ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 977.5

О МНОЖЕСТВЕ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ С ПОЗИЦИОННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ, ПОРОЖДЕННОМ СЛАБО УБЫВАЮЩИМИ РЕШЕНИЯМИ НЕРАВЕНСТВА ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

В. А. Дыхта

Любое слабо убывающее решение неравенства Гамильтона — Якоби допускает постановку так называемой присоединенной задачи динамической оптимизации на множестве конструктивных движений Красовского — Субботина, соответствующих позиционным экстремальным стратегиям. Получены условия, при которых оптимальная траектория рассматриваемой задачи терминального управления является минималью присоединенной задачи для фиксированной мажоранты — некоторого решения указанного неравенства Гамильтона — Якоби. Результат формулируется в терминах совместимости этого решения с оптимальной траекторией. В общем случае негладкой мажоранты (и негладкой задачи) условие совместимости означает, что проксимальный субдифференциал мажоранты, вычисленный вдоль оптимальной траектории, имеет компоненту, совпадающую с некоторым решением сопряженного включения из принципа максимума Кашкоч — Лоясиевича. В этом состоит общий позиционный принцип минимума — необходимое условие глобальной оптимальности, усиливающее известные принципы максимума для задач без терминальных ограничений.

Ключевые слова: экстремали, позиционные управления, слабо убывающие функции, позиционный принцип минимума.

V. A. Dykhta. On the set of necessary optimality conditions with positional controls generated by weakly decreasing solutions of the Hamilton–Jacobi inequality.

Any weakly decreasing solution of the Hamilton–Jacobi inequality generates a so-called accessory problem of dynamic optimization over Krasovskii–Subbotin constructive motions (Euler curves) produced by extremal feedback control strategies. We derive conditions under which an optimal trajectory of the considered Mayer optimal control problem is a minimizer of the accessory problem for a fixed majorant — a certain solution of the Hamilton–Jacobi inequality. The result is formulated in terms of the compatibility of the latter solution with an optimal trajectory. In the general case of a nonsmooth majorant (and a nonsmooth problem), the optimality condition means that there is a component of the proximal subdifferential of the majorant along the optimal trajectory that coincides with a certain solution of an adjoint inclusion arising in the maximum principle of Kaskosz and Łojasiewicz. This implies the general feedback minimum principle — a global necessary optimality condition, which strengthens all known formulations of the maximum principle for problems without terminal constraints.

Keywords: extremals, feedback controls, weakly decreasing functions, feedback minimum principle.

MSC: 49K15, 49L99, 49N35

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-83-93

1. Введение

Рассматривается следующая задача оптимального управления (*задача* (P)):

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1.2}$$

$$J(\sigma) = l(x(t_1)) \to \inf .$$

Здесь через σ обозначаются пары функций $(x, u) \in AC(T, \mathbb{R}^n) \times L_\infty(T, U)$, U — компактное множество в $\mathbb{R}^m$. Вектор-функция $f(t, x, u)$ предполагается непрерывной, липшицевой по x

и удовлетворяющей условию сублинейного роста при $(t, x, u) \in T \times \mathbb{R}^n \times U$; функцию $l(x)$ полагаем липшицевой на $\mathbb{R}^n$.

Пусть Σ — множество всех допустимых пар функций σ и $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ — допустимая пара, исследуемая на оптимальность или субоптимальность.

Хорошо известно [1–5], что почти классические (липшицевые по (t, x), гладкие по x) решения $\varphi(t, x)$ неравенства Гамильтона — Якоби

$$\varphi_t(t,x) + \min_{u \in U} \varphi_x(t,x) \cdot f(t,x,u) \le 0 \text{ на } T \times \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

$$\varphi(t_1, x) = l(x)$$

для слабо убывающих (u-стабильных) функций задают верхнюю оценку значения $\inf J(\Sigma)$ задачи (P).

Более точно, справедливо

Условие (N_+). *Если пара* $(\bar{x}, \bar{u})$ *оптимальна в задаче* (P), *то справедлива оценка*

$$l(\bar{x}(t_1)) \le l(x(t_1)) \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\varphi. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathcal{X}_\varphi$ — пучок конструктивных движений Красовского — Субботина [3–5] (кривых Эйлера [1; 2]) включения

$$\dot{x} \in f(t, x, U_\varphi(t,x)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.5}$$

$$U_\varphi(t,x) = \operatorname*{Argmin}_{u \in U} \varphi_x(t,x) \cdot f(t,x,u) \text{ на } T \times \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Сформулированное необходимое условие оптимальности допускает контрпозитивную переформулировку: траектория $\bar{x}(\cdot)$ не оптимальна, если найдется движение $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\varphi$, нарушающее неравенство (1.4). Поскольку в приложениях работать с включением (1.5), (1.6) затруднительно (φ-экстремальное отображение (1.6) компактозначно и полунепрерывно сверху, но не липшицево), то целесообразно дезагрегировать контрформулировку, перейдя к множеству $\mathcal{V}_\varphi$ селекторов $v(t,x)$ отображения $U_\varphi(t,x)$ [6–9]. Если пучок движений, соответствующих селектору $v \in \mathcal{V}_\varphi$, обозначить через $\mathcal{X}(v)$, то контрформулировку можно дать в следующей редакции.

Условие (N_-). *Если найдутся селектор* $\tilde{v} \in \mathcal{V}_\varphi$ *и движение* $\tilde{x}(\cdot) \in \mathcal{X}(\tilde{v})$ *такие, что* $l(\tilde{x}(t_1)) < l(\bar{x}(t_1))$, *то траектория* $\bar{x}$ *не оптимальна в задаче* (P).

В то же время необходимое условие оптимальности (N_+) траектории $\bar{x}$ сводится к следующему (см. (1.4)):

$$l(\bar{x}(t_1)) \le l(x(t_1)) \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}(v), \quad v \in \mathcal{V}_\varphi. \tag{1.4$'$}$$

Отметим, что негативное условие (N_-) имеет алгоритмический характер: если оно выполнилось (т. е. нарушилось условие (N_+)), то позиционное управление $\tilde{v}$ реализует спуск по функционалу из точки $\bar{\sigma}$. Чтобы в этом убедиться, напомним, что движение $\tilde{x}$ является решением овыпукленной системы (1.1), (1.2); но эти решения равномерно аппроксимируются траекториями исходной системы, так что утверждение о спуске следует из непрерывности целевой функции l.

В то же время условие (N_+) наводит на мысль рассмотреть следующую *φ-присоединенную задачу*:

$$l(x(t_1)) \to \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}(v), \quad v \in \mathcal{V}_\varphi. \tag{1.7}$$

Представляется заманчивым доказать, что траектория $\bar{x}$ необходимо является оптимальной в задаче (1.7). Однако при произвольной мажоранте φ это свойство не может выполняться, так как нет никаких оснований считать, что $\bar{x}$ допустима в задаче (1.7), т. е. $\exists\, \bar{v} \in \mathcal{V}_\varphi : \ \bar{x} \in \mathcal{X}(\bar{v})$.

Этим мотивирована *основная цель* данной статьи: найти условия, при которых для негладких решений проксимального неравенства Гамильтона — Якоби (обобщающего (1.3)) оптимальная траектория $\bar{x}$ задачи (P) *необходимо* является минималью в φ-присоединенной задаче. Конечно, при этом определения пучка $\mathcal{X}_\varphi$ и φ-экстремальных стратегий (1.5), (1.6) должны быть изменены в соответствии с известными правилами экстремального прицеливания [1–5].

В работах [6–9] мажоранты, обладающие этим свойством, названы *опорными.* В них получен частичный ответ на поставленный вопрос для квазилинейных мажорант вида

$$\varphi(t,x) = l(x) + (\bar{\psi}(t) - l_x(\bar{x}(t))) \cdot (x - \bar{x}(t)) + r(t), \tag{1.8}$$

в котором $\bar{\psi}$ — некоторое решение сопряженного включения (уравнения), соответствующее процессу $\bar{\sigma}$, $r(\cdot)$ — "поправка", обеспечивающая монотонность φ, а функция l для простоты полагается гладкой. Говоря точнее, этот ответ получался естественным образом в процессе доказательства необходимых условий в форме различных вариантов *позиционного принципа минимума* — существенного усиления принципов максимума в негладком и классическом вариантах. Подчеркнем: применительно к гладкой задаче (P) усиливался принцип максимума Понтрягина, хотя формулировка позиционного принципа могла содержать сопряженное включение Кларка. Для ясности напомним, что принцип максимума Кларка сводится к классическому в гладкой задаче, а принцип максимума Кашкоч — Лоясиевича [10–15] остается эффективным (но в свою очередь усиливается позиционным принципом минимума). Именно его оказалось необходимым использовать в [16; 17] при выводе наиболее сильного варианта позиционного принципа минимума с мажорантами вида (1.8) и при ответе на основной вопрос данной статьи в общем случае.

Представляется, что этот ответ имеет несомненный теоретический интерес и может быть назван *общим* позиционным принципом минимума: он включает в себя как алгоритмическое свойство спуска (N_{-}), так и условие минимума в вариационной задаче (1.7) для негладких мажорант (и, в частности, вида (1.8)).

2. Экстремали и гладкие опорные мажоранты

Все необходимые условия оптимальности первого порядка формулируются в терминах соответствующих *экстремалей* — Понтрягина, Кларка, Кашкоч — Лоясиевича — и некоторых *присоединенных котраекторий* (adjoint arc) — решений сопряженного уравнения или включения. Условие экстремальности пары $(\bar{x}, \bar{u}) \in \Sigma$ включает в себя условие существования котраектории $\bar{\psi}$ с выполнением неизменного условия минимума функции Понтрягина $(H = \psi \cdot f)$:

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{u}(t)) = \min_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), u), \quad t \in T. \tag{2.1}$$

Тройку функций $\gamma = (\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$, удовлетворяющую этим условиям, назовем *биэкстремалью задачи* (P) в соответствующем смысле.

В этом состоит общая основа утверждающей части формулировок различных принципов максимума (у нас будет минимума). Но предположительные части существенно отличаются "происхождением" котраекторий $\bar{\psi}$. У Понтрягина это единственное решение сопряженной системы гладкой задачи, у Кларка (и его последователей) — какое-либо решение сопряженного включения [18]

$$\dot{\psi}(t) \in -\partial_x H(t, \bar{x}(t), \psi(t), \bar{u}(t)), \quad \psi(t_1) \in \partial\, l(\bar{x}(t_1)),$$

в котором "∂_x" означает обобщенный градиент Кларка по x и аналогичный смысл имеет "∂" в условии трансверсальности. Что же касается принципа минимума, то остановимся на нем подробнее, поскольку он гораздо менее известен.

О п р е д е л е н и е 1. Позиционное управление $w : T \times \mathbb{R}^n \to U$ назовем *L-совместимым с траекторией* $\bar{x}$, если:

а) $f(t, \bar{x}(t), w(t, \bar{x}(t))) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ на T;

б) функция $\hat{f}(t,x) = f(t, x, w(t,x))$ измерима по t, липшицева по x и ограничена на ограниченных множествах.

Для L-совместимого управления w можно рассмотреть сопряженное включение Кларка

$$\dot{\psi}(t) \in -\partial_{(x)} H(t, \bar{x}(t), \psi(t), w(t, \bar{x}(t))), \quad \psi(t_1) \in \partial l(\bar{x}(t_1)), \tag{2.2}$$

в котором символ “$\partial_{(x)}$” означает, что обобщенный градиент вычисляется с учетом зависимости w от x.

Суть принципа минимума Кашкоч — Лоясиевича состоит в следующем утверждении [10; 11; 14; 15].

Условие $M(w,\psi)$. *Если пара $(\bar{x},\bar{u})$ оптимальна в задаче (P), то для любого L-совместимого с $\bar{x}$ позиционного управления $w(t,x)$ существует решение ψ дифференциального включения* (2.2) *такое, что почти всюду на T выполняется условие минимума* (2.1) *с заменой $\bar{\psi}$ на ψ.*

Это условие определяет экстремали Кашкоч — Лоясиевича.

Отметим, что существование измеримо-липшицевого управления, совместимого с любой траекторией овыпукленной системы (1.1), (1.2), гарантируется весьма эффектной теоремой о селекторе Лоясиевича (ее простое доказательство имеется в [12], а явная конструкция — в [19, теорема 9.5.2]). Поэтому требование определения 1 не обременительно, и во многих примерах совместимые управления (даже гладкие) находятся без труда. Из условия $M(w,\psi)$ следует экстремальность в смысле Понтрягина и Кларка, ибо для них достаточно взять единственное $w = \bar{u}(t)$.

Обратимся теперь к позиционному принципу минимума. Для простоты ограничимся далее случаем *задачи* (P_0), в которой функция $l \in C^1$. Как отмечалось во введении, этот принцип связан с мажорантами вида (1.8), причем в общем случае используется множество котраекторий, так что необходимо заменить $\bar{\psi}$ на ψ.

Введем ряд обозначений. Через $\mathcal{W}(\bar{x})$ обозначим множество управлений, L-совместимых с $\bar{x}$, а через $\Psi_w(\bar{x})$ — множество всех решений включения (2.2). Для $\psi \in \Psi_w(\bar{x})$ положим

$$p^{\psi}(t,x) = \psi(t) + l_x(x) - l_x(\bar{x}(t)),$$

$$U_{\psi}(t,x) = \operatorname*{Argmin}_{u\in U} p^{\psi}(t,x)\cdot f(t,x,u).$$

Вектор-функцию p^{ψ} назовем *возмущением котраектории* ψ, а полунепрерывное сверху, компактозначное отображение $U_{\psi}(t,x)$ — ψ-экстремальным. Пусть $\mathcal{V}_{\psi}$ — множество селекторов $v(t,x)$ этого отображения, трактуемых как позиционные управления сравнения с $\bar{u}$. Рассмотрим следующую (w,ψ)-*присоединенную задачу* (ср. с (1.7)):

$$l(x(t_1)) \to \min, \quad x(\cdot) \in \bigcup_{v\in\mathcal{V}_{\psi}} \mathcal{X}(v), \tag{2.3}$$

где $\mathcal{X}(v)$ — пучок движений управления v, дополненный решениями Каратеодори в случае борелевости v. Это расширение используется на протяжении всей статьи.

Теорема 1. *Если пара $(\bar{x},\bar{u})$ оптимальна в задаче (P_0), то для любого $w \in \mathcal{W}(\bar{x})$ существует $\psi \in \Psi_w(\bar{x})$ такая, что $\bar{x}$ является минималью в задаче* (2.3).

Доказательство. Используя котраекторию ψ из формулировки теоремы, построим мажоранту φ по формуле (1.8) с заменой в ней $\bar{\psi}$ на ψ и соответствующее отображение $U_{\varphi}(t,x)$ вида (1.6) с множеством его селекторов $\mathcal{V}_{\varphi}$. Нетрудно убедиться, что U_{φ}, $\mathcal{V}_{\varphi}$ совпадают с определенными выше множествами U_{ψ}, $\mathcal{V}_{\psi}$ соответственно. Следовательно, φ-присоединенная задача (1.6) совпадает с (w,ψ)-присоединенной задачей (2.3). Поскольку пара $(\bar{x},\bar{u})$ оптимальна, то при w, ψ, удовлетворяющих условиям теоремы, выполняется необходимое условие оптимальности $M(w,\psi)$ и, в частности, условие минимума функции H (2.1).

Из него следует включение $\bar{u}(t) \in U_\psi(t, \bar{x}(t))$ почти всюду на T. Оно позволяет построить селектор $\bar{v}(t,x) \in \mathcal{V}_\psi$, генерирующий траекторию $\bar{x}$. (Конструкция $\bar{v}$ аналогична используемой ниже в доказательстве теоремы 2 и здесь опускается). Поскольку она оказывается допустимой в (w,ψ)-присоединенной задаче, то и необходимо оптимальна в ней. □

Теорема 1 представляет собой вариационное усиление принципа минимума Кашкоч — Лоясиевича, эффективное как для гладких, так и негладких задач. Вместе с тем теорема выделяет опорные мажоранты вида (1.8).

Теперь можно дать следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. Экстремалью позиционного принципа минимума в задаче (P_0) назовем пару $(\bar{x}, \bar{u}) \in \Sigma$, для которой существуют $w \in \mathcal{W}(\bar{x})$ и $\psi \in \Psi_w(\bar{x})$ такие, что $\bar{x}$ является минималью (w,ψ)-присоединенной задачи. Тройку $\gamma = (\bar{x}, \bar{u}, \psi)$ с указанными свойствами назовем биэкстремалью позиционного принципа минимума.

Абревиатурой F-ПМ условимся обозначать позиционный принцип минимума.

Проиллюстрируем повышенную эффективность F-ПМ в сравнении с известными принципами.

П р и м е р 1. $\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_1 u_2 x_1, \quad x(0) = (0,0),$
$|u_i| \le 1, \quad i = 1,2, \quad J = -x_2(1) \to \inf.$

Траектория $\bar{x} \equiv 0$ генерируется множеством совместимых программных управлений $\bar{w}(t) = (0, \bar{u}_2(t))$, где $\bar{u}_2$ — произвольное допустимое управление. Для всех пар $(\bar{x}, \bar{w})$ котраектория $\bar{\psi} \equiv (0,1)$ единственна и дополняет эти пары до биэкстремали в смысле Понтрягина и Кашкоч — Лоясиевича. Иначе говоря, соответствующие принципы минимума выполняются и не бракуют процессы $(\bar{x}, \bar{w})$.

Но F-ПМ с квазилинейной мажорантой вида (1.8) дает отображение

$$U_\varphi(x) = U_{\bar{\psi}}(x) = \begin{cases} \{u_1 u_2 = 1\}, & x_1 > 0, \\ \{u_1 u_2 = -1\}, & x_1 < 0, \\ U, & x_1 = 0. \end{cases}$$

Пробуя $u_1 = 1$ в правой окрестности $t = 0$, чтобы выйти из начальной точки многозначности $x_0 = (0,0)$, получим в итоге пару (x^*, u^*) с $u^* \equiv (1,1)$, $x^*(t) = (t, t^2/2)$, для которой $J(x^*, u^*) = -1/2 < J(\bar{x}, \bar{w}) = 0$. Следовательно, F-ПМ бракует все экстремали $(\bar{x}, \bar{w})$; при этом, как легко проверить, одна итерация позиционного спуска приводит к оптимальному процессу.

В работе [10] траектория $\bar{x}$ данного примера исследовалась на граничность во множестве достижимости системы, причем нарушение этого свойства идентифицировалось условием экстремальности овыпукленной системы. Не располагая пока критерием граничности в форме F-ПМ, мы установили неэкстремальность $\bar{x}$ в смысле F-ПМ без обращения к операции овыпукления. □

Рассмотрим теперь вопрос об условиях опорности нелинейной, почти гладкой (липшицевой, гладкой по x) мажоранты $\varphi(t,x)$.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $(\bar{x}, \bar{u})$ — оптимальный процесс в задаче (P_0), являющийся экстремалью Кашкоч — Лоясиевича, т. е. существуют $\bar{w} \in \mathcal{W}(\bar{x})$, $\bar{\psi} \in \Psi_w(\bar{x})$ такие, что выполняется условие минимума (2.1). Решение $\varphi(t,x)$ неравенства Гамильтона — Якоби (1.3) назовем *совместимым* с $\bar{x}$, если справедливо равенство

$$\varphi_x(t, \bar{x}(t)) = \bar{\psi}(t) \quad \forall t \in T. \tag{2.4}$$

Теорема 2. *Пусть пара $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ оптимальна в задаче (P_0). Если $\varphi(t,x)$ совместима с $\bar{x}$, то она является опорной мажорантой пары $\bar{\sigma}$ (или траектории $\bar{x}$) и, следовательно, $\bar{x}$ — минималь в φ-присоединенной задаче.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку φ — решение неравенства (1.3), то траектория $\bar{x}$ необходимо удовлетворяет оценкам (1.4), (1.4)$'$, в которых $v(t,x)$ — селекторы φ-экстремального отображения (1.6). Поэтому достаточно доказать допустимость $\bar{x}$ в присоединенной задаче (1.7).

По условиям теоремы существуют $\bar{w}$, $\bar{\psi}$, удовлетворяющие определению 3, и в частности условию минимума (2.1). Из него следует, что вдоль кривой $(t,\bar{x}(t))$, $t \in T$, т.е. на графике $\bar{x}(\cdot)$, выполняется включение $\bar{u}(t) \in U_\varphi(t,\bar{x}(t))$. Можно считать $u(\cdot)$ борелевской функцией, изменив при необходимости ее значения на множестве нулевой линейной меры Лебега. В силу полунепрерывности сверху и компактозначности отображения $U_\varphi(t,x)$ оно имеет борелевский селектор $v_0(t,x)$. Положим теперь

$$\bar{v}(t,x) = \begin{cases} \bar{u}(t), & (t,x) \in \operatorname{gr}\bar{x}(\cdot), \\ v_0(t,x) & \text{вне } \operatorname{gr}\bar{x}(\cdot). \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\bar{v}$ — борелевский селектор $U_\varphi(t,x)$, генерирующий траекторию $\bar{x}$. $\square$

Еще раз отметим, что теоремы 1, 2 относятся как к гладким, так и негладким задачам без терминальных ограничений. Они могут быть обобщены на расширенную, овыпукленную задачу $(\operatorname{co} P)$ при невыпуклом множестве $f(t,x,U)$.

Остановимся на практической схеме применения теорем 1, 2.

Сначала из каких-либо соображений выбирается мажоранта φ. Напомним, что любую гладкую функцию $\varphi(t,x)$ нетрудно преобразовать в слабо убывающую путем так называемой нормировки (см. [6] и лемму 1.2.1 из [16]) — перехода к функции

$$\hat{\varphi}(t,x) = \varphi(t,x) - m(t)$$

при подходящем выборе $m(\cdot) \in L_\infty$ с сохранением отображения U_φ. Зачастую срабатывает выбор $\varphi = l$.

Далее, если нас интересует пара $(\bar{x},\bar{u})$, то сначала следует убедиться, что она удовлетворяет условию $M(w,\psi)$. Если нет, то она не оптимальна; в противном случае находятся $\bar{w},\bar{\psi}$, с которыми проверяется условие совместимости (2.4). При его выполнении пара $(\bar{x},\bar{u})$ удовлетворяет общему F-ПМ и ее исследование должно быть продолжено другими методами.

Зачастую нет никакого априори известного процесса $\bar{\sigma}$ и после выбора мажоранты реализуется итерационный метод позиционного спуска или анализ задачи с помощью отображения U_φ. Они позволяют получить некоторую “пробную” пару $\sigma^* = (x^*,u^*) \in \Sigma$ (а возможно, скользящий режим s^*), после чего вычисляется $\psi^*(t) = \varphi_x(t,x^*(t))$ и тройка $\gamma^* = (x^*,u^*,\psi^*)$ тестируется на биэкстремальность в смысле Кашкоч — Лоясиевича. Если γ^* выдерживает этот тест, то она — биэкстремаль общего F-ПМ (он выполнен); в противном случае σ^* не оптимальна.

П р и м е р 2. $\dot{x} = u, \quad \dot{y} = u^2, \quad \dot{z} = \dfrac{1}{2}x^2, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad |u| \le 1,$

$$J(\sigma) = z(1) - \frac{1}{2}y^2(1) \to \inf.$$

Данный пример (предложенный М.В. Старицыным) оказался довольно показательным. Во-первых, функция f слабо зависит от фаз, а опыт показывает, что F-ПМ недостаточно эффективен в задачах с раздельной зависимостью фаз от управлений. И в этом примере позиционное улучшение особого экстремального управления $\bar{u} \equiv 0$ возможно, но многозначность отображения U_ψ преодолевается неформальными соображениями. Во-вторых, оптимальным здесь оказывается скользящий режим, и проще всего получить его, используя нелинейную мажоранту. И еще: для нулевой траектории единственным совместимым управлением оказывается $w = \bar{u}(t)$, так что принцип минимума Кашкоч — Лоясиевича совпадает с F-ПМ.

Возьмем мажоранту

$$\varphi(x,y,z) = z - \frac{1}{2}y^2 + x^2.$$

Для нее отображение U_φ находится из условия

$$u(x - yu) \to \min, \quad |u| \le 1,$$

и с учетом неравенства $y(t) \ge 0\ \forall u(\cdot)$ оказывается следующим:

$$U_\varphi(x, y, z) = \begin{cases} -1, & x > 0,\ y > 0, \\ +1, & x < 0,\ y > 0, \\ \{-1, +1\}, & x = 0,\ y > 0, \\ -\operatorname{sign} x, & y = 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что оно генерирует ломаные Эйлера, которые сходятся к траектории скользящего режима $x^*(t) \equiv 0,\ y^*(t) = t,\ z^*(t) \equiv 0$ с обобщенным управлением $\mathcal{V}_t = \frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. На этом режиме s^* $J(s^*) = -\frac{1}{2} < 0 = J(\bar\sigma)$, так что процесс $\bar\sigma$ (с $\bar u \equiv 0$) не оптимален. Более того, легко убедиться, что s^* — оптимальный процесс овыпукленной задачи. □

3. Общий позиционный принцип минимума

Рассмотрим вопрос об опорности негладких, непрерывных решений проксимального неравенства Гамильтона — Якоби: для всех $(t, x) \in (t_0, t_1],\ \ (\theta, \eta) \in \partial_P\varphi(t, x)$

$$\theta + h(t, x, \eta) \le 0, \quad \varphi(t_1, x) = l(x). \tag{3.1}$$

Здесь $\partial_P\varphi(t, x)$ — множество проксимальных субградиентов функции φ в точке (t, x) [2], $h(t, x, \psi) = \min\{\psi \cdot f(t, x, u)|\ u \in U\}$ — нижний гамильтониан и l — гладкая функция. Следовательно, мы ограничиваемся задачей (P_0), причем для ясности граничное условие в (3.1) берем в форме равенства (вместо неравенства $\ge$).

Известно [1–5], что решения неравенства (3.1) обладают свойством слабого убывания (u-стабильности) и, следовательно, являются мажорантами. Теоретически ясно, что на их основе могут строиться методы позиционного улучшения управления, своеобразным венцом которых представляется искомый общий позиционный принцип минимума (кратко GF-ПМ).

Из предшествующих результатов ясно, что для его вывода необходимо выбрать некоторое условие экстремальности и конструкцию отображения U_φ, заменяющего (1.6). Были приведены веские основания в пользу экстремальности в смысле Кашкоч — Лоясиевича, но его придется несколько модифицировать. С конструкцией отображения U_φ тоже все не однозначно.

Известны доказательства [2, теорема 4.8.1; 3, лемма 26.1], основанные на методе экстремального прицеливания, в которых по мажоранте φ конструируется позиционное управление, *точно* генерирующее кривую Эйлера, вдоль которой φ не возрастает. Однако эти конструкции существенно отличаются от почти классической схемы динамического программирования, которой мы придерживаемся. Поэтому остановимся на конструкциях позиционного управления из работ [4; 5], приближенно реализующих искомую кривую Эйлера.

Следуя работе [5], обозначим через $Q \subset T \times \mathbb{R}^n$ компактное множество, содержащее графики всех траекторий системы (1.1), (1.2). Положим

$$Q_1 = \{(t, x)|\ \|(t - \tau, x - y)\| \le 1 \text{ для некоторого } (\tau, y) \in Q,\ t \le t_1\}.$$

Для фиксированного решения φ неравенства (3.1) введем его аппроксимацию Моро–Иосиды

$$\varphi_\alpha(t, x) = \min_{(\tau, y) \in Q_1} \Big(\varphi(\tau, y) + \frac{1}{2\alpha^2}\|(t - \tau, x - y)\|^2\Big). \tag{3.2}$$

Ее свойства: $\varphi_\alpha \nearrow \varphi$ при $\alpha \to 0+$ локально равномерно на Q_1, существование и единственность точки минимума при достаточно малых α, полувогнутость — доказаны в [20, лемме 4.11] и в [2, теорема 5.1]. Пусть $(\tau_\alpha, y_\alpha) \in Q_1$ — точка минимума в (3.2) и

$$\theta_\alpha = \frac{t - \tau_\alpha}{\alpha^2}, \quad \eta_\alpha = \frac{x - y_\alpha}{\alpha^2}. \tag{3.3}$$

Все эти векторы зависят от (t, x). В лемме 3.1 из [5] доказано, что если для данной точки (t, x) $(\tau_\alpha, y_\tau) \in \operatorname{int} Q_1$, то

$$(\theta_\alpha, \eta_\alpha) \in \partial_P \varphi(\tau_\alpha, y_\alpha). \tag{3.4}$$

Значит, уменьшая α, можно добиться произвольной близости (τ_α, y_α) к (t, x). При этом в силу (3.4) векторы из (3.3) можно интерпретировать как приближение к элементу $(\theta, \eta) \in \partial_P \varphi(t, x)$.

Определим многозначное отображение

$$U_h(t, x, \psi) = \{u \in U |\ \langle \psi, f(t, x, u) \rangle\} = h(t, x, \psi) = \operatorname*{Argmin}_{u \in U} \langle \psi, f(t, x, u) \rangle \tag{3.5}$$

и множество его селекторов $\mathcal{V}_h = \{u(t, x, \psi)\}$. Следуя [4], функции u назовем *предстратегиями*, а множество (3.5) — множеством предстратегий. (Несмотря на некоторое сходство с обозначениями, ранее использованными, вновь введенные имеют несколько другой смысл.) Тогда позиционные управления (стратегии), которые порождаются мажорантой φ, определим суперпозицией

$$v_\alpha(t, x) = u(t, x, \eta_\alpha(t, x)), \tag{3.6}$$

а их множество обозначим через $\mathcal{V}_{\psi\varphi}$.

Лемма 1. *Если пара $(\bar{x}, \bar{u})$ оптимальна в задаче (P_0), то при достаточно малых $\alpha > 0$ имеет место оценка*

$$l(\bar{x}(t_1)) \le l(x(t_1)) \quad \forall x(\cdot) \in \bigcup_{v_\alpha \in \mathcal{V}_{\psi\varphi}} \mathcal{X}(v_\alpha), \tag{3.7}$$

где $\mathcal{X}(v_\alpha)$ — пучок конструктивных движений, соответствующих v_α.

Это утверждение — аналог необходимого условия (N_+). Его нет в работах [4; 5], ибо в них акцент делался на оценке гарантированного результата для любой стратегии вида (3.6), нас же мажоранты интересуют как генераторы спуска по функционалу, позволяющие (потенциально) браковать фиксированный процесс $\bar{\sigma} \in \Sigma$.

С этой точки зрения утверждение леммы 1 почти очевидно: φ генерирует решения овыпукленной системы, а среди них не должно быть нарушающих оптимальность $\bar{x}$.

Конструкции (3.2)–(3.6) позволяют обратиться к основному вопросу: при каких условиях на φ траектория $\bar{x}$ является минималью в $(\alpha\,\psi\,\varphi)$-присоединенной задаче, связанной с неравенством (3.7) по образцу введения?

Перейдем к модификации условия экстремальности Кашкоч — Лоясиевича (см. определение 1). Во-первых, обратим внимание, что совместимых с $\bar{x}$ позиционных управлений w может быть достаточно много; следовательно, столько же существует коэкстремалей. Во-вторых, определение не содержит никаких явных аналитических требований к $w \in \mathcal{W}(\bar{x})$, все они накладываются на суперпозицию $\hat{f}$. Важность этого обстоятельства подробно обсуждалась в [15].

Это позволяет ввести следующее усиленное определение.

О п р е д е л е н и е 4. Совместимое с $\bar{x}$ позиционное управление $w(t, x)$ назовем *h-совместимым*, если оно вместе с некоторым решением $\psi \in \Psi_w(\bar{x})$ сопряженного включения (2.2) удовлетворяет равенству

$$w(t, x) = u(t, x, \psi(t)) \ \text{ на } \ T \times \mathbb{R}^n,$$

где $u(t, x, \psi)$ — селектор отображения (3.5).

Заметим, что в этом случае условие минимума (2.1) выполняется автоматически (при $\bar{\psi} = \psi$). Определение 4 хорошо корреспондируется с гамильтоновым включением Кларка [16]

$$(-\dot{\psi}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \in \partial h(t, \bar{x}(t), \psi(t)), \quad \psi(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1))$$

в необходимых условиях оптимальности для негладких задач.

Множество всех h-совместимых с $\bar{x}$ управлений обозначим через $\mathcal{W}_h(\bar{x})$.

Введем обозначения: для вектора $(\theta_\alpha, \eta_\alpha)$ из (3.3) положим

$$\bar{\theta}_\alpha(t) = \theta_\alpha(t, \bar{x}(t)), \quad \bar{\eta}_\alpha(t) = \eta_\alpha(t, \bar{x}(t))$$

и аналогично определим $\bar{\tau}_\alpha(t)$, $\bar{y}_\alpha(t)$. Тогда в силу (3.4)

$$(\bar{\theta}_\alpha(t), \bar{\eta}_\alpha(t)) \in \partial_P \varphi(\bar{\tau}_\alpha(t), \bar{y}_\alpha(t)) \tag{3.8}$$

при достаточно малых $\alpha > 0$.

О п р е д е л е н и е 5. Мажоранту φ назовем *совместимой с траекторией* $\bar{x}$ при достаточно малом $\alpha > 0$, если найдутся такие $\bar{w} \in \mathcal{W}_h(\bar{x})$ и $\bar{\psi} \in \Psi_{\bar{w}}(\bar{x})$, что $\bar{\eta}_\alpha(t) = \bar{\psi}(t)$ $\forall t \in T$ при выполнении (3.8).

Используя схему доказательства теоремы 2, из введенных определений нетрудно получить существование стратегии $\bar{v}_\alpha(t, x)$, генерирующую траекторию $\bar{x}$, т. е. ее допустимость в $(\alpha\,\psi\,\varphi)$-присоединенной задаче. Вместе с неравенством (3.7) это означает оптимальность $\bar{x}$ в этой задаче и опорное свойство мажоранты φ.

Теперь можно сформулировать GF-ПМ — общий позиционный принцип минимума.

Теорема 3. *Если пара* $(\bar{x}, \bar{u})$ *оптимальна в задаче* (P_0), *а мажоранта* φ *совместима с* $\bar{x}$ *(вместе с* $\alpha, \bar{w}, \bar{\psi}$, *указанными в определении 5), то* $\bar{x}$ *— минималь в следующей присоединенной задаче*

$$l(x(t_1)) \to \min, \quad x(\cdot) \in \bigcup_{v_\alpha \in \mathcal{V}_{\psi\,\varphi}} \mathcal{X}(v_\alpha).$$

Тем самым основная цель статьи достигнута, хотя и при несколько усиленных предположениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.** Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey // J. Dyn. Control Syst. 1995. Vol. 1, no. 1. P. 1–48. doi: 10.1007/BF02254655 .
2. **Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.** Nonsmooth analysis and control theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1998. 276 p.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
4. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исследований, 2003. 336 с.
5. **Clarke F., Ledyaev Yu.S., Subbotin A.I.** Universal positional control and proximal aiming in control problems under perturbations and in differential games // Proc. Steklov Inst. Math. 1999. Vol. 224, no. 1. P. 149–168.
6. **Дыхта В.А.** Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона — Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 31–49.
7. **Дыхта В.А.** Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2014. № 11. С. 19–37.
8. **Дыхта В.А.** Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 6. С. 653–656.

9. **Dykhta V.A.** Approximate feedback minimum principle for suboptimal processes in non-smooth optimal control problems // Proc. Int. Conf. "Stability, Control and Differential Games" (SCDG2019). Cham: Springer, 2020. P. 127–132. doi: 10.1007/978-3-030-42831-0_12 .
10. **Kaśkosz B., Lojasiewicz S.** A maximum principle for generalized control // Nonlinear Analysis: Theory, Methods Appl. 1985. Vol. 9, no. 2. P. 109–130. doi: 10.1016/0362-546X(85)90067-7 .
11. **Kaśkosz B.** Extremality, controllability, and abundant subsets of generalized control systems // J. Optim. Theory Appl. 1999. Vol. 101, no. 1. P. 73–108. doi: 10.1023/A:1021719027140 .
12. **Frankowska H., Kaśkosz B.** Linearization and boundary trajectories of nonsmooth control systems // Can. J. Math. 1988. Vol. XI, no. 3. P. 589–609. doi: 10.4153/CJM-1988-025-7 .
13. **Sussmann H.** A strong version of the Lojasiewicz maximum principle // Optimal Control of Differential Equations / ed. N.H. Pavel. N.Y.: M. Dekker Ink., 1994. P. 1–17 (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics).
14. **Loewen P.D., Vinter R.B.** Pontryagin-type necessary conditions for differential inclusion problems // Systems & Control Lett. 1997. Vol. 9, no. 9. P. 263–265. doi: 10.1016/0167-6911(87)90049-1 .
15. **Artstein Z.** Pontryagin maximum principle revisited with feedbacks // Eur. J. Control. 2011. Vol. 17, no. 1. P. 46–54.
16. **Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.** Неравенства Гамильтона — Якоби и вариационные условия оптимальности. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2015. 150 с.
17. **Дыхта В.А.** Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 73–86.
18. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
19. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
20. **Bardi M., Cappuzzo-Dolcetta I.** Optimal control and viscosity solutions of Hamilton — Jakobi — Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 1997. 570 p.

Поступила 14.06.2022
После доработки 30.06.2022
Принята к публикации 4.07.2022

Дыхта Владимир Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН
г. Иркутск
e-mail: dykhta@gmail.com

REFERENCES

1. Clarke P.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey. *J. Dyn. Control Syst.*, 1995, vol. 1, no. 1, pp. 1–48. doi: 10.1007/BF02254655 .
2. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski R.R. *Nonsmooth analysis and control theory.* NY: Springer, 1998, 278 p. doi: 10.1007/b97650 .
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow: Nauka Publ., 1974, 458 p.
4. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective.* Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow, Izhevsk: Inst. Komp'yuter. Issled., 2003, 336 p.
5. Clarke F., Ledyaev Yu.S., Subbotin A.I. Universal feedback control via proximal aiming in problems of control under disturbance and differential games. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1999, vol. 224, pp. 149–168.
6. Dykhta V.A. Weakly monotone solutions of the Hamilton–Jacobi inequality and optimality conditions with positional controls. *Autom. Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 5, pp. 829–844. doi: 10.1134/S0005117914050038 .
7. Dykhta V.A. Nonstandard duality and nonlocal necessary optimality conditions in nonconvex optimal control problems. *Autom. Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 11, pp. 1906–1921. doi: 10.1134/S0005117914110022 .

8. Dykhta V.A. Variational necessary optimality conditions with feedback descent controls for optimal control problems. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 394–396. doi: 10.1134/S106456241503031X .
9. Dykhta V.A. Approximate feedback minimum principle for suboptimal processes in non-smooth optimal control problems. In: *Proc. Int. Conf. "Stability, Control and Differential Games"* (*SCDG2019, September 16–20, 2019*). Cham: Springer, 2020, pp. 127–132. doi: 10.1007/978-3-030-42831-0_12 .
10. Kaśkosz B., Lojasiewicz S. A maximum principle for generalized control systems. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*, 1985, vol. 9, no. 2, pp. 109–130. doi: 10.1016/0362-546X(85)90067-7 .
11. Kaśkosz B. Extremality, controllability, and abundant subsets of generalized control systems. *J. Optim. Theory Appl.*, 1999, vol. 101, no. 1, pp. 73–108. doi: 10.1023/A:1021719027140 .
12. Frankowska H., Kaśkosz B. Linearization and boundary trajectories of nonsmooth control systems. *Can. J. Math.*, 1988, vol. 40, no. 3, pp. 589–609. doi: 10.4153/CJM-1988-025-7 .
13. Sussmann H. A strong version of the Lojasiewicz maximum principle. In: *Optimal Control of Differential Equations*, ed. N.H. Pavel, Ser. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, N.Y.: M. Dekker, 1994, pp. 1–17. ISBN: 9781003072225 ,
14. Loewen P.D., Vinter R. Pontryagin-type necessary conditions for differential inclusion problems. *Systems & Control Letters*, 1987, vol. 9, no. 3, pp. 263–265. doi: 10.1016/0167-6911(87)90049-1 .
15. Artstein Z. Pontryagin maximum principle revisited with feedbacks. *Eur. J. Control*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 46–54. doi: 10.3166/ejc.17.46-54 .
16. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Neravenstva Gamil'tona–Yakobi i variatsionnye usloviya optimal'nosti* [Hamilton–Jacobi inequalities and variational optimality conditions]. Irkutsk: Irkutskii Gos. Universitet Publ., 2015, 150 p. ISBN: 978-5-9624-1298-6 .
17. Dykhta V.A. Positional strengthenings of the maximum principle and sufficient optimality conditions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 43–57. doi: 10.1134/S0081543816050059 .
18. Clarke H. *Optimization and nonsmooth analysis.* Philadelphia: SIAM, 1987, 320 p. ISBN: 0898712564 . Translated to Russian under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka Publ., 1988, 280 p.
19. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-valued analysis.* Boston: Birkhäuser, 1990, 461 p. ISBN: 0817634789 .
20. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations.* Boston: Birkhäuser, Springer, 1997, 574 p. doi: 10.1007/978-0-8176-4755-1 .

Received June 14, 2022
Revised June 30, 2022
Accepted July 4, 2022

Vladimir Aleksandrovich Dykhta, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: dykhta@gmail.com .

Cite this article as: V. A. Dykhta. On the set of necessary optimality conditions with positional controls generated by weakly decreasing solutions of the Hamilton–Jacobi inequality. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 83–93.