ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.977: 534.112

# ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ

**В. Р. Барсегян**

Для уравнения колебания струны с заданными начальным и конечным условиями рассматриваются задачи граничного управления и оптимального управления с заданными различными многоточечными промежуточными условиями на значения функций прогиба и скоростей точек струны. Управление осуществляется как смещением одного конца при закрепленном другом конце, так и смещением двух концов. Критерий качества задан на всем промежутке времени. Методом разделения переменных задача сводится к задаче управления и оптимального управления обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Для всех задач по единой схеме с использованием методов теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями предложен конструктивный подход построения функций граничного управления и оптимального управления колебаниями струны, обеспечивающий выполнение многоточечных промежуточных условий.

Ключевые слова: колебания струны, граничное управление, управление колебаниями, оптимальное управление колебаниями, многоточечные промежуточные условия.

**V. R. Barseghyan. Problems of boundary control and optimal control of string vibrations with multipoint intermediate conditions on the state functions.**

For the vibrating string equation with given initial and final conditions, the problems of boundary control and optimal control with given various multipoint intermediate conditions on the values of the deflection function and on the velocities of points of the string are considered. The control is performed both by displacement of one end with the other end fixed and by displacement at the two ends. The quality criterion is given for the whole time interval. Using the method of separation of variables, the problem is reduced to the problem of control and optimal control of ordinary differential equations with given initial, final, and unseparated multipoint intermediate conditions. For all problems according to a single scheme using methods of control theory of finite-dimensional systems with multipoint intermediate conditions, a constructive approach is proposed for finding functions of boundary control and optimal control of string vibrations that ensure the fulfillment of multipoint intermediate conditions.

Keywords: string vibrations, boundary control, vibration control, optimal control of vibrations, multipoint intermediate conditions.

**MSC:** 70Q05, 93C20, 93C40

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-38-52

## Введение

Задачи управления и оптимального управления колебательными процессами как с распределенными, так и с граничными воздействиями имеют значительный теоретический интерес и возрастающее практическое значение. Их изучению посвящены многие исследования, в частности [1–14], предложены различные методы решения задач управления и оптимального управления с использованием методов моментов, Фурье и Даламбера. Среди множества задач управления упругими колебаниями на практике часто возникают задачи граничного управления и оптимального управления, когда нужно генерировать колебания с заранее заданными (желаемыми) промежуточными параметрами: формой прогиба, скоростью точек струны и т. д. Моделирование и управление (оптимальное управление) динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с частными производными с многоточечными промежуточными условиями, — активно развиваемое направление в современной теории управления. Характерной чертой таких задач является наличие наряду с заданными начальным и конечным условиями заданных промежуточных условий в нескольких точках интервала исследования. Анализ такого рода задач представлен, например, в работах [9–17]. В настоящей статье для уравнения колебания струны с заданными начальным, конечным условиями и с заданными различными многоточечными промежуточными условиями на значения функций прогиба, скоростей точек струны в разные промежуточные моменты времени рассматриваются задачи граничного управления и оптимального управления. В задачах оптимального управления критериями качества являются функционалы от квадрата функций смещения, заданных на всем промежутке времени. Предполагается, что все функции такие, что выполняются соответствующие условия согласования и обеспечивается существование классических решений [9–14]. Поскольку во всех задачах в отдельные промежуточные моменты времени заданы (в любой очередности) или только значения функции прогиба, или только значения производной функции прогиба (значения скоростей точек) струны, то использовать подход поэтапного исследования задач управления или оптимального управления нецелесообразно. Поэтому в работе представлен такой подход решения рассматриваемых задач управления, который учитывает специфику многоточечных промежуточных условий. Для всех задач по единой схеме предложен конструктивный подход построения функции граничного управления и оптимального управления колебаниями струны, обеспечивающих выполнение многоточечных промежуточных условии. Схема построения заключается в следующем: исходные задачи с неоднородными граничными условиями сводятся к соответствующим задачам управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее на основе метода разделения переменных и методов управления и оптимального управления конечномерными промежуточными условиями [1;2;9–14;17–19] для произвольного числа первых гармоник построены граничные управления и оптимальные граничные управления.

## 1. Постановки задач

Пусть колебания струны описываются функцией $Q\,(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

с начальными и конечными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1.2}$$

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad \le x \le l, \tag{1.3}$$

и граничными условиями

$$Q(0,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.4}$$

$$Q(0,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{1.5}$$

Здесь функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — граничные управления, $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, где $T_0$ — натяжение, а $\rho$ — плотность струны.

Пусть в промежуточные моменты времени $t_k$ $(k = 1, \ldots, m)$

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T, \tag{1.6}$$

$$Q(x,t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \le x \le l, \quad i = 1 \ldots, m, \tag{1.7}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad 0 \le x \le l, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} &Q(x,t_i)=\varphi_i(x), \quad 0\le x\le l, \quad i=2\alpha-1, \quad \alpha=1,\ldots,\frac{m}{2}, \\ &\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_j}=\psi_j(x), \quad 0\le x\le l, \quad j=2\alpha, \quad \alpha=1,\ldots,\frac{m}{2}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

$m$ — четное число.

Отметим, что промежуточные значения функции прогиба и значения скоростей точек струны в условии (1.9) можно задавать в любой очередности.

Заданы следующие функционалы:

$$\left[\int_0^T \mu^2(t)dt\right]^{1/2}, \tag{1.10}$$

$$\left[\int_0^T \left(\mu^2(t)+\nu^2(t)\right)dt\right]^{1/2}. \tag{1.11}$$

Предполагается, что функция $Q\,(x,t)\in C^2(\Omega_T)$, где множество $\Omega_T=\{(x,t): x\in[0,l]\,,\ t\in[0,T]\}$, а функция $\varphi_i(x)\in C^2[0,l]$ и функция $\psi_j(x)\in C^1[0,l]$. Кроме того, предполагается, что все функции такие, что выполняются условия согласования

$$\mu(0)=\varphi_0(0),\ \dot\mu(0)=\psi_0(0), \quad \nu(0)=\varphi_0(l), \quad \dot\nu(0)=\psi_0(l), \tag{1.12}$$

$$\mu(t_i)=\varphi_i(0), \quad \dot\mu(t_j)=\psi_j(0), \quad \nu(t_i)=\varphi_i(l), \quad \dot\nu(t_j)=\psi_j(l), \tag{1.13}$$

$$i=2\alpha-1, \quad j=2\alpha, \quad \alpha=1,\ldots,\frac{m}{2},$$

$$\mu(T)=\varphi_T(0), \quad \dot\mu(T)=\psi_T(0), \quad \nu(T)=\varphi_T(l), \quad \dot\nu(T)=\psi_T(l). \tag{1.14}$$

Для уравнения (1.1) с начальными (1.2) и конечными (1.3) условиями на промежутке времени $[0,T]$ (1.6) рассматриваются задачи граничного управления и оптимального управления с заданными различными условиями на значения функций прогиба, скоростей точек струны в разные промежуточные моменты времени и критерии качества, которые ставятся следующим образом.

Сформулируем задачи **1A, 1B, 1C** граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце.

Требуется найти граничное управление $\mu(t)$, $0\le t\le T$, которое переводит колебательное движение, описываемое уравнением (1.1) с граничными условиями (1.4), из заданного начального состояния (1.2) в конечное состояние (1.3), обеспечивая выполнение заданных значений, а именно:

A) функции прогиба в промежуточные моменты времени (1.7);
B) скоростей точек струны в промежуточные моменты времени (1.8);
C) функции прогиба и скоростей точек струны в разные промежуточные моменты времени (1.9).

Сформулируем задачи **2A, 2B, 2C** граничного управления колебаниями струны смещением двух концов.

Требуется найти граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0\le t\le T$, которые переводят колебательное движение, описываемое уравнением (1.1) с граничными условиями (1.5), из заданного начального состояния (1.2) в конечное состояние (1.3), обеспечивая выполнение заданных значений, а именно:

A) функции прогиба в промежуточные моменты времени (1.7);
B) скоростей точек струны в промежуточные моменты времени (1.8);

C) функции прогиба и скоростей точек струны в разные промежуточные моменты времени (1.9).

Сформулируем задачи $\mathbf{1^0A}$, $\mathbf{1^0B}$, $\mathbf{1^0C}$ оптимального управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце.

Требуется найти оптимальное граничное управление $\mu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, которое переводит колебательное движение, описываемое уравнением (1.1) с граничными условиями (1.4), из заданного начального состояния (1.2) в конечное состояние (1.3), обеспечивая выполнение следующих заданных значений:

A) функции прогиба в промежуточные моменты времени (1.7);
B) скоростей точек струны в промежуточные моменты времени (1.8);
C) функции прогиба и скоростей точек струны в разные промежуточные моменты времени (1.9),

и которое минимизирует функционал (1.10).

Сформулируем задачи $\mathbf{2^0A}$, $\mathbf{2^0B}$, $\mathbf{2^0C}$ оптимального управления колебаниями струны смещением двух концов.

Требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, которые переводят колебательное движение, описываемое уравнением (1.1) с граничными условиями (1.5) из заданного начального состояния (1.2) в конечное состояние (1.3), обеспечивая выполнение следующих заданных значений:

A) функции прогиба в промежуточные моменты времени (1.7);
B) скоростей точек струны в промежуточные моменты времени (1.8);
C) функции прогиба и скоростей точек струны в разные промежуточные моменты времени (1.9),

и которые минимизируют функционал (1.11).

В работе предлагается конструктивный подход решения рассматриваемых задач управления и оптимального управления, в которых учитывается специфика промежуточных условий.

Схема построения решения поставленных задач заключается в следующем.

- Задачи сводятся к задачам управления с распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями.
- С использованием метода разделения переменных полученные задачи сводятся к задачам управления и оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и многоточечными промежуточными условиями.
- На основе методов теории управления и оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями для произвольного числа первых $n$ гармоник строятся граничные управления и оптимальные граничные управления, которые представляются в явном аналитическом виде.

## 2. Сведение исходных задач к задачам с нулевыми граничными условиями

Поставленные с неоднородными граничными условиями задачи сводим к задачам с нулевыми граничными условиями.

### 2.1. Сведение неоднородных граничных условий к нулевым граничным условиям

Решение уравнения (1.1) ищем по формуле

$$Q(x,t) = V(x,t) + W(x,t), \tag{2.1}$$

где $V(x,t)$ — неизвестная функция с граничными условиями

$$V(0,t) = V(l,t) = 0. \tag{2.2}$$

При граничных условиях (1.4) ($Q(0,t) = \mu(t)$, $Q(l,t) = 0$) будем иметь

$$W(0,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = 0. \tag{2.3}$$

При граничных условиях (1.5) ($Q(0,t) = \mu(t)$, $Q(l,t) = \nu(t)$) имеем

$$W(0,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = \nu(t). \tag{2.4}$$

Функция $W(x,t)$ для граничных условий (2.3) и (2.4) представляется в виде

$$W(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu(t), \tag{2.5}$$

$$W(x,t) = (\nu(t) - \mu(t))\frac{x}{l} + \mu(t). \tag{2.6}$$

Для определения функции $V(x,t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{2.7}$$

где для функции $W(x,t)$ вида (2.5)

$$F(x,t) = \left(\frac{x}{l} - 1\right)\ddot{\mu}(t), \tag{2.8}$$

а для функции $W(x,t)$, заданной формулой (2.6),

$$F(x,t) = (\ddot{\mu}(t) - \ddot{\nu}(t))\frac{x}{l} - \ddot{\mu}(t). \tag{2.9}$$

### 2.2. Сведение начальных, промежуточных и конечных условий к соответствующим условиям для неоднородного уравнения

Учитывая выражения для функции $W(x,t)$ (2.5), (2.6) и условия согласования (1.12)–(1.14) из начальных (1.2), промежуточных (1.7)–(1.9) и конечных условий (1.3), находим соответствующие условия для функции $V(x,t)$.

Для задач граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце для функции $V(x,t)$ получим следующие условия:

∘ начальные

$$V(x,0) = \varphi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\varphi_0(0), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\psi_0(0); \tag{2.10}$$

∘ промежуточные

$$V(x,t_i) = \varphi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\varphi_i(0), \quad i = 1,\dots,m, \tag{2.11}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\psi_j(0), \quad j = 1,\dots,m, \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} V(x,t_i) = \varphi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\varphi_i(0), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2}, \\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\psi_j(0), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2}; \end{gathered} \tag{2.13}$$

∘ конечные

$$V\left(x,T\right)=\varphi_T\left(x\right)+\left(\frac{x}{l}-1\right)\varphi_T\left(0\right),\quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T}=\psi_T\left(x\right)+\left(\frac{x}{l}-1\right)\psi_T\left(0\right). \tag{2.14}$$

Для задач граничного управления колебаниями струны смещением двух концов для функции $V(x,t)$ имеем следующие условия:

∘ начальные

$$V(x,0)=\varphi_0(x)-(\varphi_0(l)-\varphi_0(0)\frac{x}{l}-\varphi_0(0),\quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_0(x)-(\psi_0(l)-\psi_0(0)\frac{x}{l}-\psi_0(0); \tag{2.15}$$

∘ промежуточные

$$V(x,t_i)=\varphi_i(x)-(\varphi_i(l)-\varphi_i(0)\frac{x}{l}-\varphi_i(0),\quad i=1,\ldots,m, \tag{2.16}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_j}=\psi_j(x)-(\psi_j(l)-\psi_j(0)\frac{x}{l}-\psi_j(0),\quad j=1,\ldots,m, \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered}V(x,t_i)=\varphi_i(x)-(\varphi_i(l)-\varphi_i(0))\frac{x}{l}-\varphi_i(0),\quad i=2\alpha-1,\quad \alpha=1,\ldots,\frac{m}{2},\\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_j}=\psi_j(x)-(\psi_j(l)-\psi_j(0)\frac{x}{l}-\psi_j(0),\quad j=2\alpha,\quad \alpha=1,\ldots,\frac{m}{2};\end{gathered} \tag{2.18}$$

∘ конечные

$$V(x,T)=\varphi_T(x)-(\varphi_T(l)-\varphi_T(0))\frac{x}{l}-\varphi_T(0),\quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T}=\psi_T(x)-(\psi_T(l)-\psi_T(0))\frac{x}{l}-\psi_T(0). \tag{2.19}$$

Таким образом, получили следующие задачи управления и оптимального управления для неоднородного уравнения (2.7) с нулевыми граничными условиями.

**Задачи управления с нулевыми граничными условиями.** Требуется найти граничное управление $\mu(t)$, $0\le t\le T$, которое переводит колебательное движение, описываемое уравнением (2.7), (2.8) с граничными условиями (2.2), из заданного начального состояния (2.10) в конечное состояние (2.14), обеспечивая выполнение промежуточных условий, а именно:

A) (2.11); B) (2.12); C) (2.13).

Требуется найти граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0\le t\le T$, которые переводят колебательное движение, описываемое уравнением (2.7), (2.9) с граничными условиями (2.2), из заданного начального состояния (2.15) в конечное состояние (2.19), обеспечивая выполнение промежуточных условий, а именно:

A) (2.16); B) (2.17); C) (2.18).

**Задачи оптимального управления с нулевыми граничными условиями.** Требуется найти оптимальное граничное управление $\mu^0(t)$, $0\le t\le T$, которое переводит колебательное движение, описываемое уравнением (2.7), (2.8) с граничными условиями (2.2), из заданного начального состояния (2.10) в конечное состояние (2.14), обеспечивая выполнение следующих промежуточных условий:

A) (2.11); B) (2.12); C) (2.13),

и которое минимизирует функционал (1.10).

Требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0\le t\le T$, которые переводят колебательное движение, описываемое уравнением (2.7), (2.9) с граничными условиями (2.2), из заданного начального состояния (2.15) в конечное состояние (2.19), обеспечивая выполнение следующих промежуточных условий:

A) (2.16); B) (2.17); C) (2.18),

и которые минимизируют функционал (1.11).

## 3. Решение задачи. Применение метода разделения переменных

Решение уравнения (2.7) будем искать в виде

$$V(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}V_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{3.1}$$

Представим функции $F(x,t)$, $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ в виде рядов Фурье и, подставив их значения вместе с $V(x,t)$ в уравнения (2.7)–(2.9) и в условия (2.10)–(2.19), получим

$$\ddot V_k(t)+\lambda_k^2V_k(t)=F_k(t),\quad \lambda_k^2=\Big(\frac{a\pi k}{l}\Big)^2,\quad k=1,2,\ldots, \tag{3.2}$$

$$F_k(t)=-\frac{2a}{\lambda_k l}\ddot\mu(t), \tag{3.3}$$

$$F_k(t)=\frac{2a}{\lambda_k l}\big[\ddot\nu(t)(-1)^k-\ddot\mu(t)\big], \tag{3.4}$$

Для задач смещения левого конца при закрепленном правом конце начальные промежуточные и конечные условия находим по формулам

$$V_k(0)=\varphi_k^{(0)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\varphi_0(0),\quad \dot V_k(0)=\psi_k^{(0)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\psi_0(0), \tag{3.5}$$

$$V_k(t_i)=\varphi_k^{(i)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\varphi_i(0),\quad i=1,\ldots,m, \tag{3.6}$$

$$\dot V_k(t_j)=\psi_k^{(j)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\psi_j(0),\quad j=1,\ldots,m, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}V_k(t_i)&=\varphi_k^{(i)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\varphi_i(0),\quad i=2\alpha-1,\quad \alpha=1,\ldots,\frac{m}{2},\\ \dot V_k(t_j)&=\psi_k^{(j)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\psi_j(0),\quad j=2\alpha,\quad \alpha=1,\ldots,\frac{m}{2},\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$V_k(T)=\varphi_k^{(T)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\varphi_T(0),\quad \dot V_k(T)=\psi_k^{(T)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\psi_T(0). \tag{3.9}$$

Здесь $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ и $\psi_k^{(j)}$ — коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $F(x,t)$, $\varphi_i(x)$, $\psi_j(x)$.

Для задач смещения двух концов начальные, промежуточные и конечные условия представим следующим образом:

$$V_k(0)=\varphi_k^{(0)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\big[\varphi_0(0)-\varphi_0(l)(-1)^k\big],\quad \dot V_k(0)=\psi_k^{(0)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\big[\psi_0(0)-\psi_0(l)(-1)^k\big], \tag{3.10}$$

$$V_k(t_i)=\varphi_k^{(i)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\big[\varphi_i(0)-\varphi_i(l)(-1)^k\big],\quad i=1,\ldots,m, \tag{3.11}$$

$$\dot V_k(t_j)=\psi_k^{(j)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\big[\psi_j(0)-\psi_j(l)(-1)^k\big],\quad j=1,\ldots,m, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}V_k(t_i)&=\varphi_k^{(i)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\big[\varphi_i(0)-\varphi_i(l)(-1)^k\big],\quad i=2\alpha-1,\quad \alpha=1,\ldots,\frac{m}{2},\\ \dot V_k(t_j)&=\psi_k^{(j)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\big[\psi_j(0)-\psi_j(l)(-1)^k\big],\quad j=2\alpha,\quad \alpha=1,\ldots,\frac{m}{2},\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$V_k(T)=\varphi_k^{(T)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\big[\varphi_T(0)l-\varphi_T(l)(-1)^k\big],\quad \dot V_k(T)=\psi_k^{(T)}-\frac{2a}{\lambda_k l}\big[\psi_T(0)-\psi_T(l)(-1)^k\big]. \tag{3.14}$$

Общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$V_k(t) = V_k(0)\cos\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau. \tag{3.15}$$

Учитывая начальные (3.5), промежуточные (3.6)–(3.8) и конечные (3.9) условия, из (3.15) получим, что функции $F_k(\tau)$ для каждого $k$ должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\int\limits_0^T F_k(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau = \tilde{C}_{1k}(T), \quad \int\limits_0^T F_k(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = \tilde{C}_{2k}(T), \tag{3.16}$$

$$\int\limits_0^{t_i} F_k(\tau)\sin\lambda_k(t_i-\tau)\,d\tau = \tilde{C}_{1k}(t_i), \quad i = 1,\ldots,m, \tag{3.17}$$

$$\int\limits_0^{t_j} F_k(\tau)\sin\lambda_k(t_j-\tau)\,d\tau = \tilde{C}_{2k}(t_j), \quad j = 1,\ldots,m, \tag{3.18}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{t_i} F_k(\tau)\sin\lambda_k(t_i-\tau)\,d\tau = \tilde{C}_{1k}(t_i), \quad i = 2\alpha-1, \quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2},\\ \int\limits_0^{t_j} F_k(\tau)\sin\lambda_k(t_j-\tau)\,d\tau = \tilde{C}_{2k}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}.\end{gathered} \tag{3.19}$$

Отметим, что задачам управления и оптимального управления с условиями A) соответствуют интегральные соотношения (3.16) и (3.17), задачам с условиями B) — соотношения (3.16) и (3.18), а задачам с условиями C) — соотношения (3.16), (3.19).

Введем обозначения

$$\begin{gathered}\tilde{C}_{1k}(T) = \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k T,\\ \tilde{C}_{2k}(T) = \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k T.\end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\tilde{C}_{1k}(t_i) = \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k t_i - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t_i, \quad i = 1,\ldots,m. \tag{3.21}$$

$$\tilde{C}_{2k}(t_j) = \dot{V}_k(t_j) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t_j - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k t_j, \quad j = 1,\ldots,m. \tag{3.22}$$

$$\begin{gathered}\tilde{C}_{1k}(t_i) = \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k t_i - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t_i, \quad i = 2\alpha-1, \quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2},\\ \tilde{C}_{2k}(t_j) = \dot{V}_k(t_j) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t_j - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k t_j, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}.\end{gathered} \tag{3.23}$$

### 3.1. Построение решения задач граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце

Подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (3.3) в соотношения (3.16)–(3.19) и интегрируя по частям с учетом условий согласования (1.12)–(1.14), выводим из (3.16) соотношения

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}(T), \quad \int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{2k}(T), \tag{3.24}$$

а из (3.17)–(3.19) соответственно соотношения

$$\int_0^T \mu(\tau)h_{1k}^{(1)}(\tau)\,d\tau = C_{1k}(t_1),\ \ldots,\quad \int_0^T \mu(\tau)h_{1k}^{(m)}(\tau)\,d\tau = C_{1k}(t_m), \tag{3.25}$$

$$\int_0^T \mu(\tau)h_{2k}^{(1)}(\tau)\,d\tau = C_{2k}(t_1),\ \ldots,\quad \int_0^T \mu(\tau)h_{2k}^{(m)}(\tau)\,d\tau = C_{2k}(t_m), \tag{3.26}$$

$$\begin{gathered}\int_0^T \mu(\tau)h_{1k}^{(i)}(\tau)\,d\tau = C_{1k}(t_i),\quad i = 2\alpha-1,\quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2},\\ \int_0^T \mu(\tau)h_{2k}^{(j)}(\tau)\,d\tau = C_{2k}(t_j),\quad j = 2\alpha,\quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}.\end{gathered} \tag{3.27}$$

Здесь

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\Big[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k}\Big],\quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\Big[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k}\Big];$$

$$C_{1k}(t_i) = \frac{1}{\lambda_k^2}\Big[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)}\Big],\quad i = 1,\ldots,m;$$

$$C_{2k}(t_j) = \frac{1}{\lambda_k^2}\Big[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)}\Big],\quad j = 1,\ldots,m;$$

$$\begin{aligned} X_{1k} &= \lambda_k\varphi_T(0) - \psi_0(0)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(0)\cos\lambda_k T;\\ X_{2k} &= \psi_T(0) - \psi_0(0)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(0)\sin\lambda_k T;\\ X_{1k}^{(i)} &= \lambda_k\varphi_i(0) - \psi_0(0)\sin\lambda_k t_i - \lambda_k\varphi_0(0)\cos\lambda_k t_i;\\ X_{2k}^{(j)} &= \psi_j(0) - \psi_0(0)\cos\lambda_k t_j + \lambda_k\varphi_0(0)\sin\lambda_k t_j;\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$h_{1k}^{(i)}(\tau) = \begin{cases}\sin\lambda_k(t_i-\tau), & 0\le\tau\le t_i,\\ 0, & t_i<\tau\le T,\end{cases}\qquad h_{2k}^{(j)}(\tau) = \begin{cases}\cos\lambda_k(t_j-\tau), & 0\le\tau\le t_j,\\ 0, & t_j<\tau\le T.\end{cases} \tag{3.29}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered}\bar{H}_k^{(a)}(\tau) = \begin{pmatrix}\sin\lambda_k(T-\tau) & \cos\lambda_k(T-\tau) & h_{1k}^{(1)}(\tau) & \ldots & h_{1k}^{(m)}(\tau)\end{pmatrix}^T,\\ C_k^{(a)} = \begin{pmatrix}C_{1k}(T) & C_{2k}(T) & C_{1k}(t_1) & \ldots & C_{1k}(t_m)\end{pmatrix}^T,\end{gathered} \tag{3.30}$$

$$\begin{gathered}\bar{H}_k^{(b)}(\tau) = \begin{pmatrix}\sin\lambda_k(T-\tau) & \cos\lambda_k(T-\tau) & h_{2k}^{(1)}(\tau) & \ldots & h_{2k}^{(m)}(\tau)\end{pmatrix}^T,\\ C_k^{(b)} = \begin{pmatrix}C_{1k}(T) & C_{2k}(T) & C_{2k}(t_1) & \ldots & C_{2k}(t_m)\end{pmatrix}^T,\end{gathered} \tag{3.31}$$

$$\begin{gathered}\bar{H}_k^{(c)}(\tau) = \begin{pmatrix}\sin\lambda_k(T-\tau) & \cos\lambda_k(T-\tau) & h_{1k}^{(1)}(\tau) & h_{2k}^{(2)}(\tau) & \ldots & h_{1k}^{(m-1)}(\tau) & h_{2k}^{(m)}(\tau)\end{pmatrix}^T,\\ C_k^{(c)} = \begin{pmatrix}C_{1k}(T) & C_{2k}(T) & C_{1k}(t_1) & C_{2k}(t_2) & \ldots & C_{1k}(t_{m-1}) & C_{2k}(t_m)\end{pmatrix}^T.\end{gathered} \tag{3.32}$$

Тогда, учитывая (3.30)–(3.32), соотношения (3.24), (3.25), (3.24)–(3.26) и (3.24)–(3.27) запишем следующим образом:

$$\int_0^T \bar{H}_k^{(\delta)}(\tau)\mu^{(\delta)}(\tau)d\tau = C_k^{(\delta)},\quad \delta = a,\,b,\,c;\quad k = 1,2,\ldots. \tag{3.33}$$

Здесь через $\mu^{(\delta)}(\tau)$, $\delta = a,\, b,\, c$ обозначены функции управления для задач с условиями A), B) и C) соответственно.

На практике обычно выбирают несколько первых $n$ гармоник колебаний и решают задачу синтеза управлений с использованием методов теории управления конечномерными системами [1]. Поэтому

$$\begin{aligned} H_n^{(\delta)}(\tau) &= \begin{pmatrix} \bar{H}_1^{(\delta)}(\tau) & \bar{H}_2^{(\delta)}(\tau) & \ldots & \bar{H}_n^{(\delta)}(\tau) \end{pmatrix}^T, \\ \eta_n^{(\delta)} &= \begin{pmatrix} C_1^{(\delta)} & C_2^{(\delta)} & \ldots & C_n^{(\delta)} \end{pmatrix}^T, \quad \delta = a,\, b,\, c, \end{aligned} \tag{3.34}$$

со следующими размерностями: $H_n^{(\delta)}(\tau)$ — $(n\,(m+2)\times 1)$ и $\eta_n^{(\delta)}$ — $(n\,(m+2)\times 1)$ при всех $\delta = a,\, b,\, c$.

## 3.2. Построение решения задач граничного управления колебаниями струны смещением двух концов

Подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (3.4) в соотношения (3.16)–(3.19) и интегрируя по частям с учетом условий согласования (1.12)–(1.14), из (3.16) получим, что функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого $k$ должны удовлетворять интегральным соотношениям

$$\begin{aligned} \int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k \sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}^{(2)}(T), \\ \int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k \cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{2k}^{(2)}(T), \end{aligned} \tag{3.35}$$

а из (3.17), (3.18) и (3.19) вытекают соответственно интегральные соотношения

$$\int\limits_0^T \mu(\tau) h_k^{(i)}(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_k^{(i)}(\tau)\,d\tau = C_{1k}^{(2)}(t_i), \tag{3.36}$$

$$\int\limits_0^T \mu(\tau) h_{2k}^{(j)}(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_{2k}^{(j)}(\tau)\,d\tau = C_{2k}^{(2)}(t_j), \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_0^T \mu(\tau) h_k^{(i)}(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_k^{(i)}(\tau)\,d\tau = C_{1k}^{(2)}(t_i), \quad i = 2\alpha-1, \quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}, \\ \int\limits_0^T \mu(\tau) h_{2k}^{(j)}(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_{2k}^{(j)}(\tau)\,d\tau = C_{2k}^{(2)}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}^{(2)}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\Big[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} - (-1)^k Y_{1k}\Big], \\ C_{2k}^{(2)}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\Big[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} - (-1)^k Y_{2k}\Big], \\ C_{1k}^{(2)}(t_i) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\Big[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} - (-1)^k Y_{1k}^{(i)}\Big], \\ C_{2k}^{(2)}(t_j) &= \tfrac{1}{\lambda_k^2}\Big[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} - (-1)^k Y_{2k}^{(j)}\Big], \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$
\begin{aligned}
Y_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k T,\\
Y_{2k} &= \psi_T(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_k T,\\
Y_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k t_i - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k t_i,\\
Y_{2k}^{(j)} &= \psi_j(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k t_j + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_k t_j.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Отметим, что выражения $\tilde{C}_{1k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(T)$, $\tilde{C}_{1k}(t_i)$, $\tilde{C}_{2k}(t_j)$ приведены в (3.20)–(3.23), а выражения $X_{1k}$, $X_{2k}$, $X_{1k}^{(i)}$, $X_{2k}^{(j)}$ и $h_{1k}^{(i)}(\tau)$, $h_{2k}^{(j)}(\tau)$ — в (3.28) и (3.29). Величины, приведенные в (3.39) и (3.40), известны, так как выражены через исходные данные.

Введем обозначения

$$
\bar{H}_k^{(2a)}(\tau) = \begin{pmatrix}
\sin\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\sin\lambda_k(T-\tau)\\
\cos\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\cos\lambda_k(T-\tau)\\
h_{1k}^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_{1k}^{(1)}(\tau)\\
\dots & \dots\\
h_{1k}^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_{1k}^{(m)}(\tau)
\end{pmatrix},\quad
C_k^{(2a)} = \begin{pmatrix}
C_{1k}^{(2)}(T)\\ C_{2k}^{(2)}(T)\\ C_{1k}^{(2)}(t_1)\\ \vdots \\ C_{1k}^{(2)}(t_{m-1})
\end{pmatrix},
\tag{3.41}
$$

$$
\bar{H}_k^{(2b)}(\tau) = \begin{pmatrix}
\sin\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\sin\lambda_k(T-\tau)\\
\cos\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\cos\lambda_k(T-\tau)\\
h_{2k}^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_{2k}^{(1)}(\tau)\\
\dots & \dots\\
h_{2k}^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_{2k}^{(m)}(\tau)
\end{pmatrix},\quad
C_k^{(2b)} = \begin{pmatrix}
C_{1k}^{(2)}(T)\\ C_{2k}^{(2)}(T)\\ C_{2k}^{(2)})(t_1)\\ \vdots \\ C_{2k}^{(2)}(t_m)
\end{pmatrix},
\tag{3.42}
$$

$$
\bar{H}_k^{(2c)}(\tau) = \begin{pmatrix}
\sin\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\sin\lambda_k(T-\tau)\\
\cos\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\cos\lambda_k(T-\tau)\\
h_{1k}^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_{1k}^{(1)}(\tau)\\
h_{2k}^{(2)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_{2k}^{(2)}(\tau)\\
\dots & \dots\\
h_{1k}^{(m-1)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_{1k}^{(m-1)}(\tau)\\
h_{2k}^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_{2k}^{(m)}(\tau)
\end{pmatrix},\quad
C_k^{(2c)} = \begin{pmatrix}
C_{1k}^{(2)}(T)\\ C_{2k}^{(2)}(T)\\ C_{1k}^{(2)}(t_1)\\ C_{2k}^{(2)}(t_2)\\ \vdots \\ C_{1k}^{(2)}(t_{m-1})\\ C_{2k}^{(2)}(t_m)
\end{pmatrix},
\tag{3.43}
$$

$$
U^{(2\delta)}(\tau) = \begin{pmatrix} \mu^{(2\delta)}(\tau)\\ \nu^{(2\delta)}(\tau)\end{pmatrix}.
$$

Тогда, учитывая (3.41)–(3.43), соотношения (3.35), (3.36), (3.35)–(3.37) и (3.35)–(3.38) запишем следующим образом:

$$
\int_0^T \bar{H}_k^{(2\delta)}(\tau)U^{(2\delta)}(\tau)\,d\tau = C_k^{(2\delta)}, \quad \delta = a,\, b,\, c; \quad k = 1,2,\dots\,.
\tag{3.44}
$$

Таким образом, для нахождения функции $U^{(2\delta)}(\tau)$, $\tau\in[0,\,T]$, для всех трех задач, получили бесконечные интегральные соотношения, которые представлены в единой записи (3.44).

Для первых $n$ гармоник введем обозначения блочных матриц

$$
\begin{aligned}
H_n^{(2\delta)}(\tau) &= \begin{pmatrix} \bar{H}_1^{(2\delta)}(\tau) & \bar{H}_2^{(2\delta)}(\tau) & \dots & \bar{H}_n^{(2\delta)}(\tau)\end{pmatrix}^T,\\
\eta_n^{(2\delta)} &= \begin{pmatrix} C_1^{(2\delta)} & C_2^{(2\delta)} & \dots & C_n^{(2\delta)}\end{pmatrix}^T,
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

со следующими размерностями: $H_k^{(2\delta)}(\tau)$ — $(n\,(m+2)\times 2)$ и $\eta_n^{(2\delta)}$ — $(n\,(m+2)\times 1)$, $\delta = a,\, b,\, c$.

Для первых $n$ гармоник с учетом (3.34) соотношение (3.33) или соотношение (3.44) с учетом (3.45) представим в виде

$$\int\limits_0^T H_n^{(\sigma)}(\tau)\,U_n^{(\sigma)}(\tau)d\tau=\eta_n^{(\sigma)},\quad \sigma=\delta,\,2\delta,\quad \delta=a,\,b,\,c, \tag{3.46}$$

где $\sigma=\delta$, $U_n^{(\delta)}(t)=\mu_n^{(\delta)}(t)$. Из (3.46) следует справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 1.** *Первые $n$ гармоники системы* (3.2) *с промежуточными условиями* ((3.5)–(3.9) *или* (3.10)–(3.14)) *соответственно вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора $\eta_n^{(\sigma)}$ можно найти управление $U_n^{(\delta)}(t)$, $t\in[0,\,T]$, удовлетворяющее условию* (3.46).

Для произвольного числа первых гармоник управляющее воздействие $U_n^{(\sigma)}(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (3.46), имеет вид

$$U_n^{(\sigma)}(t)=\big(H_n^{(\sigma)}(t)\big)^T\big(S_n^{(\sigma)}\big)^{-1}\eta_n^{(\sigma)}+f_n^{(\sigma)}(t),\quad \sigma=\delta,\,2\delta,\quad \delta=a,\,b,\,c, \tag{3.47}$$

где $\big(H_n^{(\sigma)}(t)\big)^T$ — транспонированная матрица, $f_n^{(2\delta)}(t)$ — некоторая вектор-функция, такая что

$$\int\limits_0^T H_n^{(\sigma)}(t)f_n^{(\sigma)}(t)dt=0,\quad S_n^{(\sigma)}=\int\limits_0^T H_n^{(\sigma)}(t)\big(H_n^{(\sigma)}(t)\big)^Tdt,\quad \sigma=\delta,\,2\delta,\quad \delta=a,\,b,\,c. \tag{3.48}$$

Здесь $H_n^{(\sigma)}(t)\big(H_n^{(\sigma)}(t)\big)^T$ — внешнее произведение, $S_n^{(\sigma)}$ — известная матрица размерностью $(n\,(m+2)\times n\,(m+2))$, для которой предполагается, что $\det S_n^{(\sigma)}\neq 0$ при $\sigma=\delta,\,2\delta,\,\delta=a,\,b,\,c$.

Подставляя из (3.47) $U^{(\sigma)}(t)$ в (3.3) — при $\sigma=\delta$ и в (3.4) — при $\sigma=2\delta$, а найденное для $F_k^{(\sigma)}(t)$ выражение — в (3.15), получим функцию $V_k^{(\sigma)}(t)$, $t\in[0,\,T]$. Далее, из формулы (3.1) будем иметь

$$V_n^{(\sigma)}(x,t)=\sum_{k=1}^{n}V_k^{(\sigma)}(t)\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{3.49}$$

$$V_k^{(\sigma)}(t)=V_k(0)\cos\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\dot V_k(0)\sin\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t F_k^{(\sigma)}(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau,$$

а с помощью (2.1) функцию прогиба струны $Q_n^{(\sigma)}(x,t)$ для первых $n$ гармоник запишем как

$$Q_n^{(\sigma)}(x,t)=V_n^{(\sigma)}(x,t)+W_n^{(\sigma)}(x,t),\quad \sigma=\delta,\,2\delta,\quad \delta=a,\,b,\,c, \tag{3.50}$$

где

$$W_n^{(\delta)}(x,t)=\Big(1-\frac{x}{l}\Big)\mu_n^{(\delta)}(t)\,,\quad W_n^{(2\delta)}(x,t)=\big[\nu_n^{(2\delta)}(t)-\mu_n^{(2\delta)}(t)\big]\frac{x}{l}+\mu_n^{(2\delta)}(t)\,. \tag{3.51}$$

Таким образом, для первых $n$ гормоник под воздействием управляющего воздействия (3.47) функция прогиба определяется формулами (3.49)–(3.51).

### 3.3. Построение решения задач оптимального граничного управления

Для процесса управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце для первых $n$ гармоник с учетом (3.34) интегральные соотношения (3.33) представим в виде

$$\int_0^T H_n^{(\delta)}(\tau)\mu_n^{(\delta)}(\tau)d\tau = \eta_n^{(\delta)} \tag{3.52}$$

со следующими размерностями: $H_n^{(\delta)}(\tau)$ — $(n\,(m+2)\times 1)$ и $\eta_n^{(\delta)}$ — $(n\,(m+2)\times 1)$, где $\delta = a,\, b,\, c$.

Для процесса управления колебаниями струны смещением двух концов для первых $n$ гармоник с учетом (3.45) интегральные соотношение (3.44) описываются формулами

$$\int_0^T H_n^{(2\delta)}(\tau)\, U_n^{(2\delta)}(\tau)d\tau = \eta_n^{(2\delta)}, \tag{3.53}$$

$$H_k^{(2\delta)}(\tau) - (n\,(m+2)\times 2)\,, \quad \eta_n^{(2\delta)} - (n\,(m+2)\times 1)\,, \quad \delta = a,\, b,\, c.$$

Отметим, что левая часть условии (3.52) (или (3.53)) — линейная операция порожденной функцией (функциями) управления на промежутке времени $[0, T]$, а функционалы (1.10) или (1.11) являются нормой пространства $L_2$ [9; 10; 14; 17; 18].

Таким образом, задачу оптимального управления с интегральными условиями (3.52) при функционале (1.10) или с интегральными условиями (3.53) при функционале (1.11) можно рассматривать как проблему моментов, а решение этих задач следует построить с помощью проблемы моментов.

## Заключение

Предложен (с использованием метода Фурье) конструктивный подход построения граничного управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени. Представленный для одномерного волнового уравнения подход можно распространить на другие одномерные и неодномерные колебательные системы. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании граничного управления процессами колебаний в физических и технологических системах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутковский А.Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. **Знаменская Л.Н.** Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с.
3. **Ильин В.А., Моисеев Е.И.** Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 6 (366). С. 89–114.
4. **Моисеев Е.И., Холомеева А.А., Фролов А.А.** Граничное управление смещением процессом колебаний при граничном условии типа торможения за время, меньшее критического // Итоги науки и техники: материалы Междунар. конф. “International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS–17” (С.-Петерб. политехн. ун-т, 24–28 июля 2017 г.). Сер. Современная математика и ее приложения. Темат. обзор, № 160. М.: ВИНИТИ РАН, 2019. С. 74–84.
5. **Абдукаримов М.Ф.** Об оптимальном граничном управлении смещениями процесса вынужденных колебаний на двух концах струны // Докл. АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56, № 8. С. 612–618.
6. **Копец М.М.** Задача оптимального управления процессом колебания струны // Теория оптимальных решений. Киев: Изд-во Ин-та кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины. 2014. С. 32–38.

7. **Zuazua E.** Controllability of partial differential equations. Madrid: Universidad Autonoma, 2002. 311 p.
8. **Андреев А.А., Лексина С.В.** Задача граничного управления для системы волновых уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16). С. 5–10.
9. **Барсегян В.Р.** Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 36–47.
10. **Barseghyan V.R.** The Problem of Optimal Control of String Vibrations // International Applied Mechanics. 2020. Vol. 56, no. 4. P. 471–480. doi: 10.1007/s10778-020-01030-w.
11. **Barseghyan V.R., Solodusha S.V.** On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. Vol. 1847. Art. no. 012016. doi: 10.1088/1742-6596/1847/1/012016.
12. **Barseghyan V.R., Solodusha S.V.** Control of String Vibrations by Displacement of One End with the Other End Fixed, Given the Deflection Form at an Intermediate Moment of Time // Axioms. 2022. Vol. 11, no. 4. Art. no. 157. doi: 10.3390/axioms11040157.
13. **Barseghyan V.R.** Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points in time // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54, no. 8. P. 1216–1226. doi: 10.3103/S0025654419080120.
14. **Barseghyan V.R., Solodusha S.V.** Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Proc. (20th Internat. Conf., MOTOR 2021, Irkutsk, Russia, July 5–10, 2021). Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12755. P. 299–313. doi: 0.1007/978-3-030-77876-7_20.
15. **Корзюк В.И., Козловская И.С.** Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 2. С. 22—35.
16. **Корзюк В.И., Козловская И.С.** Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 1. С. 62—70.
17. **Барсегян В.Р.** Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
18. **Зубов В.И.** Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
19. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением, М.: Наука, 1968. 476 с.


Поступила 7.07.2022
После доработки 7.07.2022
Принята к публикации 11.07.2022

Барсегян Ваня Рафаелович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт механики НАН Армении;
профессор
Ереванский государственный университет
г. Ереван, Армения
e-mail: barseghyan@sci.am

**REFERENCES**


1. Butkovskii A.G. *Metody upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Control methods for systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 568 p.
2. Znamenskaya L.N. *Upravlenie uprugimi kolebaniyami* [Control of elastic vibrations]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 176 p. ISBN: 5-9221-0473-X.
3. Il'in V.A., Moiseev E.I. Optimization of boundary controls of string vibrations. *Russ. Math. Surv.*, 2005, vol. 60, no. 6, pp. 1093–1119. doi: 10.1070/RM2005v060n06ABEH004283.
4. Moiseev E.I., Kholomeyeva A.A., Frolov A.A. Boundary displacement control for the oscillation process with boundary conditions of damping type for a time less than critical. *Proccedings of the Intern. Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS–17. St. Petersburg Polytechnical University, July, 24–28, 2017. Results of science and technology.* Series Modern Mathematics and Its Applications, Thematic Overview, no. 160. Moscow: VINITI Publ., 2019, pp. 74–84 (in Russian).

5. Abdukarimov M.F. On optimal boundary control of displacements in the process of forced vibrations on both ends of a string. *Dokl. Akad. Nauk Republic of Tadzhikistan*, 2013, vol. 56, no. 8, pp. 612–618 (in Russian).
6. Kopets M.M. The problem of optimal control of the string vibration process. In: *The theory of optimal solutions*. Kiev: V. M. Glushkov Institute of Cybernetics NAS of Ukraine Publ., 2014, pp. 32–38 (in Russian).
7. Zuazua E. *Controllability of partial differential equations*. Madrid: Universidad Autonoma, 2002, 311 p.
8. Andreev A.A., Leksina S.V. The boundary control problem for the system of wave equations. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008, vol. 1(16), pp. 5–10. doi: 10.14498/vsgtu565 . (in Russian)
9. Barseghyan V.R. Optimal control of string vibrations with nonseparate state function conditions at given intermediate instants. *Autom. Remote Control*, 2020, vol. 81, no. 2, pp. 226–235. doi: 10.31857/S0005231020020038 .
10. Barsegyan V.R. The problem of optimal control of string vibrations. *Int. Appl. Mech.*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 471–480. doi: 10.1007/s10778-020-01030-w .
11. Barseghyan V.R., Solodusha S.V. On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1847, art. no. 012016. doi: 10.1088/1742-6596/1847/1/012016 .
12. Barseghyan V., Solodusha S. Control of string vibrations by displacement of one end with the other end fixed, given the deflection form at an intermediate moment of time. *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 4, art. no. 157. doi: 10.3390/axioms11040157 .
13. Barseghyan V.R. Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points in time. *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1216–1226. doi: 10.3103/S0025654419080120 .
14. Barseghyan V., Solodusha S. Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time. In: *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 12755. Cham: Springer, 2021, pp. 299–313. doi: 10.1007/978-3-030-77876-7_20 .
15. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Two-point boundary problem for string oscillation equation with given velocity in arbitrary point of time. I. *Tr. Inst. Mat.*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 22–35 (in Russian).
16. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Two-point boundary problem for string oscillation equation with given velocity in arbitrary point of time. II. *Tr. Inst. Mat.*, 2011, vol. 19, no. 1, pp. 62–70 (in Russian).
17. Barseghyan V.R. *Upravlenie sostavnykh dinamicheskikh sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami* [Control of composite dynamic systems and systems with multipoint intermediate conditions]. Moscow: Nauka Publ., 2016, 230 p. ISBN: 978-5-02-039961-7/hbk .
18. Zubov V.I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on control theory]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 496 p.
19. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.

Received July 7, 2022
Revised July 7, 2022
Accepted July 11, 2022

*Vanya R. Barseghyan,* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of RA; Yerevan State University, Yerevan, Armenia, e-mail: barseghyan@sci.am .

Cite this article as: V. R. Barseghyan. Problems of boundary control and optimal control of string vibrations with multipoint intermediate conditions on the state functions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 38–52.