ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.935.2

О ПРИВЕДЕНИИ СИСТЕМ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ К ФОРМЕ С ВЫДЕЛЕНИЕМ НУЛЕВОЙ ДИНАМИКИ[1]

Е. И. Атамась, А. В. Ильин

В работе рассматривается форма с выделением нулевой динамики для систем с запаздываниями. Результаты, полученные ранее для случая соизмеримых запаздываний, переносятся на системы с несоизмеримыми запаздываниями. Получены условия, при которых приведение к указанной форме возможно, описан алгоритм построения соответствующего преобразования.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, несоизмеримые запаздывания, нулевая динамика.

E. I. Atamas, A. V. Il'in. On the reduction of systems with incommensurate delays to a form with zero dynamics.

A form with zero dynamics for time-delay systems is considered. The results obtained earlier for the case of commensurate delays are transferred to systems with incommensurate delays. Conditions are obtained under which the reduction to such a form is possible, and an algorithm for constructing the corresponding transformation is described.

Keywords: time-delay systems, incommensurate delays, zero dynamics.

MSC: 34K17, 34K35

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-30-37

Введение

При решении различных задач математической теории управления большую роль играет так называемая форма с выделением нулевой динамики. К таким задачам относятся, в частности, задачи наблюдения [1] и обращения [2]. В данной работе мы рассматриваем непрерывные управляемые системы с выходом. Далее под нулевой динамикой такой системы мы будем понимать уравнения, описывающие ее поведение при тождественно равном нулю выходе. Для систем ОДУ с постоянными коэффициентами нулевая динамика хорошо изучена даже в нелинейном случае [3]. Например, установлено, что ее спектр определяется инвариантными нулями системы, известны алгоритмы построения преобразования координат, позволяющего в явном виде получить уравнения нулевой динамики.

Нулевая динамика для систем с запаздываниями исследована значительно хуже [4]. В большинстве работ, посвященных данному вопросу [5; 6], используется алгебраический подход, основанный на теории систем над кольцами. В рамках того же подхода нами в соавторстве с В. В. Фомичевым ранее были получены условия, позволяющие перенести методы, работающие для систем без запаздывания, на случай систем с соизмеримыми запаздываниями [7]. Цель данной работы — дальнейшее развитие этих идей для случая несоизмеримых запаздываний.

1. Алгебраическое описание систем с запаздыванием

В этом разделе мы коротко напомним основные понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем, а именно “алгебраическое представление систем с запаздыванием” [8] и “относительный порядок”.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых — кандидатов наук (проект МК-4905.2021.1.1).

Напомним, что вещественные числа τ_i, $i = 0, \ \ldots \ , n$, называются соизмеримыми, если существует такое число $\tau \in \mathbb{R}$, что $\tau_i = k_i\tau$, $k_i \in \mathbb{Z}$. В противном случае числа τ_i называются несоизмеримыми.

Мы будем рассматривать управляемые системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} A_i x(t-\tau_i) + \sum\limits_{i=0}^{k} B_i \xi(t-\tau_i), \\ y = \sum\limits_{i=0}^{k} C_i x(t-\tau_i) + \sum\limits_{i=0}^{k} D_i \xi(t-\tau_i), \end{cases} \tag{1.1}$$

где размерности входа и выхода системы совпадают, а постоянные запаздывания $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ \ldots \ < \tau_k$, вообще говоря, несоизмеримы. Разобьем их на $\bar{k}$ классов, соизмеримых между собой, в каждом из классов выберем общее кратное запаздывание $\bar{\tau}_j$ и для каждого класса введем оператор запаздывания $\delta_j : f(t) \mapsto f(t-\bar{\tau}_j)$, $\quad j = 1, \ldots, \bar{k}$. Система (1.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\delta_1, \ldots, \delta_{\bar{k}}) x(t) + B(\delta_1, \ldots, \delta_{\bar{k}}) \xi(t), \\ y = C(\delta_1, \ldots, \delta_{\bar{k}}) x(t) + D(\delta_1, \ldots, \delta_{\bar{k}}) \xi(t), \end{cases}$$

После этого формально заменим оператор δ_j алгебраической переменной Δ_j. В результате имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta_1, \ldots, \Delta_{\bar{k}}) x(t) + B(\Delta_1, \ldots, \Delta_{\bar{k}}) \xi(t), \\ y = C(\Delta_1, \ldots, \Delta_{\bar{k}}) x(t) + D(\Delta_1, \ldots, \Delta_{\bar{k}}) \xi(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь A, B, C, D — матрицы, элементами которых являются многочлены нескольких переменных $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\bar{k}}$. Таким образом, системе (1.1) сопоставляется система над коммутативным кольцом многочленов нескольких переменных $\mathbb{R}[\Delta_1, \ldots, \Delta_{\bar{k}}]$.

Наша задача состоит в приведении такой системы к специальной форме, называемой формой с выделением нулевой динамики.

Отметим, что в случае соизмеримых запаздываний аналогичное построение приводит к системе над кольцом $\mathbb{R}[\Delta_1]$ многочленов от одной переменной. Это кольцо является евклидовым, что позволяет приводить матрицы над таким кольцом к нормальной форме Смита. В случае же несоизмеримых запаздываний кольцо $\mathbb{R}[\Delta_1, \ldots, \Delta_{\bar{k}}]$ указанным свойством не обладает, что существенно затрудняет работу с ним.

Ключевое значение для дальнейшего изложения имеет понятие относительного порядка системы.

О п р е д е л е н и е 1. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$ определяет относительный векторный порядок, если выполнены следующие условия:

1. $c_i B = 0$, $c_i AB = 0$, $\ldots$, $c_i A^{r_i-2} B = 0$, $c_i A^{r_i-1} B \neq 0$ для всех $1 \leq i \leq m$.

2. $\det \begin{pmatrix} c_1 A^{r_1-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} B \end{pmatrix} = \det H_r(\Delta) \neq 0.$

В случае, когда $\det H_r(\Delta) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (такие матрицы называются *унимодулярными*), т. е. матрица $H_r(\Delta)$ обратима, относительный порядок называется *чистым.*

Мы будем использовать обозначение $|r| = r_1 + \ \ldots \ r_m$.

З а м е ч а н и е. Относительный порядок, а тем более чистый относительный порядок, определены не для каждой системы. Тем не менее в некоторых ситуациях можно попытаться преобразованием входов и выходов привести систему к системе с относительным порядком (см. [9] для систем ОДУ).

2. Приведение к форме с нулевой динамикой

Перейдем к доказательству основного утверждения.

Лемма 1. *Пусть матрица* $Q \in \mathbb{R}^{q\times n}[\Delta_1,\ldots,\Delta_{\bar k}]$, *где* $q < n$. *Матрица* Q *может быть дополнена матрицей* $T' \in \mathbb{R}^{(n-q)\times n}[\Delta_1,\ldots,\Delta_{\bar k}]$ *до унимодулярной матрицы* $T = \begin{pmatrix} T' \\ Q \end{pmatrix}$ *тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель миноров максимального порядка* q *матрицы* Q *является вещественным числом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогичной леммы для систем с соизмеримыми запаздываниями элементарно [7]. В случае систем с несоизмеримыми запаздываниями это уже не так: et справедливость вытекает из теоремы Квиллена — Суслина [10]. $\square$

Эта лемма фактически задает условие, при котором q строк (матрицы Q) могут являться частью матрицы обратимого перехода к новому базису (матрица T и осуществляет такой переход).

Лемма 2. *Пусть система* (1.2) *обладает чистым векторным относительным порядком. Тогда идеал, порожденный минорами максимального порядка матрицы* Q, *совпадает с* $\mathbb{R}[\Delta_1,\ldots,\Delta_{\bar k}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. От противного, пусть идеал I, порожденный минорами максимального порядка матрицы Q, не совпадает с $\mathbb{R}[\Delta_1,\ldots,\Delta_{\bar k}]$. Тогда по теореме Гильберта о нулях множество их общих нулей $V(I)$ непусто. Пусть $(x_1, \ \ldots \ , x_{\bar k}) \in V(I)$. Все миноры максимального порядка обращаются в этой точке в ноль, поэтому

$$\operatorname{rank} Q(x_1, \ \ldots \ , x_{\bar k}) < |r|,$$

а значит, строки $Q(x_1, \ \ldots \ , x_{\bar k})$ линейно зависимы.

С другой стороны, в силу предположения о том, что относительный порядок системы (1.2) чистый, строки матрицы $H_r(x_1, \ \ldots \ , x_{\bar k})$ линейно независимы, ведь ее определитель — ненулевое число. Но тогда, рассуждая аналогично доказательству леммы 2 с тем отличием, что теперь рассматриваются не матрицы над кольцом, а полученные подстановкой точки $(x_1, \ \ldots \ , x_{\bar k})$ — числовые матрицы, имеем, что и строки $Q(x_1, \ \ldots \ , x_{\bar k})$ линейно независимы; это приводит к противоречию. $\square$

Теорема 1. *Пусть система* (1.2) *обладает чистым векторным относительным порядком. Тогда она обратимым преобразованием приводима к форме с выделением нулевой динамики.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим матрицу

$$Q(\Delta_1,\ldots,\Delta_{\bar k}) = \left[\begin{array}{c} c_1 \\ \vdots \\ c_1 A^{r_1-2} \\ \hline \vdots \\ \hline c_m \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-2} \\ \hline c_1 A^{r_1-1} \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} \end{array}\right].$$

Система обладает чистым относительным порядком, поэтому согласно леммам 2 и 3 она может быть дополнена некоторой матрицей T' до квадратной унимодулярной матрицы $T = \begin{bmatrix} T' \\ Q \end{bmatrix}$. Замена координат

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y} \end{pmatrix} = Tx,$$

где $\bar{y} = (y_1^1, \dots, y_{r_1-1}^1, y_1^2, \dots, y_{r_2-1}^2, \dots, y_1^m, \dots, y_{r_m-1}^m, y_{r_1}^1, \dots, y_{r_m}^m)$, $y_i = y_1^i$ — измеряемые выходы системы; $y_j^i = y_i^{(j-1)}$ — производные выходов; $\bar{x}' \in R^{n-|r|}$ — оставшиеся координаты, приведет систему к виду

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}' = A'_{11}\bar{x}' + A'_{12}\bar{y} + B_1 u, \\ \begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A'_{21}\bar{x}' + A'_{22}\bar{y} + H_r u; \end{cases}$$

здесь H_r — матрица из определения относительного порядка. Далее вычтем из группы строк, соответствующих переменным $\bar{x}'$, группу, отвечающую переменным $\tilde{y} = (y_{r_1}^1, \dots, y_{r_m}^m)^T$, предварительно умножив ее на $B_1 H$. Тем самым мы избавимся от управления u в первом уравнении и перейдем к следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}'' = A''_{11}\bar{x}'' + A''_{12}\bar{y}, \\ \begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A''_{21}\bar{x} + A''_{22}\bar{y} + H_r u. \end{cases}$$

где $\bar{x}'' = \bar{x}' - P\tilde{y}$ — новые переменные.

Первая группа уравнений новой системы — это выходы y_i вместе со своими производными. Исключим их с помощью вычитания соответствующих строк из групп уравнений, отвечающих производным выходов системы. Тогда мы от переменных $\bar{x}''$ перейдем к переменным $\bar{x}$, переменные $\bar{y}$ останутся неизменны, а система будет приведена к форме с выделением нулевой динамики:

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\
\begin{cases} \dot{y}_1^1 = y_2^1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1, \end{cases} \\
\vdots \\
\begin{cases} \dot{y}_1^m = y_2^m, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m, \end{cases} \\
\begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r u.
\end{cases}
$$

Тем самым теорема доказана.

3. Пример

В качестве примера работы описанного алгоритма рассмотрим линейную систему с двумя входами и двумя выходами:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = x_1(t-1) + x_3(t) + 2u_1(t-1) + u_2(t), \\
\dot{x}_2(t) = 2x_2(t-\sqrt{2}) + u_1(t), \\
\dot{x}_3(t) = x_1(t-\sqrt{2}) + x_3(t-1), \\
y_1(t) = x_1(t) + x_3(t-1), \\
y_2(t) = x_1(t-\sqrt{2}) - x_2(t) + x_3(t-\sqrt{2}).
\end{cases}
$$

Это система с двумя несоизмеримыми запаздываниями: $\tau_1 = 1, \tau_2 = \sqrt{2}$. Для упрощения дальнейших выкладок сопоставим этим запаздываниям алгебраические переменные p и q соответственно (вместо использованных ранее Δ_1 и Δ_2). В результате получим следующую систему над кольцом $\mathbb{R}[p,q]$:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = px_1 + x_3 + 2pu_1 + u_2, \\
\dot{x}_2 = 2qx_2 + u_1, \\
\dot{x}_3 = qx_1 + px_3, \\
y_1 = x_1 + px_3, \\
y_2 = qx_1 - x_2 + qx_3.
\end{cases}
$$

Этой системе соответствуют матрицы

$$
A = \begin{bmatrix} p & 0 & 1 \\ 0 & 2q & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ q & -1 & q \end{bmatrix}.
$$

Легко проверить, что система обладает чистым векторным относительным порядком $r = (1,\ 1)$ и

$$
H_r = \begin{bmatrix} 2p & 1 \\ 2pq-1 & q \end{bmatrix}, \quad |H_r| = 1.
$$

В этом случае $Q = C$. Чтобы дополнить Q до квадратной унимодулярной матрицы, выберем $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p+1 \end{bmatrix}$. Отметим, что такой выбор можно осуществить разными, в том числе и более простыми, способами. В данном случае мы стремимся к полноте иллюстрации алгоритма.

Тогда унимодулярной заменой $z = Tx$,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p+1 \\ 1 & 0 & p \\ q & -1 & q \end{bmatrix},$$

мы перейдем к системе с матрицами

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1-p^2q-pq+p & p^2q+2pq+q-1 & 0 \\ 1-p^2q & p^2q+pq+p-1 & 0 \\ q-p^2q+pq^2+pq-2q^2 & p^2q-pq^2+q^2-q & 2q \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2p & 1 \\ 2p & 1 \\ 2pq-1 & q \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что две последние строки матрицы B_1 составляют матрицу H_r. Наша следующая цель — обнулить с их помощью первую строку. Для этого сделаем еще одну замену $z' = T_2 z$, где

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

После этого матрица C_1 не изменится, а матрицы A_1 и B_1 примут вид соответственно

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1-pq & q & 0 \\ 1-p^2q & pq+p & 0 \\ q-p^2q+pq^2+pq-2q^2 & pq-q^2 & 2q \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2p & 1 \\ 2pq-1 & q \end{bmatrix}.$$

Это и есть искомая форма с выделением нулевой динамики. Непосредственно нулевая динамика системы описывается первым уравнением при тождественно равном нулю выходе:

$$\dot{z}_1'(t) = z_1'(t) - z_1'(t-1-\sqrt{2}).$$

4. Заключение

Полученная в данном исследовании каноническая форма для систем с несоизмеримыми запаздываниями позволяет применять к ним методы, аналогичные разработанным ранее для систем с соизмеримыми запаздываниями. Тем не менее на этом пути все еще имеется ряд трудностей. Прежде всего, необходимо отметить ограничительный характер условия существования относительного порядка. Как было отмечено выше, существуют подходы, позволяющие предварительно привести систему к форме с относительным порядком, однако даже для случая соизмеримых запаздываний эта работа еще не завершена. Также имеются вычислительные сложности, связанные с дополнением матрицы до унимодулярной: в несоизмеримом случае такое дополнение уже не удается осуществить элементарными методами, а потому требуется привлечение систем компьютерной алгебры (о чем можно более подробно прочитать в работе [10]).

Также интерес представляет получение чисто алгебраического доказательства леммы 2, не привлекающее понятие нуля многочленов, что позволило бы перенести полученные результаты на случай более общих колец. Нам такое доказательство известно лишь для случая, когда все компоненты вектора относительного порядка равны между собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коровин С.К., Фомичев В.В.** Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
2. **Атамась Е.И., Ильин А.В., Фомичев В.В.** Обращение векторных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1363–1369. doi: 10.1134/S0374064113110010 .
3. **Isidori A.** The zero dynamics of a nonlinear system: From the origin to the latest progresses of a long successful story // European J. Control. 2013. Vol. 19, no. 5. P. 369–378. doi: 10.1016/j.ejcon.2013.05.014 .
4. **Zeng, C., Liang, S., Li, H.** Asymptotic properties of zero dynamics for nonlinear discretized systems with time delay via Taylor method // Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 79, no. 2. P. 1481–1493. doi: 10.1007/s11071-014-1755-9.
5. **Conte G., Perdon A. M.** A notion of zero dynamics for linear time-delay system // IFAC Proc. Volumes. 2008. Vol. 41, no. 2. P. 1255–1260. doi: 10.3182/20080706-5-KR-1001.00216.
6. **Bejarano F.B.** Zero dynamics normal form and disturbance decoupling of commensurate and distributed time-delay systems // Automatica. 2021. Vol. 129. Art. no. 109634. doi: 10.1016/j.automatica.2021.109634 .
7. **Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В.** О приведении систем с запаздыванием к форме с выделением нулевой динамики. // Докл. АН. 2018. Т. 480, № 1. С. 11–15. doi: 10.7868/s0869565218130029 .
8. **Morse A.S.** Ring models for delay-differential systems // Automatica. 1976. Vol. 12, no. 5. P. 529–531. doi: 10.1016/0005-1098(76)90013-3 .
9. **Фомичев В. В., Краев А. В., Роговский А. И.** О приведении систем к виду с относительным порядком методом динамического преобразования выходов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 5. С. 693–705. doi: 10.1134/S0374064117050120 .
10. **Fabianska A., Quadrat A.** Applications of the Quillen-Suslin theorem to multidimensional systems theory //Grobner Bases in Control Theory and Signal Processing. Berlin; Boston: De Gruyter, 2011. P. 23–106 . doi: 10.1515/9783110909746.23 .

Поступила 1.06.2022
После доработки 7.07.2022
Принята к публикации 11.07.2022

Ильин Александр Владимирович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
профессор
МГУ имени М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: iline@cs.msu.ru

Атамась Евгений Иванович
канд. физ.-мат. наук
ассистент
МГУ имени М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: eatamas@cs.msu.ru

REFERENCES

1. Korovin S.K., Fomichev V.V. *State observers for linear systems with uncertainty.* Berlin: Walter de Gruyter, 2009, 242 p. doi: 10.1515/9783110218138 . Original Russian text published in Korovin S.K., Fomichev V.V. *Nablyudateli sostoyaniya dlya lineinykh sistem s neopredelennost'yu*, Moscow: Fizmatlit Publ., 2007, 224 p.
2. Atamas' E.I., Il'in A.V., Fomichev V.V. Inversion of vector delay systems. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1329–1335. doi: 10.1134/s0012266113110013 .
3. Isidori A. The zero dynamics of a nonlinear system: from the origin to the latest progresses of a long successful story. *European J. Control*, 2013, vol. 19, no. 5, pp. 369–378. doi: 10.1016/j.ejcon.2013.05.014 .

4. Zeng C., Liang S., Li H. Asymptotic properties of zero dynamics for nonlinear discretized systems with time delay via Taylor method. *Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 1481–1493. doi: 10.1007/s11071-014-1755-9 .
5. Conte G., Perdon M. A notion of zero dynamics for linear, time-delay system. *IFAC Proc. Volumes*, 2008, vol. 41, no. 2, pp. 1255–1260. doi: 10.3182/20080706-5-KR-1001.00216 .
6. Bejarano F. Zero dynamics normal form and disturbance decoupling of commensurate and distributed time-delay systems. *Automatica*, 2021, vol. 129, art. no. 109634. doi: 10.1016/j.automatica.2021.109634 .
7. Il'in A.V., Atamas' E.I., Fomichev V.V. Transformation of time-delay systems to a form with zero dynamics. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 203–206. doi: 10.1134/S106456241803002X .
8. Morse A. Ring models for delay-differential systems. *Automatica*, 1976, vol. 12, no. 5, pp. 529–531. doi: 10.1016/0005-1098(76)90013-3 .
9. Fomichev V.V., Kraev A.V., Rogovskiy A.I. Reduction of systems to a form with relative degree using dynamic output transformation. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 686–700. doi: 10.1134/S0012266117050123 .
10. Fabianska A., Quadrat A. Applications of the Quillen–Suslin theorem to multidimensional systems theory. In: *Grobner bases in control theory and signal processing.* Berlin; Boston: De Gruyter, 2011, pp. 23–106. doi: 10.1515/9783110909746.23 .

Received June 1, 2022
Revised July 7, 2022
Accepted July 11, 2022

Funding Agency: This work was supported by a grant of the President of the Russian Federation for young scientists (project no. MK-4905.2021.1.1).

Alexander Vladimirovich Il'in, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119992 Russia, e-mail: iline@cs.msu.ru .

Evgeny Ivanovich Atamas, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119992 Russia, e-mail: eatamas@cs.msu.ru .

Cite this article as: E. I. Atamas', A. V. Il'in. On the reduction of systems with incommensurate delays to a form with zero dynamics. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 30–37.