

УДК 517.977.5

МНОГОКРАТНО ЗАМЫКАЕМАЯ СТРАТЕГИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ¹

Н. М. Дмитрук

Рассматривается задача оптимального управления линейной дискретной системой с возмущениями, которую требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимум гарантированного значения терминального критерия качества. Определяется стратегия управления (многократно замыкаемая стратегия), учитывающая информацию о том, что в нескольких будущих моментах времени текущее состояние системы будет точно измерено, а управляющее воздействие скорректировано. Предлагается эффективный метод вычисления субоптимальной многократно замыкаемой стратегии, который предполагает решение только задач линейного программирования. Результаты численных экспериментов демонстрируют улучшение качества управления при увеличении числа моментов замыкания, а также трудоемкость вычисления стратегии, сравнимую с трудоемкостью построения оптимальной гарантирующей программы.

Ключевые слова: линейная система, возмущения, гарантированное оптимальное управление, стратегия управления, алгоритм.

N. M. Dmitruk. Multiply closed control strategy in a linear terminal problem of optimal guaranteed control.

This paper deals with an optimal control problem for a linear discrete system with disturbances. It is required to steer the system robustly to a given terminal set in a finite time while minimizing the guaranteed value of a terminal cost function. A multiply closed control strategy is introduced; it takes into account the assumption that, at several future times, the state of the system will be measured exactly and the control input will be corrected. An efficient numerical method for constructing a suboptimal multiply closed strategy is proposed. The results of numerical experiments show an improvement in the performance under the optimal control strategy when the number of closing instants increases as well as in comparison to the optimal open-loop worst-case control while maintaining comparable computation times.

Keywords: linear system, disturbances, robust optimal control, control strategy, algorithm.

MSC: 93C05, 93B52, 49N05, 49L20

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-66-82

Введение

Задачи оптимального управления динамическими системами в условиях неопределенности рассматриваются в литературе с конца 60-х [1–3]. Простейший подход, обеспечивающий выполнение ограничений и доставляющий гарантированное значение критерию качества при наихудшей реализации неопределенности, состоит в построении оптимального гарантирующего программного управления (программы). Оптимальная гарантирующая программа планируется до начала процесса управления и по его ходу не корректируется; при ее формировании не используется информация о возможности поступления измерений состояний системы в будущем. Известно, что оптимальная гарантирующая программа недооценивает потенциальные возможности процесса управления, т.е. дает консервативную оценку гарантированному значению критерия качества (см., например, [4–6]), и зачастую ее не удается построить из-за невозможности гарантировать выполнение ограничений. С другой стороны, динамическое

¹Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований “Конвергенция-2025” (НИР 1.2.04.1).

программирование учитывает все возможные реализации будущих состояний, но построение стратегии динамического программирования затруднительно, за исключением отдельных задач, систем небольшой размерности или коротких промежутков управления.

Ввиду вышесказанного актуальны такие стратегии управления, которые учитывают некоторую информацию о будущих состояниях системы и в то же время характеризуются трудоемкостью их построения, сравнимой с трудоемкостью вычисления оптимальной гарантирующей программы. В публикациях [7–13] предложен один из возможных подходов. Во всех работах предполагается, что до начала процесса управления выбраны один или несколько моментов времени (в терминах статей [9; 13] — моментов замыкания системы управления, [10–12] — моментов коррекции управления), в которые станет известно точное измерение состояния системы и управление будет скорректировано в соответствии с полученным измерением. В [7–9] рассмотрены линейные терминальные задачи, в [10–12] — линейно-квадратичные задачи оптимального управления, для которых строятся стратегии с одним моментом коррекции [10], а также со многими моментами [11; 12]. В [13] исследована задача минимизации полного импульса управляющего воздействия на траекториях линейной системы с терминальными ограничениями и впервые получены результаты, позволяющие исходную фактически двухуровневую оптимизационную задачу свести к задаче линейного программирования.

В предлагаемой статье изучается аналог терминальной задачи из [7–9] для дискретной системы управления. В [9] для построения оптимальной стратегии управления с моментами замыкания используется достаточно трудоемкий итеративный алгоритм, требующий последовательной оптимизации сначала по управлению, а затем по параметру, оценивающему оптимальное значение критерия качества. Публикации [7; 8] представляют общую методологию, реализация которой на практике затруднительна, за исключением специально подобранных примеров. В отличие от перечисленных работ мы используем идеи [13] для сведения рассматриваемой задачи к одной задаче линейного программирования, которая позволяет одновременно вычислять оптимальное управление и оптимальный параметр. В [14] был исследован случай однократного замыкания для рассматриваемой задачи; в настоящей работе предлагается его развитие на случай многократно замыкаемых стратегий. Эффективность нового подхода демонстрируется примерами.

1. Постановка задачи. Оптимальная гарантирующая программа

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему управления с возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \quad (1.1)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы (1.1); $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление; $w(t) \in \mathbb{R}^p$ — возмущение в момент времени t ; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$; $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ — заданные матрицы; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданное начальное состояние системы (1.1).

Доступные значения управления и возможные реализации неизвестного возмущения ограничены:

$$\begin{aligned} u(t) &\in U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}\}, \\ w(t) &\in W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_{\infty} \leq w_{\max}\}, \\ t &= 0, 1, \dots, T-1, \end{aligned}$$

где $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}^r$, $w_{\max} > 0$, $\|z\|_{\infty} = \max_i |z_i|$.

Для траектории системы (1.1) под действием допустимого управления $u(\cdot) = (u(t) \in U, t = 0, 1, \dots, T-1)$ и некоторого возмущения $w(\cdot) = (w(t) \in W, t = 0, 1, \dots, T-1)$ будем использовать обозначение $x(t|x_0, u, w)$, $t = 0, 1, \dots, T-1$.

Пусть задано терминальное множество (возможно, неограниченное)

$$X_T = \{x \in \mathbb{R}^n : g_{\min} \leq Hx \leq g_{\max}\}, \quad \text{где } H \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad g_{\min}, g_{\max} \in \mathbb{R}^m.$$

Поставим задачу о переводе системы (1.1) на терминальное множество X_T с гарантией, т.е. при всех возможных реализациях возмущения:

$$x(T|x_0, u, w) \in X_T \quad \forall w(t) \in W, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (1.2)$$

при минимуме гарантированного значения линейного терминального критерия качества

$$\max_w c^\top x(T|x_0, u, w), \quad (1.3)$$

где $c \in \mathbb{R}^n$. Критерий (1.3), очевидно, оценивает терминальное состояние системы (1.1) при наихудшей реализации возмущения.

Простейший подход к решению поставленной задачи предполагает построение оптимальной гарантирующей программы — функции $u^0(\cdot) = (u^0(t), t = 0, 1, \dots, T-1)$, которая зависит только от времени t и доставляет минимум гарантированному значению критерия качества (1.3) при условии выполнения терминального ограничения (1.2).

Метод построения оптимальной гарантирующей программы хорошо освещен в литературе (см., например, [9]). Он использует линейность системы (1.1), ограничений (1.2) и критерия качества (1.3), чтобы свести исходную задачу к детерминированной задаче оптимального управления. Для полноты изложения приведем указанную детерминированную задачу, а также эквивалентную ей задачу линейного программирования. Аналогичные эквивалентные преобразования задач будут использоваться далее в работе (см. разд. 2).

Согласно [9] сначала вычисляются оценки наихудшей реализации возмущения по направлениям, задаваемым вектором c и строками h_i^\top матрицы H :

$$\gamma_0 = w_{\max} \sum_{t=0}^{T-1} \|c^\top A^t M\|_1, \quad \gamma_i = w_{\max} \sum_{t=0}^{T-1} \|h_i^\top A^t M\|_1, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\|z\|_1 = \sum_i |z_i|$. Вектор оценок $\gamma = (\gamma_i, i = 1, \dots, m)$ позволяет задать “суженное” терминальное множество

$$\bar{X}_T = \{x \in \mathbb{R}^n : g_{\min} + \gamma \leq Hx \leq g_{\max} - \gamma\}.$$

Если найдется такое управление $u(\cdot)$, что для номинальной системы (без возмущений), соответствующей (1.1),

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

справедливо $x_0(T) \in \bar{X}_T$, то для системы (1.1) гарантировано выполнение включения (1.2).

Тогда задача построения оптимальной гарантирующей программы $u^0(\cdot)$ эквивалентна детерминированной задаче

$$\begin{aligned} J(x_0) &= \min_u c^\top x_0(T) + \gamma_0, \\ x_0(t+1) &= Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \\ g_{\min} + \gamma &\leq Hx_0(T) \leq g_{\max} - \gamma. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Исключая в (1.4) терминальное состояние по формуле

$$x_0(T) = A^T x_0 + \sum_{t=0}^{T-1} A^{T-t-1} Bu(t),$$

получим, что оптимальная гарантирующая программа $u^0(\cdot)$ находится как решение следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min_u & \sum_{t=0}^{T-1} c^\top A^{T-t-1} Bu(t), \\ g_{\min} + \gamma - HA^T x_0 &\leq \sum_{t=0}^{T-1} HA^{T-t-1} Bu(t) \leq g_{\max} - \gamma - HA^T x_0, \\ u_{\min} &\leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t = 0, \dots, T-1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где константа $c^T A^T x_0 + \gamma_0$ в целевой функции опущена.

Оптимальная гарантирующая программа $u^0(\cdot)$ обладает рядом недостатков. Во-первых, параметры системы и возмущения могут оказаться такими, что суженное терминальное множество \bar{X}_T пусто (см. например, [9]), и тогда поставленная задача в классе гарантирующих программ не имеет решения. Во-вторых, если решение все же существует, оно недооценивает потенциальные возможности системы, консервативно оценивая значение критерия качества $c^T x(T)$, которое можно достичь в реальном процессе управления (см. например, [13; 14]). Наконец, оптимальная гарантирующая программа строится до начала процесса управления и не меняется по ходу его, т. е. она не предусматривает поступление информации о поведении системы (1.1) в будущем, например измерение ее состояний в процессе управления, которое предоставляло бы возможность скорректировать запланированное управление [9; 10]. В отличие от гарантирующих программ такую возможность учитывают стратегии управления.

В работе [14] для исследуемой задачи определена оптимальная стратегия управления, учитывающая, что в один будущий момент времени можно будет точно измерить текущее состояние системы и спланировать новое управление в зависимости от полученного измерения. Это означает, что в такой момент времени система будет замкнута, поэтому он назван моментом замыкания, а стратегия — стратегией с одним моментом замыкания. В следующем разделе эта идея развивается на случай N моментов замыкания. Результатом будет многократно замыкаемая стратегия управления.

2. Многократно замыкаемая стратегия управления

Пусть до начала процесса управления зафиксированы моменты $T_1 < T_2 < \dots < T_N$, $T_j \in \{1, 2, \dots, T-1\}$, $j = 1, 2, \dots, N$. Согласно работам [9; 14] будем называть их моментами замыкания системы (1.1).

Моменты замыкания разбивают интервал управления на $\Delta_j = \{T_j, T_j + 1, \dots, T_{j+1} - 1\}$, $j = 0, 1, \dots, N$, где считается, что $T_0 = 0$, $T_{N+1} = T$.

Пусть $u_j(\cdot) = (u_j(t) \in U, t \in \Delta_j)$ — управление, $w_j(\cdot) = (w_j(t) \in W, t \in \Delta_j)$ — возмущение на Δ_j , $\mathcal{U}_j = \{u_j(\cdot) : u_j(t) \in U, t \in \Delta_j\}$ — множество доступных управлений, $\mathcal{W}_j = \{w_j(\cdot) : w_j(t) \in W, t \in \Delta_j\}$ — множество возможных возмущений на Δ_j , $j = 0, 1, \dots, N$.

Пусть на Δ_j выбрано управление $u_j(\cdot) = u_j(\cdot|x_j) \in \mathcal{U}_j$, зависящее от некоторого состояния x_j . Обозначим: $x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)$ — состояние системы (1.1) в момент T_{j+1} при начальном состоянии $x(T_j) = x_j$, управлении $u_j(\cdot|x_j)$ и возмущении $w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j$;

$$X(T_{j+1}|x_j, u_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j), w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j\}$$

— множество состояний, в которых может оказаться система (1.1) в момент времени T_{j+1} .

В зависимости от конкретного возмущения $w_j^*(\cdot) \in \mathcal{W}_j$, которое реализуется в реальном процессе управления на промежутке Δ_j , система в момент T_{j+1} окажется в состоянии, которое будем обозначать через $x^*(T_{j+1})$. Очевидно, $x^*(T_j) \in X(T_j|x_{j-1}, u_{j-1})$, $j = 1, 2, \dots, N+1$.

Следуя [11; 14], сделаем предположение.

Предположение 1. В каждый момент T_j , $j = 1, 2, \dots, N$, можно

- 1) измерить текущее состояние $x^*(T_j)$ системы;
- 2) в зависимости от измеренного $x^*(T_j)$ на Δ_j выбрать новое управление $u_j(\cdot|x^*(T_j)) \in \mathcal{U}_j$.

Согласно предположению 1 процесс управления будет организован следующим образом. Выбирается управление $u_0(\cdot|x_0) \in \mathcal{U}_0$, которое используется в моменты времени $t \in \Delta_0$. В момент T_1 измеряется текущее состояние системы $x^*(T_1)$ и вычисляется управление $u_1(\cdot|x^*(T_1)) \in \mathcal{U}_1$, которое применяется на Δ_1 . Продолжая этот процесс, в момент времени T_j измеряется реализующееся состояние $x^*(T_j)$ и определяется управление $u_j(\cdot|x^*(T_j)) \in \mathcal{U}_j$ для Δ_j .

Поскольку состояния $x^*(T_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, заранее (в момент $t = 0$) не известны, решение задачи управления, поставленной в разд. 1, будем искать в виде *стратегии управления* $\pi_N(0, x_0)$ с N моментами замыкания T_1, \dots, T_N , которую определим рекуррентно:

◦ стратегия с одним моментом замыкания T_N на $\{\Delta_{N-1}, \Delta_N\}$

$$\pi_1(T_{N-1}, x_{N-1}) = \{u_{N-1}(\cdot|x_{N-1}); u_N(\cdot|x_N), x_N \in X(T_N|x_{N-1}, u_{N-1})\}; \quad (2.1)$$

◦ стратегия с $N - j$ моментами замыкания $T_{j+1}, T_{j+2}, \dots, T_N$ на $\{\Delta_j, \Delta_{j+1}, \dots, \Delta_N\}$

$$\begin{aligned} \pi_{N-j}(T_j, x_j) &= \{u_j(\cdot|x_j); \pi_{N-j-1}(T_{j+1}, x_{j+1}), x_{j+1} \in X(T_{j+1}|x_j, u_j)\}, \\ j &= N - 2, N - 3, \dots, 1; \end{aligned} \quad (2.2)$$

◦ стратегия с N моментами замыкания

$$\pi_N(0, x_0) = \{u_0(\cdot|x_0); \pi_{N-1}(T_1, x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0)\}. \quad (2.3)$$

Управление $u_0(\cdot|x_0)$ в (2.3) будем называть *начальной программой*.

Траекторию системы управления (1.1), соответствующую стратегии $\pi_N(0, x_0)$ и возмущению $w(\cdot) = (w_0(\cdot), w_1(\cdot), \dots, w_N(\cdot))$, определим, исходя из [11; 14], как последовательное решение систем

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu_0(t|x_0) + Mw_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \Delta_0, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t|x(T_j)) + Mw_j(t), \quad x(T_j) = x(T_j|x_{j-1}, u_{j-1}, w_{j-1}), \quad t \in \Delta_j, \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

2.1. Допустимая и оптимальная стратегии управления

Обсудим, каким условиям должна удовлетворять стратегия π_N , чтобы быть допустимой, т. е. гарантировать выполнение терминального ограничения для определенной выше траектории. Для этого применяем стандартные рассуждения динамического программирования, рассматривая процесс управления последовательно, начиная с последнего промежутка управления Δ_N и продолжая до Δ_0 . Пара (T_j, x_j) , состоящая из момента замыкания T_j и некоторого состояния $x_j \in \mathbb{R}^n$, называется *позицией процесса управления*. Рассматривая каждый промежуток Δ_j , будем также уточнять и множество состояний x_j , для которых необходимо определить решение.

На Δ_N процесс управления начинается в позиции (T_N, x_N) . Цель управления на Δ_N — попадание на терминальное множество, т. е. управление $u_N(\cdot|x_N) \in \mathcal{U}_N$ выбирается в момент времени T_N таким образом, чтобы

$$X(T|x_N, u_N) \subseteq X_T. \quad (2.4)$$

Введем множество

$$X_N = \{x_N \in \mathbb{R}^n : \exists u_N(\cdot|x_N) \in \mathcal{U}_N, X(T|x_N, u_N) \subseteq X_T\},$$

как множество всех состояний, для которых найдется управление, удовлетворяющее включению (2.4).

На Δ_{N-1} для позиции (T_{N-1}, x_{N-1}) управление $u_{N-1}(\cdot|x_{N-1}) \in \mathcal{U}_{N-1}$ должно быть таким, чтобы для любой точки множества $X(T_N|x_{N-1}, u_{N-1})$ можно было бы продолжить процесс управления, выбирая управление $u_N(\cdot|x_N)$, удовлетворяющее (2.4). Это выполнено для точек из X_N , следовательно, для Δ_{N-1} можно сформулировать условие допустимости как

$$X(T_N|x_{N-1}, u_{N-1}) \subseteq X_N.$$

Продолжая этот процесс, определим множества X_{N-1}, \dots, X_1 , и управления $u_{N-2}(\cdot|x_{N-2}) \in \mathcal{U}_{N-2}, \dots, u_1(\cdot|x_1) \in \mathcal{U}_1$ в допустимых стратегиях (2.1)–(2.3) согласно следующим правилам:

$$X_j = \{x_j \in \mathbb{R}^n : \exists u_j(\cdot|x_j) \in \mathcal{U}_j, X(T_{j+1}|x_j, u_j) \subseteq X_{j+1}\}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

т.е. множество X_j составим из всех точек x_j , для которых существует управление $u_j(t|x_j)$, $t \in \Delta_j$, переводящее систему (1.1) с гарантией на множество X_{j+1} . Далее эти множества будем называть *множествами замыкания* (см. [9]). Положим $X_{N+1} = X_T$, тогда (2.5) можно записать и для $j = N$.

Далее предполагаем, что параметры задачи позволяют найти управления $u_j(\cdot|x_j)$ по описанной выше процедуре, т.е. имеет место

Предположение 2. Все множества замыкания X_1, X_2, \dots, X_N не пусты.

Подытоживая проведенные построения, можно утверждать: стратегия управления $\pi_N(0, x_0)$ является *допустимой*, если ее начальная программа $u_0(\cdot|x_0) \in \mathcal{U}_0$ такова, что

$$X(T_1|x_0, u_0) \subseteq X_1. \quad (2.6)$$

Предположение 2 и включение (2.6) достаточны для существования решения рассматриваемой задачи в классе стратегий управления с N моментами замыкания. Конструктивный метод проверки предположения 2 и включения (2.6) будет предложен в подразд. 2.3.

Для определения оптимальной стратегии снова начнем рассмотрение со стратегии с одним моментом замыкания $\pi_1(T_{N-1}, x_{N-1})$ на $\{\Delta_{N-1}, \Delta_N\}$. Заметим, что произвольная допустимая стратегия $\pi_1(T_{N-1}, x_{N-1})$ не лучше допустимой стратегии управления

$$\{u_{N-1}(\cdot|x_{N-1}); u_N^0(\cdot|x_N), x_N \in X(T_N|x_{N-1}, u_{N-1})\},$$

в которой на Δ_N выбраны оптимальные гарантирующие программы $u_N^0(\cdot|x_N)$ для позиций (T_N, x_N) . Каждая программа $u_N^0(\cdot|x_N)$ при фиксированном x_N является решением задачи

$$V_N(x_N) = \min_{u_N} \max_{w_N} c^\top x(T|x_N, u_N, w_N), \quad X(T|x_N, u_N) \subseteq X_T. \quad (2.7)$$

Оптимальный выбор управления $u_{N-1}(\cdot|x_{N-1})$ на промежутке Δ_{N-1} как решения задачи

$$V_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \max_{w_{N-1}} V_N(x(T_N|x_{N-1}, u_{N-1}, w_{N-1}))$$

дает оптимальную стратегию с одним моментом замыкания (см. также [14]):

$$\pi_1^0(T_{N-1}, x_{N-1}) = \{u_{N-1}^0(\cdot|x_{N-1}); u_N^0(\cdot|x_N), x_N \in X(T_N|x_{N-1}, u_{N-1}^0)\}.$$

Продолжая этот процесс, установим, что *оптимальная стратегия* $\pi_N^0(0, x_0)$ с N моментами замыкания определяется на основе стратегий $\pi_{N-j}^0(T_j, x_j)$, для которых управления $u_j^0(\cdot|x_j)$ находятся из аналога уравнения Беллмана

$$V_j(x_j) = \min_{u_j} \max_{w_j} V_{j+1}(x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)), \quad j = N-1, \dots, 0, \quad (2.8)$$

где $V_N(x_N)$ определяется согласно (2.7).

Если для некоторого состояния x_j задача (2.7) или (2.8) не имеет решения, то полагаем $V_j(x_j) = +\infty$. Тогда множества замыкания можно определить как

$$X_j = \{x \in \mathbb{R}^n : V_j(x) < +\infty\}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Отметим, что качество оптимальной стратегии $\pi_N^0(0, x_0)$ вычисляется следующим образом:

$$V_0(x_0) = \min_{u_0} \max_{w_0} \dots \min_{u_N} \max_{w_N} c^\top x(T),$$

тогда как качество оптимальной гарантирующей программы $u^0(\cdot)$ находится из

$$J(x_0) = \min_{u_0} \dots \min_{u_N} \max_{w_0} \dots \max_{w_N} c^\top x(T).$$

Принимая во внимание неравенство минимакс, можно заключить, что $V_0(x_0) \leq J(x_0)$.

До начала процесса управления необходимо знать лишь оптимальную начальную программу $u_0^0(\cdot|x_0)$. Оптимальные управления $u_j^0(\cdot|x_j)$, $x_j \in X_j$, в (2.1), (2.2) заранее не строятся, а вычисляются в соответствующий момент замыкания T_j , когда будет измерено текущее состояние $x^*(T_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. Поэтому цель дальнейшего изложения — эффективное вычисление оптимальной начальной программы $u_0^0(\cdot|x_0)$.

2.2. Аппроксимация множеств замыкания

Наряду с X_j , $j = 1, 2, \dots, N$, введем множества

$$X_j(\alpha) = \{x \in X_j : V_j(x) \leq \alpha\}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.9)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ таково, что все $X_j(\alpha) \neq \emptyset$. Введенные множества будем также называть множествами замыкания.

Рассмотрим задачи (2.7), (2.8) и с учетом (2.9) запишем их в общем ($j = 0, 1, \dots, N$) эквивалентном виде (см. [15, с. 134])

$$\begin{aligned} V_j(x_j) &= \min_{u_j, \alpha} \alpha, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t) + Mw_j(t), \quad x(T_j) = x_j, \\ u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t = T_j, T_j + 1, \dots, T_{j+1} - 1, \\ x(T_{j+1}) &\in X_{j+1}(\alpha) \quad \forall w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где для задачи (2.7), $j = N$, считаем, что $X_{N+1}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_{\min} \leq Hx \leq g_{\max}, c^\top x \leq \alpha\}$.

Задача (2.10) при $j = 0$ определяет оптимальную начальную программу $u_0^0(\cdot|x_0)$, для чего нужно описать множество $X_1(\alpha)$ при достаточно широком интервале значений α , что в свою очередь, с учетом рекуррентного соотношения (2.5), требует описания $X_j(\alpha)$ при всех j .

Заметим, что все $X_j(\alpha)$ являются выпуклыми многогранниками. Этот факт рекуррентно устанавливается сведением каждой задачи (2.10) к задаче линейного программирования аналогично тому, как в разд. 1, была сведена к задаче (1.5) задача построения оптимальной гарантирующей программы. Тогда функция $V_j(x_j)$, $x_j \in X_j$, как функция оптимального значения задачи линейного программирования на минимум является кусочно-линейной выпуклой функцией параметра x_j (см. [16, с. 180]). Поэтому при любом фиксированном значении α ее множество Лебега $X_j(\alpha)$ — выпуклый многогранник (возможно, не ограниченный).

Точное описание многогранников $X_j(\alpha)$ при всех значениях параметра α представляется затруднительным. Имеет смысл ограничить область значений α интервалом $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, а также аппроксимировать $X_j(\alpha)$ внешними многогранниками $\bar{X}_j(\alpha)$ (см. [9; 14]), нормали к граням которых выбраны независимыми от α , но, возможно, зависящими от j . При этом, если существует оптимальная гарантирующая программа $u^0(\cdot)$, то в силу установленного в подразд. 2.1 неравенства $V_0(x_0) \leq J(x_0)$, следует выбрать $\alpha_{\max} = J(x_0)$. В противном случае, α_{\max} оценивается совместно с α_{\min} , например, по решению задач оптимального управления номинальной системы на терминальное множество:

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= \min_u c^\top x_0(T), \quad \alpha_{\max} = \max_u c^\top x_0(T), \\ x_0(t+1) &= Ax_0(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad x_0(T) \in X_T. \end{aligned}$$

Очевидно, $X_j(\alpha_{\min}) \subseteq X_j(\alpha_{\max}) \subseteq X_j$, при этом множества замыкания $X_j(\alpha_{\max})$ и X_j в общем случае могут не совпадать. Поэтому целесообразно уточнить предположение 2 и на практике использовать

Предположение 3. Все множества замыкания $X_j(\alpha_{\max})$, $j = 1, 2, \dots, N$, не пусты.

В случае существования оптимальной гарантирующей программы $u^0(\cdot)$ предположение 3 очевидно выполняется, поскольку для любого j можно указать точку, принадлежащую $X_j(\alpha_{\max})$, — это будет состояние в момент T_j номинальной системы под действием оптимальной программы, т. е. $x_0(T_j|x_0, u^0) \in X_j(\alpha_{\max})$. В противном случае, проверка предположения 3 проводится при построении аппроксимаций множеств $X_j(\alpha)$ (см. далее).

С целью аппроксимации множества замыкания $X_j(\alpha)$ выберем систему векторов $p_{ji} \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, m_j$, $\|p_{ji}\| = 1$, которые образуют систему нормалей $\bar{X}_j(\alpha)$. Обозначим

$$f_{ji}(\alpha) = \max_{x_j} p_{ji}^\top x_j, \quad x_j \in X_j(\alpha), \quad (2.11)$$

тогда аппроксимирующий многогранник имеет вид

$$\bar{X}_j(\alpha) = \left\{ x_j \in \mathbb{R}^n : p_{ji}^\top x_j \leq f_{ji}(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, m_j \right\}. \quad (2.12)$$

При достаточно большом наборе нормалей построенные аппроксимации $\bar{X}_j(\alpha)$ будут достаточно точно приближать множества $X_j(\alpha)$, а в отдельных примерах удастся точно найти $X_j(\alpha)$. Обсуждение того, насколько точной может быть предлагаемая аппроксимация, будет представлено в разд. 3 для конкретных примеров.

В силу аппроксимаций (2.12) множество замыкания в дальнейшем будет строиться *субоптимальная начальная программа* $\bar{u}_0^0(\cdot|x_0)$.

В работе [9] для построения субоптимальной начальной программы применяется итерационный алгоритм, на каждой итерации которого для текущего значения α_k уточняются аппроксимации $\bar{X}_j(\alpha_k)$ и вычисляется начальное управление $u_{\alpha_k}^0(t)$, $t \in \Delta_0$, гарантирующее перевод системы (1.1) на $\bar{X}_1(\alpha_k)$ в момент T_1 . Таким образом, на каждой итерации решается $\sum_{j=1}^N m_j(k)$ задач (2.11) и одна задача управления. Значение α_{k+1} находится каким-либо методом минимизации функции одной переменной. Такой алгоритм является очень трудоемким.

Далее предложим метод построения субоптимальной начальной программы, не требующий применения итерационной процедуры, в частности уточнения $\bar{X}_j(\alpha)$ посредством решения задач (2.11) при разных значениях параметра $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$.

Положим

$$P_{N+1} = \begin{pmatrix} -H \\ H \\ c^\top \end{pmatrix}, \quad g_{N+1} = \begin{pmatrix} -g_{\min} \\ g_{\max} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{N+1} = \begin{pmatrix} 0_m \\ 0_m \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $0_m \in \mathbb{R}^m$ — нулевой m -вектор. Тогда $X_{N+1}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : P_{N+1}x \leq g_{N+1} + \lambda_{N+1}\alpha\}$. Множество $X_{N+1}(\alpha)$, естественно, не аппроксимируется, т. е. $\bar{X}_{N+1}(\alpha) = X_{N+1}(\alpha)$. Покажем, что для $\bar{X}_j(\alpha)$ имеют место аналогичные представления:

$$\bar{X}_j(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : P_j x \leq g_j + \lambda_j \alpha\}, \quad \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}], \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.13)$$

при определенном выборе матрицы $P_j \in \mathbb{R}^{\bar{m}_j \times n}$, векторов g_j , $\lambda_j \in \mathbb{R}^{\bar{m}_j}$, который обсудим далее. Здесь величина $\bar{m}_j \geq m_j$ зависит от структуры функций $f_{ji}(\alpha)$, формула для ее вычисления также выводится далее.

Пусть представление (2.13) доказано для $N, N-1, \dots, j+1$. Рассмотрим задачу (2.11) для фиксированных j, i . Для $X_j(\alpha)$ с учетом (2.8) имеем представление

$$X_j(\alpha) = \{x_j \in X_j : \exists u_j(\cdot|x_j) \in \mathcal{U}_j, X(T_{j+1}|x_j, u_j) \subseteq X_{j+1}(\alpha)\}.$$

Заменяя в этом представлении $X(T_{j+1}|x_j, u_j)$ на его определение, как множества возможных состояний динамической системы (1.1) в момент T_{j+1} , а множество $X_{j+1}(\alpha)$ на его аппроксимацию в виде (2.13), получим следующий вид для задачи (2.11):

$$\begin{aligned} f_{ji}(\alpha) &= \max_{x_j, u_j} p_{ji}^\top x_j, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t) + Mw_j(t), \quad x(T_j) = x_j, \quad u_j(t) \in U, \quad t \in \Delta_j, \\ P_{j+1}x(T_{j+1}) &\leq g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha \quad \forall w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j. \end{aligned}$$

Эту задачу сначала сводим к детерминированной задаче управления на промежутке Δ_j номинальной системой со свободным левым концом траектории:

$$\begin{aligned} f_{ji}(\alpha) &= \max_{x_j, u_j} p_{ji}^\top x_j, \\ x_0(t+1) &= Ax_0(t) + Bu_j(t), \quad x_0(T_j) = x_j, \quad u_j(t) \in U, \quad t \in \Delta_j, \\ P_{j+1}x_0(T_{j+1}) &\leq g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha - \chi_j, \end{aligned}$$

где

$$\chi_j = (\chi_{ji}, i = 1, 2, \dots, \bar{m}_j): \chi_{ji} = w_{\max} \sum_{t \in \Delta_j} \|p_{j+1i}^\top A^{T_{j+1}-t-1} M\|_1,$$

а затем, принимая во внимание $x_0(T_{j+1}) = A^{T_{j+1}-T_j}x_j + \sum_{t \in \Delta_j} A^{T_{j+1}-t-1}Bu(t)$, — к задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} f_{ji}(\alpha) &= \max_{x_j, u_j} p_{ji}^\top x_j, \\ G_j x_j + \sum_{t \in \Delta_j} G_j D_j(t) u_j(t) &\leq g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha - \chi_j, \\ u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $G_j = P_{j+1}A^{T_{j+1}-T_j} \in \mathbb{R}^{\bar{m}_{j+1} \times n}$, $D_j(t) = A^{T_j-t-1}B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $t \in \Delta_j$.

Задача (2.14) как задача, зависящая от скалярного параметра α , — параметрическая задача линейного программирования на максимум. Из [16] следует, что $f_{ji}(\alpha)$, $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, — кусочно-линейная вогнутая функция. Ее можно полностью построить (найти промежутки и коэффициенты линейности) с применением результатов теории двойственности. Приведем необходимые для этого теоретические сведения и конструктивный алгоритм.

Двойственная к (2.14) задача имеет вид

$$\begin{aligned} f_{ji}(\alpha) &= \min_{y, v_*, v^*} (g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha - \chi_j)^\top y + \sum_{t \in \Delta_j} (u_{\max}^\top v^*(t) - u_{\min}^\top v_*(t)), \\ G_j^\top y &= p_{ji}, \quad y \geq 0, \\ (G_j D_j(t))^\top y + v^*(t) - v_*(t) &= 0, \quad v^*(t) \geq 0, \quad v_*(t) \geq 0, \quad t \in \Delta_j. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В (2.15) $y \in \mathbb{R}^{\bar{m}_{j+1}}$, $v_*(t), v^*(t) \in \mathbb{R}^r$, $t \in \Delta_j$.

Вторая группа ограничений-равенств задачи (2.15) принимает вид $v^*(t) - v_*(t) = -D_j(t)^\top p_{ji}$, $t \in \Delta_j$, и позволяет найти $v_*(t), v^*(t)$, $t \in \Delta_j$, по правилам

$$v_*(t) = [D_j(t)^\top p_{ji}]_+, \quad v^*(t) = [-D_j(t)^\top p_{ji}]_+, \quad t \in \Delta_j,$$

где $[z]_+ = \max\{z, 0\}$ — положительная срезка для $z \in \mathbb{R}$; $[z]_+ = ([z_j]_+, j = 1, \dots, r)$, $z \in \mathbb{R}^r$.

Обозначив $c_{ji} = \sum_{t \in \Delta_j} (u_{\max}^\top v^*(t) - u_{\min}^\top v_*(t))$, упростим задачу (2.15):

$$\begin{aligned} f_{ji}(\alpha) &= \min_y (g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha - \chi_j)^\top y + c_{ji}, \\ G_j^\top y &= p_{ji}, \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Исследуем упрощенную двойственную задачу (2.16) при фиксированном α . При ее решении возможны следующие три стандартные ситуации: 1) задача имеет решение, которое обозначим $y_j(\alpha)$; 2) задача неограничена снизу, $f_{ji}(\alpha) = -\infty$; 3) задача недопустима, $f_{ji}(\alpha) = +\infty$.

В терминах рассматриваемой задачи управления ситуация 2) означает, что при данном α множество $X_j(\alpha)$ пусто, поскольку прямая задача (2.14) недопустима.

Ситуация 3) — прямая задача (2.14) неограничена сверху. При постановке задачи управления в разд. 1 мы допустили неограниченность терминального множества X_T , поэтому такая ситуация возможна. При ее возникновении необходимо удалить вектор p_{ji} из системы нормалей, поскольку в направлении p_{ji} множество $X_j(\alpha)$ неограничено.

В ситуации 1) на основе анализа чувствительности для прямой задачи (2.14) по параметру α несложно найти промежуток $[\alpha_*, \alpha^*] \ni \alpha$, для которого сохраняется оптимальный базис задачи линейного программирования (2.14) и двойственное решение задачи (2.16) остается постоянным: $y_{ji}(\alpha') \equiv y_{ji}(\alpha)$, $\alpha' \in [\alpha_*, \alpha^*]$. Вычисление α_*, α^* в настоящей работе не приводится, на практике можно воспользоваться результатами монографии [17, с. 16].

Приведем алгоритм, который позволяет:

- 1) построить разбиение отрезка $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ на участки линейности функции $f_{ji}(\alpha)$;
- 2) уточнить, при необходимости, нижнюю границу α_{\min} ;
- 3) проверить выполнение предположения 3.

Для выполнения алгоритма выбирается малый параметр $\varepsilon > 0$, который необходим для того, чтобы создать зазор от точки излома функции $f_{ji}(\alpha)$ и обеспечить невырожденность задачи (2.16).

Следующий алгоритм выполняется для всех $i = 1, 2, \dots, m_j$, $j = N, N - 1, \dots, 1$.

1. $k := 1$, $\alpha_{ji}^1 := \alpha_{\max}$, $\alpha_{ji}^k = \alpha_{\max}$.
2. Решить задачу (2.16) для $\alpha = \alpha_{ji}^k$.
3. Проанализировать решение:
 - 3.1. Если задача (2.16) имеет решение, запомнить значения

$$\alpha_{ji}^k, f_{ji}^k = f_{ji}(\alpha_{ji}^k), y_{ji}^k = y_{ji}(\alpha_{ji}^k)$$

и перейти к шагу 4.

- 3.2. Если (2.16) неограничена снизу, скорректировать нижнюю границу для параметра: $\alpha_{\min} := \alpha_{ji}^k$, положить $K_{ji} = k - 1$ и перейти к шагу 5.
 - 3.3. Если (2.16) недопустима, удалить p_{ji} , перейти к шагу 5.
4. Найти $[\alpha_*, \alpha^*] \ni \alpha_{ji}^k$, положить $\alpha_{ji}^{k+1} = \max\{\alpha_*, \alpha_{\min}\}$:
 - 4.1. Если $\alpha_{ji}^{k+1} = \alpha_{\min}$, $K_{ji} := k$, перейти к шагу 5.
 - 4.2. Иначе $k := k + 1$, $\alpha_{ji}^k = \alpha_{ji}^{k+1} - \varepsilon$, вернуться к шагу 2.
5. Завершить алгоритм для данного i . □

В результате работы приведенного алгоритма будет найдено число K_{ji} и последовательность точек

$$\alpha_{ji}^1 = \alpha_{\max} > \alpha_{ji}^2 > \dots > \alpha_{ji}^{K_{ji}} > \alpha_{ji}^{K_{ji}+1} = \alpha_{\min},$$

а также двойственное решение y_{ji}^k задачи (2.16), которое остается постоянным на каждом промежутке $[\alpha_{ji}^{k+1}, \alpha_{ji}^k]$ значений параметра, $k = 1, 2, \dots, K_{ji}$. Найденные величины позволяют представить функции $f_{ji}(\alpha)$ как

$$f_{ji}(\alpha) = \min_{k=1,2,\dots,K_{ji}} \{f_{ji}^k + \lambda_{j+1}^\top y_{ji}^k (\alpha - \alpha_{ji}^k)\}. \quad (2.17)$$

На шаге 3.2 алгоритма может быть уточнено значение α_{\min} . Нужно отметить, что новое значение α_{\min} будет обнаружено при некотором j' и $i = 1$, после чего для остальных i, j алгоритм больше не будет реализовывать шаг 3.2.

Если после выполнения шага 3.2 окажется, что $\alpha_{\min} = \alpha_{\max}$, то предположение 3 не выполняется, задача не имеет решения в классе стратегий с выбранными моментами замыкания. Отметим, что для корректной работы алгоритма также необходимо предположить, что при выполнении предположения 3 множества $X_j(\alpha)$ непустые также в малой левосторонней окрестности α_{\max} . Поскольку α_{\max} не является жестко заданным параметром, это условие всегда можно выполнить, например, полагая $\alpha_{\max} := \alpha_{\max} + \varepsilon$.

На шаге 4 также необходимо контролировать выполнение равенства $\alpha^* = \alpha_{ji}^k$. Если оно нарушается, то выбранное значение параметра настройки алгоритма ε слишком велико, следует его уменьшить и повторить шаги 2–4 алгоритма.

На основе полученного представления (2.17) составим следующие блочные матрицу и векторы для правой части представления (2.13):

$$P_j = \begin{pmatrix} P_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{pmatrix}, \quad g_j = \begin{pmatrix} g_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{pmatrix}, \quad \lambda_j = \begin{pmatrix} \lambda_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где блоки имеют вид

$$P_{ji} = \begin{pmatrix} p_{ji}^\top \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \end{pmatrix}, \quad g_{ji} = \begin{pmatrix} f_{ji}^k - \lambda_{j+1}^\top y_{ji}^k \alpha_{ji}^k \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{ji} = \begin{pmatrix} \lambda_{j+1}^\top y_{ji}^k \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Здесь в матрице P_{ji} строка p_{ji}^\top (i -ая нормаль) повторяется K_{ji} раз, $P_j \in \mathbb{R}^{\bar{m}_j \times n}$, $g_j, \lambda_j \in \mathbb{R}^{\bar{m}_j}$, где $\bar{m}_j = \sum_{i=1}^{m_j} K_{ji}$.

В итоге приходим к представлению (2.13) и можем сформулировать

Утверждение 1. Для аппроксимаций (2.12) имеют место представления (2.13), где P_j, g_j, λ_j вычисляются по правилам (2.18), (2.19).

2.3. Вычисление субоптимальной начальной программы

В задаче (2.10) при $j = 0$ заменим $X_1(\alpha)$ на его аппроксимацию вида (2.13) и получим задачу построения субоптимальной начальной программы $\bar{u}_0^0(\cdot)$ и параметра α^0 :

$$\begin{aligned} V_0(x_0) &= \min_{u_0, \alpha} \alpha, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad u_0(t) \in U, \quad t \in \Delta_0, \\ P_1 x(T_1) &\leq g_1 + \lambda_1 \alpha \quad \forall w_0(\cdot) \in \mathcal{W}_0, \\ \alpha &\geq \alpha_{\min}. \end{aligned}$$

Эта задача снова может быть сведена к задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} V_0(x_0) &= \min_{u_0, \alpha} \alpha, \\ \sum_{t \in \Delta_0} P_1 A^{T_1-t-1} B u_0(t) - \lambda_1 \alpha &\leq g_1 - \chi_0 - P_1 A^{T_1} x_0, \\ u_{\min} &\leq u_0(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_0, \quad \alpha_{\min} \leq \alpha. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Результирующая задача линейного программирования вида (2.20) имеет $rT_1 + 1$ переменную и \bar{m}_1 основных ограничений. В зависимости от требуемой точности аппроксимации множества $X_1(\alpha)$ число нормалей m_1 может оказаться достаточно большим. На практике проблема роста числа ограничений задачи (2.20) может быть решена построением сначала грубых аппроксимаций с небольшим числом нормалей, а затем уточнением $X_j(\alpha)$ в окрестности точек $x(T_j | x_{j-1}, u_{j-1}, w_{j-1})$, где в качестве w_{j-1} выбраны вершины множества \mathcal{W}_j . При этом уточняется и верхняя оценка α_{\max} , она полагается равной оптимальному значению задачи (2.20) при грубой аппроксимации. Числа K_{ji} интервалов линейности функций $f_{ji}(\alpha)$ ограничены числом базисов задачи линейного программирования (2.16) и дополнительно ограничиваются выбором интервала $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. Уточняя последний, можно ожидать небольшого числа изломов функций $f_{ji}(\alpha)$ на $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ (см. пример 2).

В связи с внешней аппроксимацией множеств замыкания необходимо иметь ввиду, что условие $X(T_1 | x_0, \bar{u}_0^0) \subseteq \bar{X}_1(\alpha^0)$, вообще говоря, не гарантирует $X(T_1 | x_0, \bar{u}_0^0) \subseteq X_1(\alpha^0)$. Здесь возможны две ситуации: 1) $X(T_1 | x_0, \bar{u}_0^0) \subseteq X_1(\alpha')$, где $\alpha' > \alpha^0$, тогда величину $\alpha' - \alpha^0$ можно принять за меру субоптимальности стратегии $\bar{\pi}_N$; 2) существует возмущение $w^*(\cdot)$, такое что

для некоторого j окажется $x^*(T_j) \notin X_j$, т. е. продолжить процесс управления после момента T_j невозможно. В последнем случае можно поступить следующим образом: задачу построения оптимальной стратегии решать для “возмущенного” множества $w_\epsilon = \{w \in \mathbb{R}^p: \|w\| \leq w_{\max} + \epsilon\}$, подбирая малое $\epsilon > 0$ и систему векторов p_{ji} таким образом, чтобы построенная в возмущенной задаче аппроксимация $\bar{X}_j(\alpha)$ целиком лежала в множестве замыкания $X_j(\alpha)$ исходной задачи.

Подводя итог: в отличие от метода [9], в котором требуется последовательно решать задачи (2.11), а затем задачу, сравнимую с (2.20) по размерности, при фиксированных значениях параметра α , задача (2.20) решается только один раз и сразу дает оптимальное значение параметра $\alpha^0 = V_0(x_0)$ и субоптимальную начальную программу $\bar{u}_0^0(\cdot|x_0)$.

3. Примеры

Проиллюстрируем предложенный метод на примерах построения оптимальных стратегий с различным числом точек замыкания.

Пример 1. Рассмотрим задачу из [14]:

$$x_2(T) \rightarrow \max, \tag{3.1}$$

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.9950 & 0.0998 \\ -0.0998 & 0.9950 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.0050 \\ 0.0998 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0.0050 \\ 0.0998 \end{pmatrix} w(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x(T) \in X_T = \{x \in \mathbb{R}^2: x_* \leq x_1 \leq x^*\}, \quad |u(t)| \leq 1, \quad |w(t)| \leq 0.5, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Выберем горизонт планирования $T = 120$. Сначала рассмотрим задачу (3.1) со значениями $x_* = 2, x^* = 10$. Задача (3.1) имеет решение в классе гарантирующих программ: $u^0(\cdot)$ доставляет критерию качества гарантированное значение $J(x_0) = 1.501102$. Время, затраченное на построение оптимальной программы, составило 0.0151 с (см. также [14]).

Начнем с построения субоптимальной стратегии с одним моментом замыкания T_1 . Решение будет зависеть от положения T_1 . В таблице ниже приведены значения $V_0(x_0)$ для различных моментов замыкания. При $T_1 \geq 104$ оптимальная стратегия не дает улучшения критерия качества в сравнении с оптимальной гарантирующей программой, т. е. $V_0(x_0) = 1.501102$.

Для аппроксимаций множеств $X_1(\alpha)$ использовались 203 вектора p_{1i} : 200 векторов вида $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\varphi = \pi/100, 2\pi/100, \dots, 2\pi$, и 3 вектора-строки матрицы $P_{N+1}A^{T-T_1}$. Они выбирались одинаковыми для всех T_1 и α . Функции $f_{1i}(\alpha)$ оказались линейными, что можно легко установить, не прибегая к алгоритму из подразд. 2.2, поскольку в каждой допустимой двойственной задаче (2.16) допустимое множество (если не пусто) является отноточечным: $\{y \in \mathbb{R}^3: (y_1 - y_2, y_3) = p_{ij}^\top (A^{T-T_1})^{-1}, y \geq 0\}$. Поскольку множество X_T неограниченное, 100 векторов (разные для разных T_1) удалялись на шаге 3.3 алгоритма. Таким образом, в задаче (2.20) число основных ограничений равно $\bar{m}_1 = m_1 = 103$.

Точность аппроксимации при построении субоптимальной начальной программы равна $5 \cdot 10^{-4}$. Методика оценки этой точности описана ниже.

Среднее время решения задач (2.20) при значениях T_1 , представленных в таблице, составило 0.016 с при уже построенных аппроксимациях $X_1(\alpha)$, для которых требовалось не более 4.5 с.

Зависимость $V_0(x_0)$ от T_1

T_1	V_0	T_1	V_0	T_1	V_0	T_1	V_0	T_1	V_0
10	1.955795	30	2.065278	50	2.587973	70	2.835391	90	2.735537
20	1.955523	40	2.578177	60	2.633505	80	2.754215	100	1.681654

Функция $V(x_0) = V(x_0|T_1)$ как функция момента замыкания достигает максимального значения (задача (3.1) — на максимум) при $T_1 = 67$, и это значение равно 2.913110. Результаты, иллюстрирующие решение, представлены на рис. 1а.

Поясним иллюстрацию на рисунке 1а. Сплошной линией изображена фазовая траектория $x^*(t)$, $t = 0, 1, \dots, T - 1$, системы (3.1) под действием субоптимальной стратегии управления $\bar{\pi}_1(0, x_0) = \{\bar{u}_0^0(\cdot|x_0); u_1^0(\cdot|x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, \bar{u}_0^0)\}$ и экстремального возмущения $w^*(t)$, $t = 0, 1, \dots, T - 1$. Под экстремальным возмущением понимается такое возмущение, которое состоит из $w_j(\cdot)$, $j = 0, 1$, доставляющих максимум в (2.8).

Если бы множество замыкания $X_1(\alpha)$ было известно точно, выполнялось бы равенство $c^\top x^*(T) = V_0(x_0) = \alpha^0$. В силу аппроксимации, однако, $V_0(x_0) - c^\top x^*(T) \geq 0$, и эта величина позволяет оценить точность аппроксимации и субоптимальность построенной начальной программы $\bar{u}_0^0(\cdot|x_0)$. В рассматриваемом примере получено $c^\top x^*(T) = 2.912640$ и точность составила $4.7 \cdot 10^{-4}$.

Штриховыми линиями на рис. 1 изображены траектории номинальной системы. Траектория 1 относится к промежутку Δ_0 и изображает фазовую траекторию $x_0(t|x_0, \bar{u}_0^0)$, $t \in \Delta_0$, номинальной системы под действием субоптимальной начальной программы. Также представлено множество $X(T_1|x_0, \bar{u}_0^0)$ возможных состояний системы (3.1) под действием оптимальной начальной программы (пунктирная линия). Это множество целиком лежит в множестве $\bar{X}_1(\alpha^0)$ (пунктирные линии в правой части рисунка 1а), т. е. для любого $x_1 \in X(T_1|x_0, \bar{u}_0^0)$ имеет место $V_1(x_1) \geq \alpha^0$. Штриховая линия 2 — траектория $x_0(t|x^*(T_1), u_1^0)$, $t \in \Delta_1$, номинальной системы под действием оптимальной гарантирующей программы $u_1^0(\cdot|x^*(T_1))$ для позиции $(T_1, x^*(T_1))$. Множество $X(T|x^*(T_1), u_1^0)$ — множество возможных состояний под действием управления $u_1^0(\cdot|x^*(T_1))$ — целиком лежит в терминальном множестве X_T (серая полоса), что иллюстрирует выполнение ограничений (1.2) с гарантией.

Отметим, что в работе [9], где в качестве примера рассмотрена непрерывная задача, дискретизацией которой получена задача (3.1), использованы значения $x_* = 2$, $x^* = 7$, и при таких условиях не существует оптимальной гарантирующей программы (как в непрерывной задаче из [9], так и в задаче (3.1)). Однако оптимальная стратегия $\pi_1^0(0, x_0)$ существует и совпадает с решением для задачи с $x^* = 10$, что, очевидно, следует из неактивности ограничения $x_1(T) \leq 10$.

Теперь построим субоптимальную стратегию $\bar{\pi}_2(0, x_0)$ с двумя моментами замыкания. Вы-

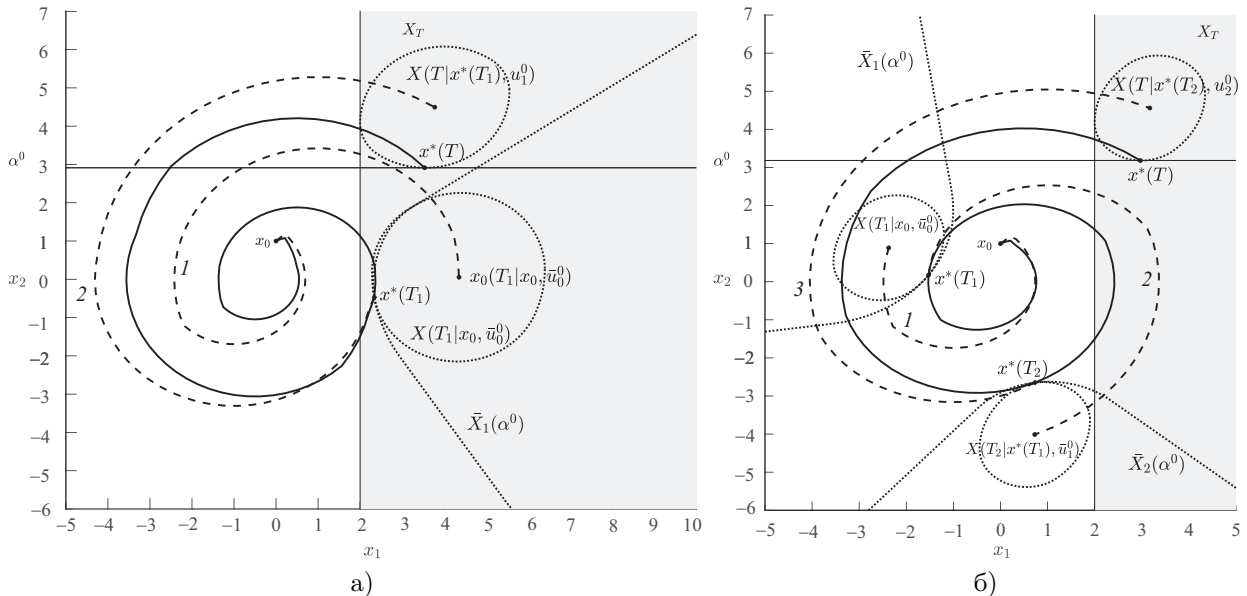


Рис. 1. Фазовые траектории для примера 1: а) с одним моментом замыкания $T_1 = 67$; б) с двумя моментами замыкания $T_1 = 40$, $T_2 = 80$.

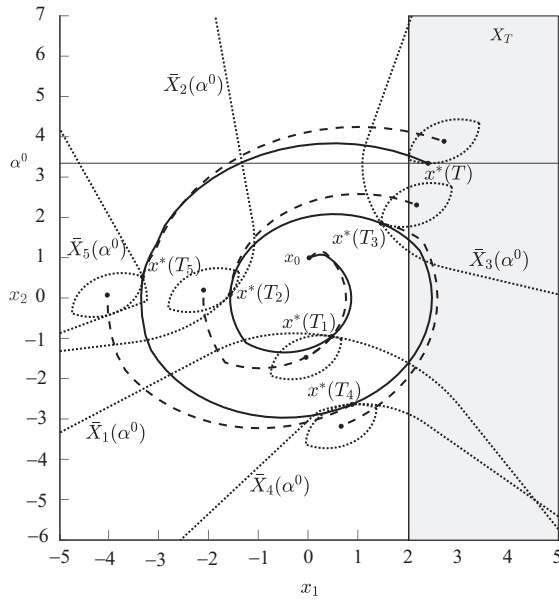


Рис. 2. Фазовые траектории для примера 1 с моментами замыкания $T_1 = 20$, $T_2 = 40$, $T_3 = 60$, $T_4 = 80$, $T_5 = 100$.

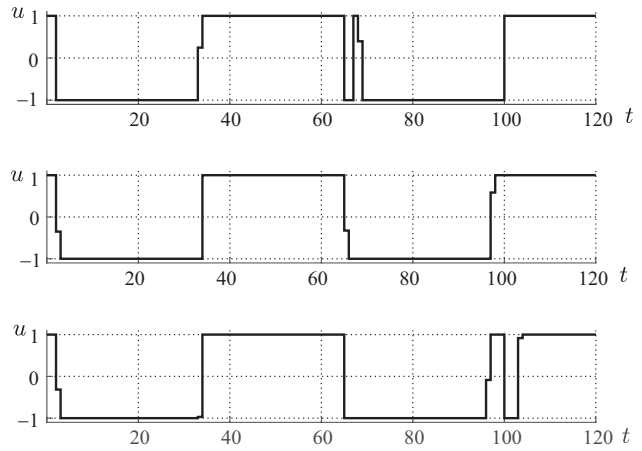


Рис. 3. Управления для случаев 1, 2 и 5 точек замыкания (сверху вниз).

берем $T_1 = 40$, $T_2 = 80$. Полученные результаты представлены на рисунке 1б). Здесь, как и на рисунке 1а), сплошной линией 1 изображена фазовая траектория $x^*(t)$, $t = 0, 1, \dots, T - 1$, системы (3.1) под действием субоптимальной стратегии управления $\bar{\pi}_2(0, x_0)$ и экстремального возмущения $w^*(t)$, $t = 0, 1, \dots, T - 1$. Участки номинальных траекторий $x_0(t|x(T_j^*), \bar{u}_j^0)$, $t \in \Delta_j$, $j = 0, 1, 2$, представлены кривыми 1, 2, 3 соответственно.

При выбранных моментах замыкания T_1, T_2 стратегия $\bar{\pi}_2(0, x_0)$ позволяет достичь значения критерия качества $V_0(x_0) = 3.182802$. Точность решения равна $1.6 \cdot 10^{-3}$. Для аппроксимации множеств $X_1(\alpha)$ использовались 203 вектора p_{1i} , для $X_2(\alpha)$ — 103 вектора p_{2i} . Время вычисления векторов g_j, λ_j , $j = 1, 2$, составило 6.53 с, решения задачи (2.20) — 0.02 с.

В случае пяти моментов замыкания: $T_1 = 20, T_2 = 40, T_3 = 60, T_4 = 80, T_5 = 100$ субоптимальная стратегия $\bar{\pi}_5(0, x_0)$ дает $V_0(x_0) = 3.347376$ при точности аппроксимации $6 \cdot 10^{-4}$. Время решения задачи (2.20) — 0.02 с, время построения аппроксимаций множеств замыкания — 36 с. Результаты на фазовой плоскости представлены на рис. 2. Управления, при которых были получены траектории $x^*(t)$, $t = 0, 1, \dots, T$, для всех трех рассмотренных стратегий, $\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \bar{\pi}_5$, изображены на рис. 3 (сверху вниз, соответственно перечисленным стратегиям).

Отметим, что при построении $\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_5$ функции $f_{ji}(\alpha)$ исследовались на промежутке $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] = [1.501102, 7.941166]$, и зависимость оказалась линейной, т.е. решение задач (2.16) не зависело от параметра α .

Пример 2. Изменим терминальное множество X_T и множество возможных значений возмущения W примера 1, выбрав $X_T = \{x \in \mathbb{R}^2: 8 \leq x_1 + x_2 \leq 13, -6 \leq x_1 - x_2 \leq -1\}$, $|w(t)| \leq 0.2$. Такие параметры задачи позволяют продемонстрировать случай, когда $f_{ji}(\alpha)$ при некоторых i, j являются кусочно-линейными функциями.

Рассматриваемая задача имеет решение в классе гарантирующих программ, $J(x_0) = 5.834369$. Это значение выбрано в качестве α_{\min} (задача на максимум). Найдено $\alpha_{\max} = 7.954916$.

Выберем два момента замыкания: $T_1 = 40$ и $T_2 = 80$. Построена субоптимальная стратегия $\bar{\pi}_2(0, x_0)$, доставляющая критерию качества значение $V_0(x_0) = 6.481336$. Полученные результаты представлены на рис. 4.

При построении аппроксимации множества замыкания $X_2(\alpha)$ 75 направлений p_{2i} оказались таковы, что $f_{2i}(\alpha)$ на $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ имеют точку излома $\alpha_{2i}^2 = 6.517190$, еще 75 — точку

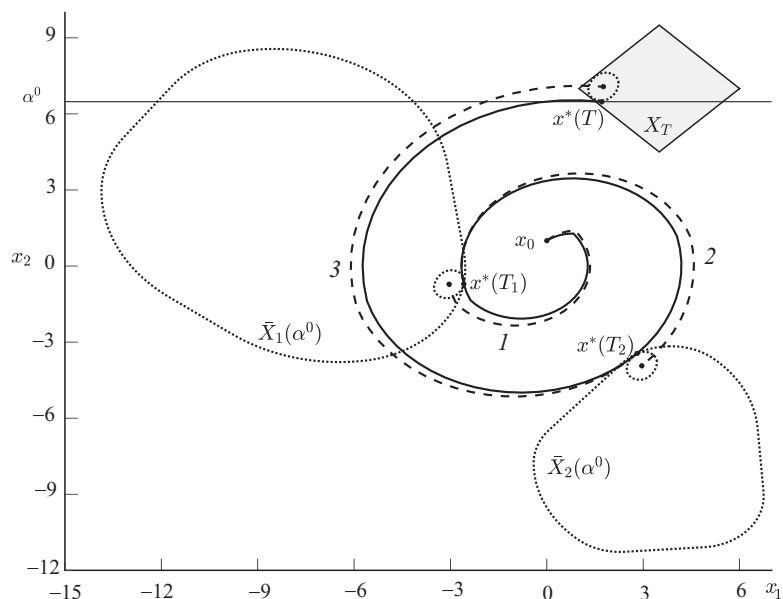


Рис. 4. Фазовые траектории для примера 2.

$\alpha_{2i}^2 = 6.380430$. Всего в аппроксимации (2.13) было получено $\bar{m}_2 = 355$. Аналогично для $X_1(\alpha)$ отдельные $f_{1i}(\alpha)$ имеют ту или иную точку излома из перечисленных выше, $\bar{m}_1 = 605$. Точность аппроксимации составила $4.7 \cdot 10^{-3}$, время решения задачи (2.20) — 0.027 с.

Заключение

В работе рассмотрена задача минимизации гарантированного значения терминального критерия качества на траекториях линейной дискретной системы с неизвестными ограниченными возмущениями. Исследована проблема построения оптимальной стратегии управления с N моментами замыкания, где под замыканиями понимается учет информации о будущих состояниях объекта в некоторые будущие моменты времени. Оптимальная стратегия управления состоит из оптимальной начальной программы, определенной в моменты времени до первого замыкания, и совокупности оптимальных стратегий управления с оставшимися моментами замыкания, определенных после первого момента замыкания для всех возможных (в силу возмущения и начальной программы) состояний в этот момент.

Для построения многократно замыкаемой стратегии управления введены специальные множества замыкания, соответствующие моментам замыкания, построены их аппроксимации и получена задача линейного программирования, из которой находится субоптимальная начальная программа для стратегии. Результаты статьи позволяют существенно упростить метод построения оптимальной стратегии в сравнении с алгоритмом, приведенным ранее в работе [9]. Численные эксперименты демонстрируют эффективность предложенного подхода и сравнимую трудоемкость вычисления оптимальных стратегий и оптимальной гарантирующей программы (после того, как построены параметры аппроксимаций множеств замыкания).

Отметим, что наиболее трудоемкая операция приходится на решение задач (2.16) и построение аппроксимаций множеств замыкания, однако она выполняется однократно, до начала процесса управления. При использовании многократно замыкаемых стратегий для построения реализаций оптимальных обратных связей в режиме реального времени (см. [7–9]) в процессе управления решаются только задачи, аналогичные задаче линейного программирования (2.20). Время решения этих задач позволяет строить оптимальные стратегии в режиме реального времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Witsenhausen Н.** A minimax control problem for sampled linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1968. Vol. 13, no. 1. P. 5–21. doi:10.1109/TAC.1968.1098788.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1978. 392 с.
3. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. **Lee J.H., Yu Z.** Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters // Automatica. 1997. Vol. 33, no. 5. P. 763–781. doi: 10.1016/S0005-1098(96)00255-5.
5. **Vemporad A., Borrelli F., Morari M.** Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48, no. 9. P. 1600–1606. doi: 10.1109/TAC.2003.816984.
6. **Goulart P.J., Kerrigan E.C., Maciejowski J.M.** Optimization over state feedback policies for robust control with constraints // Automatica. 2006. Vol. 42, no. 4. P. 523–533. doi: 10.1016/j.automatica.2005.08.023.
7. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А.** Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. I. Однократное замыкание // Автоматика и телемеханика. 1996. № 7. С. 121–130.
8. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А.** Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. II. Многократно замыкаемые обратные связи // Автоматика и телемеханика. 1996. № 8. С. 90–99.
9. **Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 265–286.
10. **Kostyukova O., Kostina E.** Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances // Mathematical Programming. 2006. Vol. 107, no. 1–2. P. 131–153. doi: 10.1007/s10107-005-0682-4.
11. **Kostina E., Kostyukova O.** Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2009. Vol. 19, no. 17. P. 1940–1958. doi: 10.1002/rnc.1417.
12. **Chong K., Kostyukova O., Kurdina M.** Guaranteed control policy with arbitrary set of correction points for linear-quadratic system with delay // Control and Cybernetics. 2010. Vol. 39, no. 3. P. 739–768.
13. **Дмитрук Н.М.** Оптимальная стратегия с одним моментом замыкания в линейной задаче оптимального гарантированного управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 2. P. 664–681.
14. **Kastsiukevich D.A., Dmitruk N.M.** A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem // J. the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2021. No. 2. P. 38–50. doi: 10.33581/2520-6508-2021-2-38-50.
15. **Boyd S., Vandenberghe L.** Convex Optimization. NY: Cambridge Uni. Press, 2004. 716 p.
16. **Gal T.** Postoptimal analyses, parametric programming and related topics. Berlin: De Gruyter, 1995. 437 p. doi: 10.1515/9783110871203.
17. **Borrelli F.** Constrained optimal control for hybrid systems. Berlin Heidelberg: Springer, 2003. 206 p.

Поступила 1.06.2022

После доработки 15.07.2022

Принята к публикации 18.07.2022

Дмитрук Наталия Михайловна
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой
Белорусский государственный университет
г. Минск
e-mail: dmitruknb@bsu.by

REFERENCES

1. Witsenhausen H. A minimax control problem for sampled linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, vol. 13, no. 1, pp. 5–21. doi: 10.1109/TAC.1968.1098788.
2. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.
4. Lee J.H., Yu Z. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. *Automatica*, 1997, vol. 33, no. 5, pp. 763–781. doi: 10.1016/S0005-1098(96)00255-5.
5. Bemporad A., Borrelli F., Morari M. Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no. 9, pp. 1600–1606. doi: 10.1109/TAC.2003.816984.
6. Goulart P.J., Kerrigan E.C., Maciejowski J.M. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints. *Automatica*, 2006, vol. 42, no. 4, pp. 523–533. doi: 10.1016/j.automatica.2005.08.023.
7. Gabasov R., Kirillova F.M., Kostina E.A. Closed state feedback for optimization of uncertain control systems. Part 1. Single loop. *Autom. Remote Control*, 1996, vol. 57, no. 7, pp. 1008–1015.
8. Gabasov R., Kirillova F.M., Kostina E.A. Closed-loop state feedback for optimization of uncertain control systems. II: Multiply closed feedback. *Autom. Remote Control*, 1996, vol. 57, no. 8, pp. 1137–1145.
9. Balashevich N.V., Gabasov R., Kirillova F.M. The construction of optimal feedback from mathematical models with uncertainty. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 247–267.
10. Kostyukova O., Kostina E. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances. *Mathematical Programming*, 2006, vol. 107, no. 1, pp. 131–153. doi: 10.1007/s10107-005-0682-4.
11. Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2009, vol. 19, no. 17, pp. 1940–1958. doi: 10.1002/rnc.1417.
12. Chong K., Kostyukova O., Kurdina M. Guaranteed control policy with arbitrary set of correction points for linear-quadratic system with delay. *Control and Cybernetics*, 2010, vol. 39, no. 3, pp. 739–768.
13. Dmitruk N.M. Optimal strategy with one closing instant for a linear optimal guaranteed control problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 5, pp. 642–658. doi: 10.1134/S096554251805007X.
14. Kastsukevich D.A., Dmitruk N.M. A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2021, no. 2, pp. 38–50. doi: 10.33581/2520-6508-2021-2-38-50.
15. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex optimization*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004, 716 p. ISBN: 9780521833783.
16. Gal T. *Postoptimal analyses, parametric programming, and related topics*. Berlin; NY: De Gruyter, 1994, 437 p. doi: 10.1515/9783110871203.
17. Borrelli F. *Constrained optimal control for hybrid systems*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. 206 p.

Received June 1, 2022

Revised July 15, 2022

Accepted July 18, 2022

Funding Agency: This work was supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus “Convergence 2025” (project no. 1.2.04.1).

Natalia Mikhailovna Dmitruk, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: dmitrukn@bsu.by.

Cite this article as: N. M. Dmitruk. Multiply closed control strategy in a linear terminal problem of optimal guaranteed control. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 66–82.