ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 519.715

АНИЗОТРОПИЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ЭНТРОПИЯ: АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В. А. Бойченко

Реальные динамические системы функционируют в условиях различных помех и под влиянием неизвестных внешних воздействий. Поэтому проблема подавления возмущений является чрезвычайно важным разделом теории управления. К числу эффективных подходов к решению этой проблемы относится анизотропийная теория стохастического робастного управления. К сожалению, у этой теории существуют принципиальные ограничения — она применима только к дискретным стохастическим системам и только для стационарных гауссовских последовательностей. В последнее время были предприняты попытки перенести концепции анизотропийной теории на системы с непрерывным временем. В данной работе результаты анизотропийной теории расширены на произвольные случайный сигналы, в частности на последовательности с конечной l_2 или мощностной нормой и последовательности с произвольной скоростью роста.

Ключевые слова: линейные системы, анизотропия, спектральная энтропия, σ-энтропийная норма.

V. A. Boichenko. Anisotropy and spectral entropy: Axiomatic approach.

Real-life dynamic systems operate under various disturbances and are affected by unknown external influences. That is why the problem of perturbation suppression is an extremely important branch of control theory. An effective approach to solving this problem is the anisotropic theory of stochastic robust control. Unfortunately, this theory has fundamental limitations — it is applicable only to discrete stochastic systems and only to stationary Gaussian sequences. Recently, attempts have been made to transfer the concepts of anisotropic theory to systems with continuous time. In this paper, the results of anisotropic theory are extended to arbitrary random signals, including both sequences with finite l_2 or power norm and sequences with arbitrary growth rate.

Keywords: linear systems, anisotropy, spectral entropy, σ-entropy norm.

MSC: 93A05, 93E03, 93E24

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-53-65

Введение

Реальные динамические системы функционируют в условиях различных помех и под влиянием неизвестных внешних воздействий, измеряемые значения сигналов содержат случайные ошибки, а управляющие воздействия могут отрабатываться со случайными погрешностями. Поэтому проблема подавления неизвестных возмущений неизбежно возникает при проектировании современных систем управления техническими объектами и является чрезвычайно важным разделом теории управления. Задача подавления влияния внешнего возмущения восходит к классическим работам Г.В. Щипанова по теории инвариантности и в настоящее время решается в рамках различных теорий в зависимости от природы возмущения и моделей объекта.

Задачу подавления возмущений можно сформулировать как задачу минимизации влияния этих возмущений на качество работы системы управления. Выбор критерия качества диктуется различными предположениями о характере возмущений, действующих на систему. Одним из ярких результатов 60-х годов XX века в теории автоматического управления явилась теория построения регуляторов для линейных систем с квадратичным критерием качества (Р. Калман [1], А. М. Летов [2]), обеспечившая мощный инструмент для синтеза многомерных систем управления. Задача синтеза линейно-квадратичного регулятора, т.е. линейного регулятора, минимизирующего квадратичный по состоянию и управлению функционал качества, была одной из первых решенных задач оптимального управления по принципу обратной связи. При синтезе линейно-квадратичного гауссовского (LQG) регулятора предполагается, что внешнее возмущение является гауссовским белым шумом. В реальных условиях LQG-регуляторы эффективно работали, если аддитивная помеха была гауссовским белым шумом или слегка от него отличалась. Однако если входное возмущение было сильно коррелированным, то качество работы системы резко падало и не удовлетворяло требованиям, предъявляемым к замкнутым этими регуляторами системам управления.

Попытки преодолеть недостатки теории с квадратичным критерием качества привели к возрождению частотного подхода в форме теории $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации. В 1981 г. вышла работа Д. Зеймса [3], в которой он предложил использовать другой критерий качества — $\mathcal{H}_\infty$-норму замкнутой системы. Для $\mathcal{H}_\infty$-оптимального подхода не требуется знание статистического характера внешнего возмущения, предполагается лишь, что внешнее возмущение представляет собой сигнал, интегрируемый с квадратом. Эта работа заложила основы теории $\mathcal{H}_\infty$ субоптимального управления, которая с тех пор составляет центральное ядро современной теории управления.

Однако $\mathcal{H}_\infty$-оптимальные регуляторы, будучи минимаксными, т. е. рассчитанными на наихудший случай входных возмущений, имели свои естественные недостатки — для реализации минимума критерия качества затраты на управление порой становился чрезмерно большими и такие регуляторы были трудно реализуемы. Таким образом оказалось, что $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-регуляторы являются эффективными лишь при достаточно точном выполнении гипотез о природе внешних возмущений: LQG- или $\mathcal{H}_2$-регулятор может стать неработоспособным в том случае, если внешнее возмущение представляет собой сильно коррелированный шум, в то время как $\mathcal{H}_\infty$-регулятор, проектируемый для наихудшего случая детерминированного возмущения, проявляет излишний консерватизм и требует избыточных энергетических затрат на управление, если внешнее возмущение представляет собой некоррелированный или слабо коррелированный случайный сигнал.

Сходство алгоритмов синтеза $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-оптимальных регуляторов наводило на мысль, что должен существовать универсальный подход к управлению динамическими системами со стохастическими возмущениями, в котором задачи $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации были бы частными случаями общей теории. В середине 1990-х гг. И. Г. Владимировым, А. П. Курдюковым и А. В. Семёновым была создана теория, обобщающая подходы $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-управления и получившая название анизотропийной теории стохастического робастного управления [4–6]. В рамках этого подхода робастность в стохастическом управлении достигается с помощью явного включения различных сценариев распределения шума в единый показатель качества, подлежащий оптимизации: статистическая неопределенность описывается в терминах энтропии, а показатель робастного качества выбирается так, чтобы количественно охарактеризовать возможности системы по подавлению наихудшего внешнего возмущения. Основополагающими понятиями анизотропийной теории стохастического робастного управления являются "анизотропия случайного вектора" и "анизотропийная норма дискретной линейной системы"; данная норма количественно определяет возможности системы по подавлению внешних возмущений. Анизотропийная норма является индуцированной нормой или, иначе говоря, максимальным коэффициентом усиления и определяется как максимум отношения мощностной нормы выхода системы к мощностной норме ее входа на множестве входных сигналов, средняя анизотропия которых не превышает заданного неотрицательного значения a. Минимизация критерия качества в форме анизотропийной нормы замкнутой системы приводит к стабилизирующему регулятору по выходу, для которого характерен меньший консерватизм управления по сравнению с $\mathcal{H}_\infty$-регулятором и который более эффективен при подавлении коррелированных возмущений, чем $\mathcal{H}_2$-регулятор.

К сожалению, у этой теории существуют принципиальные ограничения — она применима только к дискретным стохастическим системам и только для стационарных гауссовских последовательностей. В последнее время были предприняты попытки [7;8] перенести концепции анизотропийной теории на системы с непрерывным временем. В данной работе результаты анизотропийной теории расширены на произвольные случайные сигналы, в частности на последовательности с конечной l_2 или мощностной нормой и на последовательности с произвольной скоростью роста.

1. Аксиоматика анизотропийной теории

Год назад в журнале "Автоматика и телемеханика" был опубликован большой обзор "Между $LQG/\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ теориями управления" [6], в котором подводятся итоги почти тридцатилетнего развития анизотропийной теории управления. Именно этот обзор будет цитироваться при анализе концептуальных основ и аксиоматики анизотропийной теории. Итак, первая цитата [6, с. 39]:

> *Рассмотрим устойчивую линейную дискретную систему F, заданную в пространстве состояний в следующем виде:*
>
> $$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, & x_0 = 0, \\ y_k \quad = Cx_k + Dw_k, & k = 0, 1, 2, \ \ldots, \end{cases} \tag{1.1}$$
>
> *где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $W = \{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — стационарная гауссовская последовательность m-мерных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) < a$ $(a \geqslant 0)$ и нулевым средним, $\{y_k\} \in \mathbb{R}^p$ — выход системы.*

Это стандартное начало постановки любой задачи в анизотропийной теории — отсюда немедленно получаем первые две аксиомы теории.

- Линейная дискретная система.
- Бесконечный горизонт.

Следующий шаг в любой теории управления — это описание множества сигналов, с которыми работает теория. Например, LQR или $\mathcal{H}_\infty$ теории рассматривают непрерывные детерминированные сигналы с конечной $\mathcal{H}_2$ нормой, LQG теория — случайный гауссовский сигнал. В анизотропийной теории в качестве входных сигналов рассматриваются только стационарные гауссовские последовательности, для которых вводится дополнительная интегральная характеристика сигнала — средняя анизотропия случайной последовательности. Отметим, что ограничение входных сигналов множеством стационарных гауссовских последовательностей случайных m-мерных векторов является очень сильным ограничением. Причина этого ограничения — понятие средней анизотропии случайной последовательности. Остановимся на нем подробнее. Начинается оно с определения анизотропии случайного вектора [6, с. 36]:

> *Напомним, что $\mathfrak{L}_2^m$ — это класс $\mathbb{R}^m$-мерных случайных распределенных абсолютно непрерывно векторов с конечным вторым моментом.*
>
> *Для любого $\lambda > 0$ обозначим через $p_{m,\lambda}$ функцию плотности распределения вероятностей на $\mathbb{R}^m$ гауссовского сигнала с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m*
>
> $$p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\Big(-\frac{|\,x\,|^2}{2\lambda}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^m. \tag{1.2}$$
>
> *Для любого $w \in \mathfrak{L}_2^m$ с функцией плотности распределения вероятностей $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ его относительная энтропия $\mathbf{D}$ относительно (1.2) принимает вид*
>
> $$\mathbf{D}(f\|p_{m,\lambda}) = \mathbf{E}\Big[\ln\frac{f(w)}{p_{m,\lambda}(x)}\Big] = -h(w) + \frac{m}{2}\ln(2\pi\lambda) + \frac{\mathbf{E}\big[|w|^2\big]}{2\lambda},$$

где

$$h(w) = -\mathbf{E}\big[\ln f(w)\big] = -\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(w)\ln f(w)\,dw$$

— дифференциальная энтропия случайного вектора w.

О п р е д е л е н и е 1. *Анизотропия* $\mathbf{A}(w)$ *случайного вектора* $w \in \mathfrak{L}_2^m$ *определяется как минимальное информационное уклонение его распределения от гауссовских распределений на* $\mathbb{R}^m$ *с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами*

$$\mathbf{A}(w) = \min_{\lambda>0} \mathbf{D}(f\|p_{m,\lambda}).$$

С точки зрения теории управления у относительной энтропии (она же расстояние Кульбака — Лейблера [6, с. 35], она же минимальное информационное уклонение [6, с. 36]) обнаруживаются две патологии:

а) для вычисления относительной энтропии $\mathbf{D}\big(f\|g\big)$ необходимы два случайных вектора (с плотностью вероятностей $f(x)$ и $g(x)$);

б) имеет место асимметрия относительной энтропии (вообще говоря, $\mathbf{D}\big(f\|g\big) \neq \mathbf{D}\big(g\|f\big)$ [6, с. 34]).

В анизотропийной теории эта сложность преодолевается следующим образом: случайные вектора сравнивается не друг с другом, а с образцом, с эталоном. И результаты этого сравнения затем используются в теории. В выборе эталона — полный произвол. Но при теоретических выкладках нет ничего удобнее экспоненты, поэтому в качестве эталона в анизотропийной теории выбирается случайный гауссовский вектор с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m, и поскольку таких векторов целое семейство, то вычисляется минимум по всевозможным $\lambda > 0$. Итак, формулируем третью аксиому анизотропийной теории и три ее составные части.

- Анизотропия случайного вектора:
  - — относительная энтропия;
  - — эталонный сигнал $p_{m,\lambda}$;
  - — минимум по λ.

Теория управления работает не со случайными векторами, а со входными и выходными сигналами — либо дискретными, либо непрерывными. В случае анизотропийной теории это последовательность случайных векторов. Определить анизотропию случайной последовательности исходя из анизотропии случайного вектора можно разными способами — процедура эта не однозначная. Анизотропийная теория решает данную задачу методом векторизации фрагмента последовательности $W = \{w_k\}$ из N элементов, вычисления анизотропии этого вектора размером $m \times M$ и предельного перехода $N \to +\infty$ [6, с. 38]:

Выделим из последовательности W *подпоследовательность размерности* $N{\times}m$

$$W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix},$$

каждый вектор w_i *принадлежит* $\mathbb{R}^m$ *при* $i = \overline{0,(N{-}1)}$.

О п р е д е л е н и е 2. *Средняя анизотропия последовательности* W *определяется следующим образом:*

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}\,.$$

Отсюда следует четвертая аксиома анизотропийной теории.

- Средняя анизотропия случайной последовательности:
  — векторизация;
  — усреднение.

Определение средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W)$ случайной последовательности дается на теоретико-вероятностном языке, а теория управления либо работает во временной области, либо имеет дело с частотным представлением, т. е. использует аппарат классической теории функций. Переход от теоретико-вероятностного к функциональному описанию обеспечивает теорема Колмогорова — Сегё [9, теорема 16]. Эта теорема связывает ошибку прогноза на 1 шаг вперед со спектральной плотностью процесса и тем самым обеспечивает переход от теоретико-вероятностного описания к функциональному анализу, но за это необходимо платить очень жестким ограничением — входной сигнал должен быть центрированным стационарным процессом.

И наконец, критерий качества системы: в анизотропийной теории таковым критерием постулируется анизотропийная норма системы [6, с. 39]:

> *Обозначим через $Y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ выходную последовательность системы* (1.1). *Определим мощностную норму последовательности Y формулой*
>
> $$\big\|Y\big\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\big[|y_k|^2\big]}\,.$$
>
> *Предполагая, что $\|Y\|_{\mathcal{P}}$ и $\|W\|_{\mathcal{P}}$ конечные, определим для заданной системы F с входным сигналом $W = \{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ среднеквадратичный коэффициент усиления в виде*
>
> $$Q(F, W) = \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}\,.$$
>
> О п р е д е л е н и е 3. *Для заданной величины $a \geqslant 0$ анизотропийной нормой системы F называют*
>
> $$\big|\!\big|\!\big|F\big|\!\big|\!\big|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} Q(F, W).$$
>
> *Таким образом, анизотропийная норма системы $\big|\!\big|\!\big|F\big|\!\big|\!\big|_a$ задает стохастический коэффициент усиления системой F входного сигнала W.*

Итак, заключительная, пятая аксиома анизотропийной теории.

- Анизотропийная норма системы.

Подведем итоги и перечислим концептуальные основы и аксиомы анизотропийной теории.

- Линейная дискретная система.
- Бесконечный горизонт.
- Анизотропия случайного вектора:
  — относительная энтропия;
  — эталонный сигнал $p_{m,\lambda}$;
  — минимум по λ.
- Средняя анизотропия случайной последовательности:
  — векторизация;
  — усреднение.
- Анизотропийная норма системы.

Первые две аксиомы описывают исследуемую систему, последняя — это критерий качества системы. В каком-то смысле, это рутина любой теории управления. Третья и четвертая аксиомы обеспечивают детализированное описание каждого входного сигнала, определяют интегральную характеристику сигнала — среднюю анизотропию стационарной гауссовской последовательности. Это исключительная особенность только анизотропийной теории.

Добавим несколько слов об одном свойстве средней анизотропии, о котором нигде не говорится. Дело в том, что с теоретико-множественной точки зрения средняя анизотропия порождает отношение эквивалентности на множестве стационарных гауссовских последовательностей. Действительно, средняя анизотропия позволяет для любой пары последовательностей ввести бинарное отношение $\sim$ эквивалентности — отношение быть эквианизотропийными (т.е. иметь равные средние анизотропии) на множестве $\mathcal{W}$ входных последовательностей. Введенное таким образом отношение эквианизотропийности удовлетворяет всем условиям эквивалентности [10, с. 23]: это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Как всякое отношение эквивалентности отношение эквианизотропийности на множестве $\mathcal{W}$ входных последовательностей $W=\{w_k\}$ порождает разбиение множества $\mathcal{W}$ на непересекающиеся классы эквивалентности, а совокупность всех классов эквивалентности образует фактор-множество $\mathcal{W}/\!\sim$.

Учитывая вышесказанное о свойствах средней анизотропии и держа в уме цель — расширение анизотропийной теории, запишем аксиоматику анизотропийной теории в абстрактной форме, т. е. в таком виде, который не зависит от конкретной реализации в анизотропийной теории — от относительной энтропии:

- линейная динамика;
- бесконечный горизонт;
- отношение эквивалентности на множестве входных сигналов;
- индуцированная норма на подмножестве фактор-множества классов эквивалентности.

(1.3)

После процедуры абстрагирования аксиоматика в форме (1.3) превращается в аксиоматику абстрактной аксиоматической теории, и в таком виде она похожа на теорему Ляпунова об устойчивости: если существует положительно определенная функция Ляпунова, производная которой в силу системы меньше нуля, то система устойчива. Это теорема *существования* — она ничего не говорит о том, *как* построить функцию Ляпунова. Для того чтобы эта аксиоматика была конструктивной, она должна быть похожа, например, на первую теорему Нётер, которая не только утверждает, что каждой непрерывной группе симметрии физической системы соответствует некоторый инвариант — закон сохранения: однородности времени соответствует закон сохранения энергии, инвариантность относительно трансляций в пространстве приводит к закону сохранения импульса, калибровочной симметрии соответствует закон сохранения электрического заряда и т. д. Но теорема Нётер дает еще и конструктивный метод построения таких инвариантов: нужно взять инфинитезимальные операторы группы симметрии, вычислить соответствующие этим генераторам группы частные производные лагранжиана системы, скомбинировать их заданным способом и получить в итоге искомый инвариант движения.

Вот и в рассматриваемом случае декларативную аксиоматику нужно дополнить конструктивным способом реализации этих аксиом. Спрашивается — где искать? Далеко ходить не будем и обратимся к анизотропийной теории: нет ли там какой-либо подсказки. Оказывается, есть не просто подсказка, там есть прямое целеуказание! Процитируем [6, с. 37, 38]:

> *Пусть $V=\{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – дискретный m-мерный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей:*
>
> $$\mathbf{E}[v_k]=0, \quad \mathbf{E}[v_k v_k^T]=I_m, \quad -\infty<k<+\infty.$$
>
> *Рассмотрим m-мерную стационарную гауссовскую последовательность*
>
> $$W=\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}=G\otimes V,$$
>
> *получаемую из белого шума V посредством формирующего фильтра G с импульсной переходной характеристикой $g_k\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $k\geqslant 0$:*
>
> $$w_j=\sum_{k=0}^{+\infty} g_k v_{j-k}, \quad -\infty<j<+\infty.$$

Такой фильтр отождествляется со своей передаточной функцией

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^k,$$

которая предполагается лежащей в пространстве Харди $H_2^{m\times m}$.

Последовательность W *имеет нулевое математическое ожидание и спектральную плотность*

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,\widehat{G}(\omega)\,\widehat{G}^*(\omega), \quad \omega\in\Omega = [-\pi,\pi]. \tag{1.4}$$

В [5] *доказано, что средняя анизотропия последовательности* $W = G\otimes V$ *может быть определена как*

$$\mathbf{A}(W) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \ln\det\frac{m\,\widehat{G}(\omega)\,\widehat{G}^*(\omega)}{\|G\|_2^2}\,d\omega.$$

Согласно (1.4) среднюю анизотропию стационарной гауссовской последовательности можно определить и на языке формирующего фильтра, и на языке спектральной плотности — эти описания для стационарной гауссовской последовательности эквивалентны. Исторически сложилось так, что в анизотропийной теори используется формализм формирующего фильтра. Но для случайной последовательности с конечной l_2 или мощностной нормой язык формирующего фильтра не применим, остается лишь формализм спектральной плотности. Именно эта идея и будет использована в следующем разделе для исследования дискретной системы, на вход которой поступает произвольная стохастическая последовательность; речь идет не только о последовательностях с конечной l_2 или мощностной нормой, но и о последовательностях с произвольной скоростью роста.

2. Основы метода спектральной энтропии

Рассмотрим объект, который описывается линейной дискретной стационарной системой с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, & x_0 = 0,\\ z_k \quad\ = Cx_k + Dw_k, & k = 0,1,2,\ \ldots, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$, $x_k\in\mathbb{R}^n$ — вектор состояния объекта, $z_k\in\mathbb{R}^p$ — выход, $w_k\in\mathbb{R}^m$ — внешнее случайное возмущение. Предполагается, что система устойчива, управляема и наблюдаема.

Пусть на вход этой системы поступает случайная последовательность $W = \{w_k\}$, которая обладает асимптотикой

$$\sum_{k=-N}^{+N} \mathbf{E}\big[|w_k|^2\big] \underset{N\to\infty}{=} O\big(f(N)\big). \tag{2.2}$$

В частности, для сигнала с конечной l_2 нормой $f_{l_2}(N) = 1$, для последовательности с конечной мощностной нормой $f_{\mathcal{P}}(N) = N$ и т. д. Используем эту асимптотику и введем $\mathfrak{N}$ норму сигнала $W = \{w_k\}$:

$$\|W\|_{\mathfrak{N}}^2 = \mathfrak{N}(w_k^{\mathrm{T}} w_k) = \lim_{N\to\infty}\Big\{\frac{1}{f(N)}\sum_{k=-N}^{+N}\mathbf{E}\big[|w_k|^2\big]\Big\},$$

где $\mathfrak{N}$ — линейный оператор, который трансформирует евклидову норму вектора $|w_k|^2 = w_k^{\mathrm{T}} w_k$ в $\mathfrak{N}$ норму последовательности.

Оператор $\mathfrak{N}$ позволяет определить корреляционную свертку $K(l)$ входной последовательности: $K(l) = \mathfrak{N}(w_{k+l}\, w_k^{\mathrm{T}})$.

Выполним Фурье преобразование корреляционной свертки:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} K(l) \mathrm{e}^{-i\omega l}.$$

Матрица $S(\omega)$ — это матрица спектральной плотности последовательности $\{w_k\}$, и обратное преобразование Фурье позволяет стандартным способом выразить корреляционную свертку через матрицу спектральной плотности:

$$K(l) = \int_{-\pi}^{+\pi} S(\omega) \mathrm{e}^{i\omega l} d\omega.$$

Так как $\mathfrak{N}$ норма входной последовательности определяется по формуле $\|W\|_{\mathfrak{N}}^2 = \operatorname{tr} K(0)$, то ее можно описать через матрицу спектральной плотности $S(\omega)$:

$$\|W\|_{\mathfrak{N}}^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega.$$

Аналогично $\mathfrak{N}$ норму выхода Z находим по формуле $\|Z\|_{\mathfrak{N}}^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S_z(\omega)\, d\omega$, где спектральную плотность $S_z(\omega)$ выхода можно установить (см. [11]) через передаточную матрицу $F(z)$ системы (2.1) и спектральную плотность $S(\omega)$ входного сигнала:

$$S_z(\omega) = F(i\omega)\, S(\omega)\, F^*(i\omega).$$

Таким образом, $\mathfrak{N}$ норма выходной последовательности $Z = \{z_k\}$ вычисляется как

$$\|Z\|_{\mathfrak{N}}^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\big[\Lambda(\omega) S(\omega)\big]\, d\omega,$$

где $\Lambda(\omega) = F^*(i\omega)\, F(i\omega)$.

Определим коэффициент усиления Θ для системы (2.1) и входной последовательности $\{w_k\}$, которая удовлетворяет условию (2.2) как отношение $\mathfrak{N}$ нормы выхода Z к $\mathfrak{N}$ норме входа W:

$$\Theta^2 = \frac{\|Z\|_{\mathfrak{N}}^2}{\|W\|_{\mathfrak{N}}^2} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\big[\Lambda(\omega) S(\omega)\big]\, d\omega}{\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega}\,. \tag{2.3}$$

Теперь, следуя работе [8], введем интегральную характеристику входного сигнала — спектральную энтропию (σ-энтропию):

$$\mathfrak{S}(S) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \ln\det \frac{2\pi m S(\omega)}{\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega')\, d\omega'}\, d\omega \tag{2.4}$$

и определим σ-энтропийную норму $|\!|\!|F|\!|\!|_s^2$ системы (2.1) как максимум коэффициента усиления (2.3) по всем входным сигналам, спектральная энтропия (2.4) которых не превышает заданного значения s:

$$|\!|\!|F|\!|\!|_s^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S)\leqslant s} \Theta^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S)\leqslant s} \frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\bigl[\Lambda(\omega)S(\omega)\bigr]\,d\omega}{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\,d\omega}. \tag{2.5}$$

Теорема 1. *Для любого $s \geqslant 0$ σ-энтропийная норма* (2.5) *системы* (2.1)*, на вход которой поступает стохастический сигнал с конечной $\mathfrak{N}$ нормой, вычисляется в частотной области по формуле*

$$|\!|\!|F|\!|\!|_s^2 = \frac{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\bigl\{\Lambda(\omega)\bigl[I - q\Lambda(\omega)\bigr]^{-1}\bigr\}\,d\omega}{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\bigl[I - q\Lambda(\omega)\bigr]^{-1}d\omega}, \tag{2.6}$$

где параметр $q \in \bigl[0, \|F\|_\infty^{-2}\bigr)$ является единственным решением уравнения

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \ln\det \frac{2\pi m\bigl[I - q\Lambda(\omega)\bigr]^{-1}}{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{tr}\bigl[I - q\Lambda(\omega')\bigr]^{-1}d\omega'}\,d\omega = s. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы следует схеме и логике доказательства теоремы 4 работы [8, Theorem 4].

Прежде чем доказывать теорему о σ-энтропийной норме линейной стационарной стохастической системы с дискретным временем в пространстве состояний, сформулируем две леммы: лемму 1 — об изометрии дискретной системы (известна из литературы [12; 13]) и лемму 2, доказательство которой будет дано ниже.

Лемма 1 [12; 13]. *Пусть* $\Upsilon = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \in RH^\infty$ *и* X *— грамиан наблюдаемости системы* Υ*. Система* Υ *изометрична в том и только в том случае, если выполняются следующие три условия:*

$$\begin{aligned} A^{\mathrm T}XA - X + C^{\mathrm T}C &= 0,\\ B^{\mathrm T}XA + D^{\mathrm T}C &= 0,\\ B^{\mathrm T}XB + D^{\mathrm T}D &= I. \end{aligned}$$

Лемма 2. *Пусть* $F(z) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ *— передаточная матрица дискретной системы F и* $0 \leqslant q < \|F\|_\infty^{-2}$*. Тогда матрица*

$$G(z) = \left[\begin{array}{c|c} A + BL & BM^{1/2} \\ \hline L & M^{1/2} \end{array}\right]$$

факторизует матрицу $S_\star(\omega) = \bigl[I - qF^*(i\omega)\,F(i\omega)\bigr]^{-1}$ *в форме*

$$S_\star(\omega) = G(i\omega)\,G^*(i\omega), \tag{2.8}$$

а матрицы L *и* M *соответствуют допустимому решению* R *уравнения Риккати*

$$R = A^{\mathrm{T}}RA + q\,C^{\mathrm{T}}C + L^{\mathrm{T}}M^{-1}L, \tag{2.9}$$

$$L = M\bigl(B^{\mathrm{T}}RA + qD^{\mathrm{T}}C\bigr), \tag{2.10}$$

$$M = \bigl(I - B^{\mathrm{T}}RB - qD^{\mathrm{T}}D\bigr)^{-1}. \tag{2.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие $0 \leqslant q < \|F\|_\infty^{-2}$ означает, что $I - qF^*(i\omega)F(i\omega) > 0$ для $\forall\omega \in \mathbb{R}^1$.

Положительная определенность матрицы $I - qF^*(i\omega)F(i\omega)$ и обратной ей матрицы гарантирует существование факторизации матрицы $S_\star(\omega)$ в форме $S_\star(\omega) = G(i\omega)\,G^*(i\omega)$. Следовательно, уравнение (2.8) можно переписать в виде $G^{-*}(i\omega)\,G^{-1}(i\omega) = I - qF^*(i\omega)\,F(i\omega)$, где $G^{-*} = \bigl(G^*\bigr)^{-1}$. Обозначим $\Upsilon(i\omega) = \begin{bmatrix}\sqrt{q}\,F(i\omega)\\ G^{-1}(i\omega)\end{bmatrix}$, тогда в соответствии с последним уравнением $\Upsilon^*(i\omega)\,\Upsilon(i\omega) = I$, т. е. матрица $\Upsilon(i\omega)$ является изометричной.

Выберем матрицу G в виде

$$G = \left[\begin{array}{c|c} A + BL & BM^{1/2} \\ \hline L & M^{1/2}\end{array}\right],$$

где L и $M = M^{\mathrm{T}} > 0$ — произвольные матрицы соответствующей размерности. Прямым вычислением можно показать, что обратная матрица G^{-1} определяется как

$$G^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -M^{-1/2}L & M^{-1/2}\end{array}\right].$$

Матрицу $\Upsilon(s)$ естественно рассматривать как передаточную матрицу системы, состоящую из двух параллельных подсистем $F(s)$ и $G^{-1}(s)$, и тогда эта передаточная матрица будет вычисляться по формуле [14, с. 529]:

$$\Upsilon(s) = \begin{bmatrix}\sqrt{q}\,F(s)\\ G^{-1}(s)\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & A & B \\ \hline \sqrt{q}\,C & 0 & \sqrt{q}\,D \\ 0 & -M^{-1/2}L & M^{-1/2}\end{array}\right].$$

Так как динамические части двух подсистем идентичны, то реализация матрицы Υ в пространстве состояний будет иметь следующий вид:

$$\Upsilon = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \sqrt{q}\,C & \sqrt{q}\,D \\ -M^{-1/2}L & M^{-1/2}\end{array}\right].$$

Применим лемму 1 к системе Υ и получим уравнение Риккати (2.9, 2.10, 2.11). Итак, матрица G факторизует матрицу $S_\star(\omega) = \bigl[I - qF^*(i\omega)\,F(i\omega)\bigr]^{-1}$, а матрицы L и M соответствуют допустимому решению R уравнения Риккати (2.9)–(2.11).

Теорема 2. *В пространстве состояний σ-энтропийная норма системы* (2.1)*, на вход которой поступает стохастический дискретный сигнал с конечной $\mathfrak{N}$ нормой, вычисляется по формуле*

$$|\!|\!|F|\!|\!|_s^2 = \frac{1}{q}\Bigl\{1 - \frac{m}{\mathrm{tr}\bigl(LPL^{\mathrm{T}} + M\bigr)}\Bigr\}, \tag{2.12}$$

где грамиан P является решением уравнения Ляпунова

$$P = \big(A + BL\big)P\big(A + BL\big)^{\mathrm{T}} + BMB^{\mathrm{T}}, \tag{2.13}$$

а матрицы L и M соответствуют допустимому решению R уравнения Риккати

$$R = A^{\mathrm{T}}RA + q\,C^{\mathrm{T}}C + L^{\mathrm{T}}M^{-1}L, \tag{2.14}$$

$$L = M\big(B^{\mathrm{T}}RA + qD^{\mathrm{T}}C\big), \tag{2.15}$$

$$M = \big(I - B^{\mathrm{T}}RB - qD^{\mathrm{T}}D\big)^{-1} \tag{2.16}$$

и лог-детерминантного уравнения

$$-\ln\det\frac{mM}{\mathrm{tr}\big(LPL^{T} + M\big)} = s. \tag{2.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем σ-энтропийную норму (2.6) следующим образом:

$$\begin{aligned}
|\!|\!| F |\!|\!|_s^2 &= \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{q}\big[I - (I - q\Lambda(\omega))\big]\big[I - q\Lambda(\omega)\big]^{-1}\right\} d\omega}{\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{tr}\big[I - q\Lambda(\omega)\big]^{-1} d\omega} \\
&= \frac{1}{q} - \frac{2\pi m}{q}\,\frac{1}{\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{tr}\big[I - qF^*(i\omega)\,F(i\omega)\big]^{-1} d\omega}\,.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Применим лемму 2 к знаменателю уравнения (2.18):

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{tr}\big[I - qF^*(i\omega)\,F(i\omega)\big]^{-1} d\omega = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{tr}\,G^*(i\omega)\,G(i\omega)d\omega; \tag{2.19}$$

здесь $F = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ и $G = \left[\begin{array}{c|c} A + BL & BM^{1/2} \\ \hline L & M^{1/2} \end{array}\right]$, а матрицы L и M соответствуют допустимому решению R уравнения Риккати (2.14)–(2.16). Интеграл в правой части уравнения (2.19) с точностью до множителя 2π равен $\mathcal{H}_2$ норме матрицы G:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{tr}\,G^*(i\omega)\,G(i\omega)d\omega = 2\pi\big\|G\big\|_2^2 = 2\pi\,\mathrm{tr}\big(LPL^{\mathrm{T}} + M\big), \tag{2.20}$$

где матрица P — это грамиан управляемости, который удовлетворяет уравнению Ляпунова (2.13): $P = (A + BL)P(A + BL)^{\mathrm{T}} + BMB^{\mathrm{T}}$.

Подставим (2.19), (2.20) в уравнение (2.18) и получим формулу (2.12) для σ-энтропийной нормы $|\!|\!| F |\!|\!|_s$ в пространстве состояний:

$$|\!|\!| F |\!|\!|_s^2 = \frac{1}{q}\Big\{1 - \frac{m}{\mathrm{tr}\big(LPL^{\mathrm{T}} + M\big)}\Big\},$$

Теперь рассмотрим уравнение (2.7) и преобразуем интеграл в его левой части:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \ln\det\frac{2\pi m\big[I - q\Lambda(\omega)\big]^{-1}}{\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{tr}\big[I - q\Lambda(\omega')\big]^{-1} d\omega'}\,d\omega = 2\pi m\ln\frac{2\pi m}{\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{tr}\big[I - q\Lambda(\omega')\big]^{-1} d\omega'} + \int_{-\pi}^{+\pi} \ln\det\big[I - q\Lambda(\omega)\big]^{-1} d\omega.$$

Интеграл в знаменателе первого слагаемого согласно уравнениям (2.19) и (2.20) находим как $\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{tr}\big[I - q\Lambda(\omega')\big]^{-1} d\omega' = 2\pi\, \mathrm{tr}\big(LPL^{\mathrm{T}} + M\big)$, второе слагаемое в правой части согласно [5] равно $2\pi \ln\det M$, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln\det \frac{2\pi m\big[I - q\Lambda(\omega)\big]^{-1}}{\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{tr}\big[I - q\Lambda(\omega')\big]^{-1} d\omega'}\, d\omega = \ln\det\frac{mM}{\mathrm{tr}\big(LPL^{T} + M\big)},$$

и тогда лог-детерминантное уравнение (2.7) превращается в уравнение (2.17):

$$-\ln\det\frac{mM}{\mathrm{tr}\big(LPL^{T} + M\big)} = s,$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Калман Р.Э.** Об общей теории систем управления // Тр. Междунар. конгресса ИФАК. М.: АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521–547.
2. **Летов А.М.** Аналитическое конструирование регуляторов I–IV // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, № 4. С. 436–441; Т. 21, № 5. С. 561–568; Т. 21, № 6. С. 661–665. 1961. Т. 22, № 4. С. 425–435.
3. **Zames G.** Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Trans. Autom. Control. 1981. Vol. 26, no. 2. P. 301–320. doi: 10.1109/TAC.1981.1102603 .
4. **Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.** Stochastic approach to $\mathcal{H}_\infty$-optimization // Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control (Florida USA). 1994. NY: IEEE, 1994. P. 2249–2250. doi: 10.1109/CDC.1994.411485 .
5. **Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.** Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Докл. АН СССР. 1995. Т. 342, № 5. С. 583–585.
6. **Курдюков А.П., Андрианова О.Г., Белов А.А., Гольдин Д.А.** Между $LQG/\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ теориями управления // Автоматика и телемеханика. 2021. № 4. С. 8–76. doi: 10.31857.S0005231021040024 .
7. **Boichenko V.A., Belov A.A.** On σ-entropy analysis of linear stochastic systems in state space // System Theory, Control Comput. J. 2021. Vol. 1, no. 1. P. 30–35. doi: 10.52846/stccj.2021.1.1.8 .
8. **Kurdyukov A.P., Boichenko V.A.** The spectral method of the analysis of linear control systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Science. 2019. Vol. 29, no. 4. P. 667–679. doi: 10.2478/amcs-2019-0049 .
9. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 408 с.
10. **Мальцев А.И.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
11. **Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J.** Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives I: Robust performance analysis // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. Vol. 39, no. 8. P. 1564–1574. doi: 10.1109/9.310030 .
12. **Gu D.-W., Tsai M.C., O'Young S.D., Postlethwaite I.** State-space formulae for discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ optimization // Int. J. Contr. 1989. Vol. 49, no. 5. P. 1683–1723. doi: 10.1080/00207178908559734 .
13. **Tsai M.C.** On discrete spectral factorizations — A unify approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1993. Vol. 38, no. 10. P. 1563–1567. doi: 10.1109/9.241578 .
14. **Bernstein D.S.** Matrix mathematics. New Jersey: Princeton University Press, 2005. 726 p.

Поступила 1.06.2022
После доработки 17.06.2022
Принята к публикации 20.06.2022

Бойченко Виктор Александрович
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
г. Москва
e-mail: v.boichenko@gmail.com

REFERENCES

1. Kalman R.E. On the general theory of control systems. *Proceedings of the first IFAC Congress, Moscow, 1960, vol. 1.* London: Butterworths, 1961, pp. 481–492.
2. Letov A.M. Analytical design of controllers I–IV. *Avtomat. i Telemekh.*, 1960, vol. 21, no. 4, pp. 436–441; vol. 21, no. 5, pp. 561–568; vol. 21, no. 6, pp. 661–665; 1961, vol. 22, no. 4, pp. 425–435 (in Russian).
3. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1981, vol. 26, no. 2, pp. 301–320. doi: 10.1109/TAC.1981.1102603 .
4. Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P. Stochastic approach to $\mathcal{H}_\infty$-optimization. In: *Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Florida (USA)*, vol. 3. NY: IEEE, 1994, pp. 2249–2250. doi: 10.1109/CDC.1994.411485 .
5. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semenov A.V. Anisotropy of signals and entropy of linear stationary systems. *Dokl. Math.*, 1995, vol. 51, no. 3, pp. 388–390.
6. Kurdyukov A.P., Andrianova O.G., Belov A.A., Gol'din D.A. Between the $LQG/\mathcal{H}_2$- and $\mathcal{H}_\infty$-control theories. *Autom. Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 4, pp. 565–618. doi: 10.1134/S0005117921040019 .
7. Boichenko V.A., Belov A.A. On σ-entropy analysis of linear stochastic systems in state space. *Syst. Theor. Control Comput. J.*, 2021, vol. 1, no. 1, pp. 30–35. doi: 10.52846/stccj.2021.1.1.8 .
8. Kurdyukov A.P., Boichenko V.A. The spectral method of the analysis of linear control systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Science*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 667–679. doi: 10.2478/amcs-2019-0049 .
9. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [Theory of stochastic processes]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 408 p. ISBN: 5-9221-0335-0 .
10. Mal'cev A.I. *Algebraic systems.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1973, 320 p. doi: 10.1007/978-3-642-65374-2 . Original Russian text published in Mal'tsev A.I. *Algebraicheskie sistemy*, Moscow: Nauka Publ., 1970, 392 p.
11. Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives I: Robust performance analysis. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, vol. 39, no. 8, pp. 1564–1574. doi: 10.1109/9.310030 .
12. Gu D.-W., Tsai M.C., O'Young S.D., Postlethwaite I. State-space formulae for discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ optimization. *Int. J. Contr.*, 1989, vol. 49, no. 5, pp. 1683–1723. doi: 10.1080/00207178908559734 .
13. Tsai M. On discrete spectral factorizations – a unified approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1993, vol. 38, no. 10, pp. 1563–1567. doi: 10.1109/9.241578 .
14. Bernstein D.S. *Matrix mathematics.* New Jersey: Princeton University Press, 2005, 726 p. ISBN: 0691118027 .

Received June 1, 2022
Revised June 17, 2022
Accepted June 20, 2022

Victor Aleksandrovich Boichenko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997 Russia, e-mail: v.boichenko@gmail.com .

Cite this article as: V. A. Boichenko. Anisotropy and spectral entropy: Axiomatic approach. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 53–65.