1, \omega). \end{cases} \tag{5.16}$$

Продолжим $p_j(t)$, $j = \overline{1, 4}$, на $\mathbb{R}$ периодически с периодом $\omega = 1 + \pi/6$. Найдем мультипликаторы уравнения (1.17) с коэффициентами (5.16), получим

$$\rho_{1,2} \approx 0.1929002098 \pm 0.5902950336i, \quad \rho_3 \approx 0.0022554771, \quad \rho_4 \approx 0.0004915247.$$

Значения $\rho_{1,2}$ близки к (5.13); ρ_3 близко к (5.15); ρ_4 близко к

$$\exp(-5\omega) = \exp\big(-5(1 + \pi/6)\big) \approx 0.0004915269. \tag{5.17}$$

Имеем $|\rho_1| = |\rho_2| \approx 0.6210142652 < 1$, $|\rho_3| < 1$, $|\rho_4| < 1$. Значит, уравнение (1.17), (5.16) асимптотически устойчиво.

(**n = 5**) Имеем $\chi_5(t, \lambda) = \chi_2(t, \lambda)(\lambda + 4)(\lambda + 5)(\lambda + 6)$. Раскроем скобки; построим функции $p_j(t)$, $j = \overline{1, 5}$; получим

$$\begin{cases} p_1(t) := 17, \quad p_2(t) := 101, \quad p_3(t) := 223, \quad p_4(t) := 18, \quad p_5(t) := -360, \quad t \in [0, 1), \\ p_1(t) := 13, \quad p_2(t) := 49, \quad p_3(t) := 47, \quad p_4(t) := 130, \quad p_5(t) := 600, \quad t \in [1, \omega). \end{cases} \tag{5.18}$$

Продолжим $p_j(t)$, $j = \overline{1, 5}$, на $\mathbb{R}$ периодически с периодом $\omega = 1 + \pi/6$. Найдем мультипликаторы уравнения (1.17) с коэффициентами (5.18), получим

$$\rho_{1,2} \approx 0.1929002072 \pm 0.5902950339i, \quad \rho_3 \approx 0.0022554736,$$
$$\rho_4 \approx 0.0004915272, \quad \rho_5 \approx 0.0001071165899.$$

Значения $\rho_{1,2}$ близки к (5.13); ρ_3 близко к (5.15); ρ_4 близко к (5.17); ρ_5 близко к

$$\exp(-6\omega) = \exp\big(-6(1 + \pi/6)\big) \approx 0.0001071165939. \tag{5.19}$$

Имеем $|\rho_1| = |\rho_2| \approx 0.6210142647 < 1$, $|\rho_j| < 1$, $j = 3, 4, 5$. Значит, уравнение (1.17), (5.18) асимптотически устойчиво.

(**n = 6**) Имеем $\chi_6(t, \lambda) = \chi_2(t, \lambda)(\lambda + 4)(\lambda + 5)(\lambda + 6)(\lambda + 7)$. Раскроем скобки; построим функции $p_j(t)$, $j = \overline{1, 6}$; получим

$$\begin{cases} p_1(t) := 24, \quad p_2(t) := 220, \quad p_3(t) := 930, \quad p_4(t) := 1579, \\ \qquad\qquad p_5(t) := -234, \quad p_6(t) := -2520, \quad t \in [0, 1), \\ p_1(t) := 20, \quad p_2(t) := 140, \quad p_3(t) := 390, \quad p_4(t) := 459, \\ \qquad\qquad p_5(t) := 1510, \quad p_6(t) := 4200, \quad t \in [1, \omega). \end{cases} \tag{5.20}$$

Продолжим $p_j(t)$, $j = \overline{1, 6}$, на $\mathbb{R}$ периодически с периодом $\omega = 1 + \pi/6$. Найдем мультипликаторы уравнения (1.17) с коэффициентами (5.20), получим

$$\rho_{1,2} \approx 0.1929002162 \pm 0.5902950333i, \quad \rho_3 \approx 0.0022554361,$$
$$\rho_4 \approx 0.0004915841, \quad \rho_5 \approx 0.0001070886, \quad \rho_6 \approx 0.0000233479.$$

Значения $\rho_{1,2}$ близки к (5.13); ρ_3 близко к (5.15); ρ_4 близко к (5.17); ρ_5 близко к (5.19); ρ_6 близко к $\exp(-7\omega) = \exp\big(-7(1 + \pi/6)\big) \approx 0.0000233435$. Имеем $|\rho_1| = |\rho_2| \approx 0.6210142669 < 1$, $|\rho_j| < 1$, $j = \overline{3, 6}$. Значит, уравнение (1.17), (5.20) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 7. Из доказанных теорем следует, что для нестационарных дифференциальных уравнений (1.17) аналоги теорем Харитонова не имеют места и не обеспечивают достаточных условий асимптотической устойчивости уравнения (1.17). Такие достаточные условия обеспечивает теорема Левина [8]. На основе этой теоремы в работе [17] получены достаточные условия экспоненциальной стабилизации линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию и по выходу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Постников М.М.** Устойчивые многочлены. М.: Едиториал УРСС, 2004. 176 с.
2. **Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.** Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.
3. **Coppel W.A.** Dichotomies in stability theory. Berlin; Heidelberg: Springer, 1978. 97 p. doi: 10.1007/BFb0067780.
4. **Wu M.** A note on stability of linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1974. Vol. 19, no. 2. P. 162. doi: 10.1109/TAC.1974.1100529.
5. **Ilchmann A., Owens D.H., Prätzel-Wolters D.** Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems // Systems and Control Letters. 1987. Vol. 9, no. 2. P. 157–163. doi: 10.1016/0167-6911(87)90022-3.
6. **Amato F., Celentano G., Garofalo F.** New sufficient conditions for the stability of slowly varying linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1993. Vol. 38, no. 9. P. 1409–1411. doi: 10.1109/9.237657.
7. **Solo V.** On the stability of slowly time-varying linear systems // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 1994. Vol. 7, no. 4. P. 331–350. doi: 10.1007/bf01211523.
8. **Левин А.Ю.** Абсолютная неосцилляционная устойчивость и смежные вопросы // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, вып. 1. С. 154–166.
9. **Wan J.-M.** Explicit solution and stability of linear time-varying differential state space systems // Internat. J. Control Automat. Syst. 2017. Vol. 15, no. 4. P. 1553–1560. doi: 10.1007/s12555-015-0404-5.
10. **Vrabel R.** A note on uniform exponential stability of linear periodic time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65, no. 4. P. 1647–1651. doi: 10.1109/tac.2019.2927949.
11. **Якубович В.А., Старжинский В.М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.
12. **Харитонов В.Л.** Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 11. С. 2086–2088.
13. **Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H.** Robust contol. The parametric approach. Upper Saddle, NJ: Prentice Hall PTR, 1995. 648 p.
14. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. СПб.: Лань, 2008. 480 с.
15. **Sastry Sh.** Nonlinear systems. Analysis, stability, and control. NY: Berlin: Heidelberg: Springer, 1999. 667 p.
16. **Руш Н., Абетс П., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
17. **Zaitsev V., Kim I.** Exponential stabilization of linear time-varying differential equations with uncertain coefficients by linear stationary feedback // Mathematics. 2020. Vol. 8, no. 5. Art. no. 853. doi: 10.3390/math8050853.

Поступила 30.05.2022
После доработки 21.06.2022
Принята к публикации 4.07.2022

Зайцев Василий Александрович
д-р физ.-мат. наук, доцент
зав. лабораторией
Удмуртский государственный университет
г. Ижевск
e-mail: verba@udm.ru

Ким Инна Геральдовна
научный сотрудник
Удмуртский государственный университет
г. Ижевск
e-mail: kimingeral@gmail.com

REFERENCES

1. Postnikov M.M. *Ustoichivye mnogochleny* [Stable polynomials]. Moscow: Editorial URSS, 2004, 176 p. ISBN: 5-354-00637-6 .
2. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova* [Theory of Lyapunov exponents]. Moscow: Nauka Publ., 1966, 576 p.
3. Coppel W.A. *Dichotomies in stability theory.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1978, 97 p. doi: 10.1007/BFb0067780 .
4. Wu M. A note on stability of linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. 19, no. 2, p. 162. doi: 10.1109/TAC.1974.1100529 .
5. Ilchmann A., Owens D.H., Prätzel-Wolters D. Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems. *Systems & Control Letters*, 1987, vol. 9, no. 2, pp. 157–163. doi: 10.1016/0167-6911(87)90022-3 .
6. Amato F., Celentano G., Garofalo F. New sufficient conditions for the stability of slowly varying linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, vol. 38, no. 9, pp. 1409–1411. doi: 10.1109/9.237657 .
7. Solo V. On the stability of slowly time-varying linear systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1994, vol. 7, no. 4, pp. 331–350. doi: 10.1007/BF01211523 .
8. Levin A.Yu. Absolute nonoscillatory stability and related questions. *St. Petersburg Math. J.*, 1993, vol. 4, pp. 149–161.
9. Wan J. Explicit solution and stability of linear time-varying differential state space systems. *Internet. J. Control Autom. Syst.*, 2017, vol. 15, no. 4, pp. 1553–1560. doi: 10.1007/s12555-015-0404-5 .
10. Vrabel R. A note on uniform exponential stability of linear periodic time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, vol. 65, no. 4, pp. 1647–1651. doi: 10.1109/TAC.2019.2927949 .
11. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. *Linear differential equations with periodic coefficients*, vol. 1, 2. NY; Toronto: John-Wiley & Sons, 1975, 839 p. ISBN: 0706514807 . Original Russian text published in Yakubovich V.A., *Lineinye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya*, Moscow: Nauka, 1972, 720 p.
12. Kharitonov V.L. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Diff. Eq.*, 1979, vol. 14, pp. 1483–1485.
13. Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H. *Robust contol: The parametric approach.* Upper Saddle, NJ: Prentice Hall PTR, 1995, 648 p. ISBN: 9780137815760 .
14. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheckoi teorii ustoichivosti* [Lectures on the mathematical theory of stability]. Saint-Petresburg: Lan' Publ., 2008, 480 p. ISBN: 978-5-8114-0891-7 .
15. Sastry S. *Nonlinear systems: Analysis, stability, and control.* NY: Springer, 1999, 667 p. doi: 10.1007/978-1-4757-3108-8 .
16. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability theory by Liapunov's direct method. NY; Heidelberg; Berlin: Springer, 1977. 408 p.
17. Zaitsev V., Kim I. Exponential stabilization of linear time-varying differential equations with uncertain coefficients by linear stationary feedback. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 5, art. no. 853. doi: 10.3390/math8050853 .

Received May 30, 2022
Revised June 21, 2022
Accepted July 4, 2022

Funding Agency: This was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within project FEWS-2020-0010 (state contract no. 075-01265-22-00).

Vasilii Aleksandrovich Zaitsev, Dr. Phys.-Math. Sci., Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: verba@udm.ru .

Inna Geraldovna Kim, Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia,
e-mail: kimingeral@gmail.com .

Cite this article as: V. A. Zaitsev, I. G. Kim. On the stability of linear time-varying differential equations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 94–113.