

УДК 517.977

**ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ КУСОЧНО-КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ
ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ ЦЕЛЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ¹****И. А. Чистяков, П. А. Точилин**

Рассматривается метод приближенного решения задач разрешимости и синтеза управлений для нелинейной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на фиксированном отрезке времени. Метод основан на гибридизации уравнений и переходе к эквивалентным задачам для кусочно-линейной системы. Далее строится функция цены, которая ищется как приближенное решение уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана, и применяется принцип сравнения. При этом решение выбирается из класса кусочно-квадратичных функций. Для повышения точности метода допускается, что указанная функция цены может иметь разрывы на определенных множествах в фазовом пространстве. В работе представлен численный алгоритм для нахождения управления в форме обратной связи. Кроме того, получена априорная оценка погрешности попадания в целевое множество для исходной нелинейной системы.

Ключевые слова: нелинейная динамика, синтез управлений, динамическое программирование, принцип сравнения, линеаризация, система с переключениями, кусочно-квадратичная функция цены.

I. A. Chistyakov, P. A. Tochilin. Construction of discontinuous piecewise quadratic value functions in a target control problem.

We consider a method for the approximate solution of solvability and control synthesis problems for a nonlinear autonomous system of ordinary differential equations on a fixed time interval. The proposed method is based on hybridization of equations and consideration of equivalent problems for a piecewise linear system. Next, the value function is constructed as an approximate solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation, and the comparison principle is applied. The solution is chosen from the class of piecewise quadratic functions. To improve the accuracy of the method, the specified value function is assumed to have discontinuities on certain sets in the state space. We propose a numerical algorithm for feedback control calculation and obtain an a priori error estimate of reaching the target set for the original nonlinear system.

Keywords: nonlinear dynamics, control synthesis, dynamic programming, comparison principle, linearization, switched system, piecewise quadratic value function.

MSC: 93C10, 49L20, 34A38

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-259-273

Введение

Данная работа посвящена поиску приближенного решения задачи целевого управления на конечном интервале времени для нелинейной автономной системы дифференциальных уравнений. Предложен метод, основанный на кусочной линеаризации нелинейных членов и переходе к задаче управления для системы с кусочно-линейной динамикой с учетом погрешности линеаризации.

Для решения задачи применяются методы динамического программирования, в том числе принцип сравнения [1; 2, гл. V] и кусочно-заданные функции цены, определенные на совокупности симплексов в фазовом пространстве [3; 4]. Нулевое множество уровня построенной функции цены позволяет получить внутреннюю оценку множества разрешимости исходной нелинейной системы, содержащего все стартовые позиции, из которых можно решить задачу синтеза управлений для перевода траектории системы в заданное целевое множество на фиксированном отрезке времени.

¹Результаты разд. 1–3, 6–9 получены первым автором при содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2022-284). Результаты разд. 4–5 получены вторым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00042).

Известно, что искомая функция цены удовлетворяет попятному уравнению Гамильтона — Якоби — Беллмана (далее — уравнение ГЯБ) с заданными краевыми условиями. В общем случае ее необходимо искать как обобщенное решение указанного уравнения [5; 6], однако при разработке численного метода удобно подбирать приближенное решение из некоторого параметрически заданного класса функций. Наилучший выбор такого класса остается открытым вопросом. В исследованиях [7; 8] использовались кусочно-квадратичные функции цены, однако на них было наложено требование непрерывности, что приводило к дополнительному “сглаживанию” функций на границах симплексов и негативно отражалось на точности метода. В [9; 10] была предложена схема построения разрывных функций цены, однако сами функции рассматривались лишь как кусочно-аффинные. В настоящей статье предлагается объединить преимущества обоих подходов и построить разрывную кусочно-квадратичную функцию цены и, кроме того, использовать вспомогательные задачи оптимизации в вершинах симплексов, что позволяет “склеить” квадратичные функции цены в местах разрывов более аккуратно, нежели в [8]. Причем оптимизационные задачи ставятся таким образом, что симплексы, пересекающиеся в вершине, можно обрабатывать последовательно, снижая вычислительную сложность алгоритма.

В результате предложен эффективный численный метод для поиска параметров неизвестной функции цены и построения соответствующего позиционного управления. Работа алгоритма, реализующего идеи указанного приближенного метода, продемонстрирована на модельном примере.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную стационарную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

где Ω — выпуклый многогранник в пространстве \mathbb{R}^{n_x} , достаточно большой, чтобы все рассматриваемые траектории системы (1.1) оставались в Ω при $t \in [t_0, t_1]$; нелинейные вектор-функция $\mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^{n_x}$ и матричная функция $\mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ дважды непрерывно дифференцируемы по x . Начальный и конечный моменты времени t_0, t_1 фиксированы. На управление u наложено точечное ограничение: $u \in \mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P) \in \mathbb{R}^{n_u}$, где $\mathcal{E}(p, P)$ — эллипсоид с центром $p \in \mathbb{R}^{n_u}$ и матрицей конфигурации $P = P^T > 0, P \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$.

Через $\rho(\ell|X)$ будем далее обозначать значение опорной функции ко множеству X в направлении, заданном вектором ℓ . В частности, для эллипсоида $\mathcal{E}(p, P)$

$$\rho(\ell|\mathcal{E}(p, P)) = \langle \ell, p \rangle + \sqrt{\langle \ell, P\ell \rangle} \quad \forall \ell \in \mathbb{R}^{n_u}.$$

Пусть \mathcal{U}_f — класс допустимых позиционных управлений, содержащий многозначные отображения $u = u(t, x) \subseteq \mathcal{P}$, при подстановке которых в уравнение (1.1) получаются дифференциальные включения, имеющие решения при любом начальном векторе фазовых переменных $x_0 \in \Omega$. Под решением такого дифференциального включения понимается абсолютно непрерывная функция $x(t) = x(t; t_0, x_0)|_{u(\cdot)}$, для которой выполнено $x(t_0) = x_0$ и которая удовлетворяет данному включению при почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Решения рассматриваются только до возможного момента их выхода из области Ω .

Требуется построить управляющую стратегию в позиционной форме $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$, которая переводит систему (1.1) из заданной позиции x_0 в момент времени t_0 в компактное целевое множество $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$ в момент времени t_1 . Если попасть во множество \mathcal{X}_1 нельзя, необходимо достичь как можно меньшей его окрестности:

$$x(t_1; t_0, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1 + B_\mu(0),$$

где $B_\mu(0)$ — шар радиуса μ с центром в нуле, а значение $\mu \geq 0$ необходимо минимизировать.

Будем также считать, что множество \mathcal{X}_1 представимо в виде $\mathcal{X}_1 = \{x \in \Omega : \phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leq 0\}$ для некоторой заданной функции $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$, ограничения на которую будут указаны далее.

2. Система с кусочно-аффинной динамикой

Разобьем область Ω на N симплексов $\Omega^{(i)}$ с вершинами $g_1^{(i)}, \dots, g_{n_x+1}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x}$, где $i = \overline{1, N}$. Здесь и далее верхний индекс в скобках указывает на соответствие величины, вектора или функции тому или иному симплексу с указанным номером. Помимо локальной нумерации вершин в каждом симплексе далее будем использовать глобальную нумерацию: g_1, \dots, g_S , где S — общее количество уникальных вершин. Через $\sigma(i, l)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, n_x + 1}$, обозначим номер вершины g_l в локальной нумерации симплекса $\Omega^{(i)}$, т. е. $g_{\sigma(i, l)}^{(i)} = g_l$.

Для каждого симплекса $\Omega^{(i)}$ составим из векторов-столбцов $g_1^{(i)}, \dots, g_{n_x+1}^{(i)}$ матрицу $G^{(i)}$:

$$G^{(i)} = \begin{bmatrix} g_1^{(i)} & \dots & g_{n_x+1}^{(i)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)}.$$

Известно, что каждый вектор $x \in \Omega^{(i)}$ однозначно определяется барицентрическими координатами $\alpha^{(i)}(x) = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{n_x+1}^{(i)})^T$:

$$G^{(i)} \alpha^{(i)}(x) = x, \quad \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) = 1, \quad \alpha_l^{(i)}(x) \geq 0 \quad \forall l. \quad (2.1)$$

Определим “расширенную” матрицу $\tilde{G}^{(i)}$:

$$\tilde{G}^{(i)} = \begin{bmatrix} g_1^{(i)} & \dots & g_{n_x+1}^{(i)} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}. \quad (2.2)$$

Из определения симплекса следует, что $\det(\tilde{G}^{(i)}) \neq 0$, поэтому существует обратная матрица $\tilde{H}^{(i)} = (\tilde{G}^{(i)})^{-1}$. Тогда из (2.1), (2.2) получим $\tilde{G}^{(i)} \alpha^{(i)}(x) = (x^T, 1)^T$, $\alpha^{(i)}(x) = \tilde{H}^{(i)} \cdot (x^T, 1)^T$. Таким образом, матрица $\tilde{H}^{(i)}$ позволяет вычислить вектор барицентрических координат $\alpha^{(i)}(x)$ точки $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ по “расширенному” вектору $(x^T, 1)^T \in \mathbb{R}^{n_x+1}$.

Для удобства выделим в матрице $\tilde{H}^{(i)}$ две блочные части

$$\tilde{H}^{(i)} = (H^{(i)} \ h^{(i)}), \quad H^{(i)} \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times n_x}, \quad h^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x+1},$$

и введем дополнительные обозначения

$$F^{(i)} = (\mathbf{f}(g_1^{(i)}), \dots, \mathbf{f}(g_{n_x+1}^{(i)})) \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)},$$

$$A^{(i)} = F^{(i)} H^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad B^{(i)} = \frac{1}{n_x + 1} \sum_{l=1}^{n_x+1} \mathbf{g}(g_l^{(i)}) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad f^{(i)} = F^{(i)} h^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Нелинейную функцию $\mathbf{f}(x)$ в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$ можно приблизить функцией $A^{(i)}x + f^{(i)}$, причем в произвольной вершине $g \in \Omega^{(i)}$ их значения будут совпадать:

$$\mathbf{f}(g) = F^{(i)} \cdot \alpha^{(i)}(g) = F^{(i)} \tilde{H}^{(i)} (g^T, 1)^T = F^{(i)} H^{(i)} g + F^{(i)} h^{(i)} = A^{(i)} g + f^{(i)}.$$

Используя также приближенное равенство $\mathbf{g}(x)u \approx B^{(i)}u$, $x \in \Omega^{(i)}$, для правой части нелинейной системы (1.1) можно записать следующее представление:

$$\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u = A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + v^{(i)}(x), \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad (2.3)$$

где $v^{(i)}$ — погрешность полученной локальной линеаризации. Эта погрешность является ограниченной, и для нее существует оценка [10], не зависящая от конкретного значения x в области $\Omega^{(i)}$. Таким образом, все возможные значения вектора $v^{(i)}$ можно ограничить некоторым эллипсоидом $\mathcal{Q}^{(i)} = \mathcal{E}(0, Q^{(i)})$.

Исходную систему (1.1) с учетом (2.3) также можно переписать для расширенного пространства переменных, в котором $\tilde{x} = (x^T, 1)^T$:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}^{(i)}\tilde{x} + \tilde{B}^{(i)}u + \tilde{C}v^{(i)}, \quad \tilde{x} \in \Omega^{(i)} \times 1, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$\tilde{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} A^{(i)} & f^{(i)} + B^{(i)}p \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}^{(i)} = \begin{bmatrix} B^{(i)} \\ \mathbb{O}_{1 \times n_u} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_x \times n_x} \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} \end{bmatrix},$$

где $u \in \mathcal{E}(0, P)$. Здесь $\mathbb{O}_{1 \times n_x}$ и $\mathbb{I}_{n_x \times n_x}$ — нулевая и единичная матрицы указанных размеров; индекс $i = i(x(t))$ есть функция от фазовых переменных в момент времени t ; для краткости записи аргументы этой функции будем опускать.

3. Функция цены

3.1. Основные понятия

Множеством разрешимости $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ [2] системы (1.1) в классе позиционных управлений в фиксированный момент времени $t \in [t_0, t_1]$ называется совокупность всех векторов $x \in \Omega$, для каждого из которых существует допустимое управление $u \in \mathcal{U}_f$, переводящее любую соответствующую траекторию $x(\tau) = x(\tau, t, x)|_{u(\cdot)}$, $\tau \in [t, t_1]$, выпущенную из позиции $\{t, x\}$, в целевое множество: $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$.

В данной работе предполагается, что при допустимых управлениях $u \in \mathcal{U}_f$ траектории, стартующие из \mathcal{X}_1 в обратном времени, не могут покинуть множество Ω на всем отрезке $[t_0, t_1]$.

Рассмотрим вспомогательную функцию цены

$$\mathcal{V}(t, x) = \min_{u \in \mathcal{U}_f} \max_{x(\cdot)} \{ \phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1)) : x(t) = x \},$$

где $x(\cdot)$ — траектория системы (1.1) с нелинейной правой частью, выпущенная в прямом времени из начальной позиции $\{t, x\}$ при фиксированном управлении $u(\cdot)$. Функция цены связана со множеством разрешимости соотношением $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \{x \in \Omega : \mathcal{V}(t, x) \leq 0\}$. Будем также рассматривать μ -окрестность множества разрешимости

$$\mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \{x \in \Omega : \mathcal{V}(t, x) \leq \mu\}, \quad \mu \geq 0.$$

В точке дифференцируемости (t, x) , $t < t_1$, $x \in \Omega$, функция $\mathcal{V}(t, x)$ удовлетворяет понятному уравнению ГЯБ:

$$\frac{\partial \mathcal{V}(t, x)}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{P}} \left\langle \frac{\partial \mathcal{V}(t, x)}{\partial x}, \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u \right\rangle = 0.$$

В конечный момент времени выполняется условие $\mathcal{V}(t_1, x) = \phi_{\mathcal{X}_1}(x) \quad \forall x \in \Omega$.

Следующий подраздел посвящен поиску такой кусочно-квадратичной функции $V(t, \tilde{x})$, что уравнение ГЯБ будет выполняться приближенно.

3.2. Разрывная кусочно-квадратичная функция цены

Каждой вершине $g_l \in \Omega^{(i)}$ сопоставим аффинную по x функцию $\langle k_l^{(i)}(t), \tilde{x} \rangle$, где при любом фиксированном $t \in [t_0, t_1]$ вектор $k_l^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ — это вектор неизвестных параметров. При этом если $g_l \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$, то, вообще говоря, значения $k_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t)$ и $k_{\sigma(j,l)}^{(j)}(t)$ могут быть разными.

Для каждого симплекса $\Omega^{(i)}$ можно определить матрицу параметров, структура которой соответствует набору вершин $g_1^{(i)}, \dots, g_{n_x+1}^{(i)}$:

$$K^{(i)}(t) = \left[k_1^{(i)}(t), \dots, k_{n_x+1}^{(i)}(t) \right] \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}.$$

Во внутренних точках симплексов определим кусочно-квадратичную функцию цены следующим образом:

$$V(t, \tilde{x}) = V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle, \quad x \in \text{int } \Omega^{(i)}. \quad (3.1)$$

Формула (3.1) соответствует интерполяции рассмотренных аффинных функций в вершинах:

$$V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \alpha^{(i)}(x) \rangle = \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) \langle k_l^{(i)}(t), \tilde{x} \rangle.$$

На общей границе нескольких симплексов, а также на границе $\partial\Omega$ доопределим функцию $V(t, \tilde{x})$ как минимум из функций (3.1) с соответствующих приграничных множеств. Отметим, что введенная функция цены является лишь кусочно-непрерывной и может иметь разрывы на границах симплексов.

Будем использовать многозначные кусочно-аффинные управления $\mathcal{U} = \mathcal{U}(t, x)$:

$$\mathcal{U}(t, x) = \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) \mathcal{Y}_l^{(i)}(t), \quad (3.2)$$

где $\mathcal{Y}_l^{(i)}(t) \subseteq \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}$, $l = \overline{1, n_x+1}$, — многозначные отображения с выпуклыми, компактными значениями. Отображения $\mathcal{Y}_l^{(i)}$ будут заданы далее. Через $u^*(t, x)$ обозначим измеримый по t для любого x селектор отображения $\mathcal{U}(t, x)$:

$$u^*(t, x) = Y^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} = \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) y_l^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}.$$

Здесь матрица $Y^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+1)}$ составлена из столбцов $y_l^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_u}$ — значений $u^*(t, g_l^{(i)})$ управления в вершинах $g_l^{(i)}$ симплекса $\Omega^{(i)}$. В силу выпуклости множества \mathcal{P} достигается условие $u^*(\cdot) \in \mathcal{P}$.

Отметим, что многозначные управления вида (3.2) могут иметь разрывы не только по переменной t , но и по переменной x . При этом однако будет показано, что на каждой конкретной траектории системы (1.1) может быть лишь конечное количество таких точек разрыва. Это позволяет свести задачу исследования допустимости управления к известным результатам для случая с непрерывной по x правой частью.

Запишем производную функции цены по направлению $\ell = (\ell_t, \ell_x)^T \in \mathbb{R}^{n_x+2}$:

$$\frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) = \ell_t \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \langle \ell_x, [K^{(i)} \tilde{H}^{(i)} + (\tilde{H}^{(i)})^T (K^{(i)})^T] \tilde{x} \rangle. \quad (3.3)$$

Эта производная имеет смысл при любых ℓ_x , если x лежит строго внутри симплекса $\Omega^{(i)}$, а также в случаях, когда $x \in \partial\Omega^{(i)}$ и вектор ℓ_x направлен не вовне этого симплекса.

Для удобства обозначений введем величину $\mathcal{K}^{(i)} = (\mathcal{K}^{(i)})^T = K^{(i)} \tilde{H}^{(i)} + (\tilde{H}^{(i)})^T (K^{(i)})^T$. Тогда из (3.3) при $\ell = (\ell_t, \ell_x)^T \in \mathbb{R}^{n_x+2}$, где $\ell_t = 1$, $\ell_x = \tilde{A}^{(i)} \tilde{x} + \tilde{B}^{(i)} u^* + \tilde{C} v^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x+1}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) &= \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{A}^{(i)} \tilde{x} + \tilde{B}^{(i)} u^* + \tilde{C} v^{(i)}, \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \rangle \\ &= \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, (\tilde{A}^{(i)})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, \mathcal{K}^{(i)} \tilde{B}^{(i)} Y^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \langle v^{(i)}, (\tilde{C})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В работе [8] было показано существование таких матрицы $\Gamma^{(i)}$ и константы $\gamma^{(i)}$, что из равенства (3.4) вытекает оценка

$$\frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) \leq \langle \tilde{x}, [\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)}] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle, \quad (3.5)$$

$$Z^{(i)} = Z^{(i)}(K^{(i)}) = (\tilde{A}^{(i)})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{G}^{(i)} + \mathcal{K}^{(i)} \tilde{B}^{(i)} Y^{(i)} + \Gamma^{(i)} \tilde{G}^{(i)} + (4\gamma^{(i)})^{-1} \mathcal{K}^{(i)} \tilde{C} Q^{(i)} (\tilde{C})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{G}^{(i)}. \quad (3.6)$$

Приравнивая выражения $[\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)}]$ для всех i к нулевой матрице, получим систему матричных дифференциальных уравнений, которая и будет задавать изменение функции цены с течением времени:

$$\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)}(K^{(i)}) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.7)$$

Тогда из (3.5) следует, что во внутренних точках каждого отдельного симплекса функция цены не возрастает вдоль траектории движения системы. Однако при переходе траектории между различными симплексами это утверждение может не выполняться, поскольку определенная в соответствии с (3.1) и (3.7) функция цены, вообще говоря, терпит разрывы на границах симплексов. Этот недочет будет исправлен в последующих разделах.

3.3. Граничные условия

Далее предположим, что границей целевого множества \mathcal{X}_1 является гиперповерхность второго порядка. Тогда функция $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ есть квадратичная форма в “расширенном” пространстве переменных: $\phi_{\mathcal{X}_1}(x) = \langle \tilde{x}, \hat{K} \tilde{x} \rangle$, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$.

Следовательно, в конечный момент времени t_1 для каждого $i = \overline{1, N}$ можно выбрать следующие значения параметров функции цены $V^{(i)} = \langle \tilde{x}, K^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle$:

$$K^{(i)}(t_1) = \hat{K} \cdot (\tilde{H}^{(i)})^{-1} = \hat{K} \tilde{G}^{(i)}. \quad (3.8)$$

Отметим, что при граничных условиях (3.8) в конечный момент времени функция цены непрерывна.

4. Достижимость симплексов

Пусть $\mathcal{K} = \{(i, l) : i \in \{1, \dots, N\}, l \in \{1, \dots, S\}, g_l \in \Omega^{(i)}\}$.

В данном разделе будем полагать, что множества $\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t) \subseteq \mathcal{P}$, $(i, l) \in \mathcal{K}$, соответствующие произвольной вершине $g_l \in \Omega^{(i)}$, могут различаться при разных i . Далее потребуется выбрать их таким образом, чтобы траектория исходной нелинейной системы (1.1) не смогла перейти в соседний симплекс, если на общей границе симплексов возможно возрастание функции цены вдоль траектории движения. Однако для этого сперва требуется формализовать понятие *достижимости симплексов* при заданных $\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t) \subseteq \mathcal{P}$ в произвольный момент времени $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть \mathcal{H}_{ij} — некоторая фиксированная гиперплоскость размерности $n_x - 1$ в \mathbb{R}^{n_x} , такая что $\Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)} \subset \mathcal{H}_{ij}$, причем $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ лежат в разных полупространствах относительно \mathcal{H}_{ij} . Пусть также n_{ij} — единичная нормаль к \mathcal{H}_{ij} , указывающая в сторону $\Omega^{(i)}$. Будем говорить, что симплекс $\Omega^{(j)}$ *достижим из* $\Omega^{(i)}$ в момент времени t , если

$$\min \left\{ (n_{ij})^T (A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + v) : x \in \mathcal{H}_{ij}, v \in \mathcal{Q}^{(i)}, u \in \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l(x) \mathcal{Y}_l^{(i)}(t) \right\} \leq 0. \quad (4.1)$$

Таким образом, если существует точка на общей границе симплексов, такая что при некотором допустимом управлении вектор скорости нелинейной системы (1.1) направлен в сторону симплекса $\Omega^{(j)}$ относительно \mathcal{H}_{ij} , то в соответствии с введенным определением симплекс $\Omega^{(j)}$ гарантированно достижим из $\Omega^{(i)}$. При этом полученное определение достижимости является необходимым, но не достаточным условием того, что траектория системы (1.1) может попасть из одного симплекса в другой, соседний.

После преобразования из (4.1) имеем следующее эквивалентное соотношение:

$$\min \left\{ (n_{ij})^T (A^{(i)}g_s + f^{(i)}) - \rho(-n_{ij} | B^{(i)}\mathcal{Y}_{\sigma(i,s)}^{(i)}(t)) - \rho(-n_{ij} | \mathcal{Q}^{(i)}) \mid g_s \in \mathcal{N}(i, j) \right\} \leq 0,$$

где $\mathcal{N}(i, j) = \{g \in \{g_1, \dots, g_S\} : g \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}\}$ — множество общих вершин двух симплексов.

Для каждой вершины $g_l \in \mathcal{N}(i, j)$ введем также обозначение

$$\mathcal{P}_{ijl} = \left\{ u \in \mathcal{P} : (n_{ij})^T (A^{(i)} g_l + B^{(i)} u + f^{(i)}) - \rho(-n_{ij} | \mathcal{Q}^{(i)}) \geq 0 \right\}.$$

Если $\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)} \subseteq \mathcal{P}_{ijl}$ для любой вершины $g_l \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$, то при использовании кусочно-аффинного управления (3.2) траектория системы гарантированно не может перейти из $\Omega^{(i)}$ в $\Omega^{(j)}$ через их общую границу. Заметим, что для некоторых i, j, l множества \mathcal{P}_{ijl} могут оказаться пустыми.

Пусть i_1, \dots, i_m — номера всех симплексов, включающих вершину g_l . Для каждого номера $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$ определим множество

$$\mathcal{I}(i, l, \bar{\mathcal{Y}}(t)) = \left\{ j \in \{i_1, \dots, i_m\}, j \neq i, \Omega^{(j)} \text{ достижим из } \Omega^{(i)} \right\} \cup \{i\}.$$

Здесь и далее через $\bar{\mathcal{Y}}(t)$ обозначена совокупность величин $\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t)$ для всех $(i, l) \in \mathcal{K}$.

Будем говорить, что при заданных функциях $\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t)$ соответствующее кусочно-аффинное управление является допустимым, если выполнено следующее условие:

$$\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t) = \mathcal{Y}_{\sigma(j,l)}^{(j)}(t), \quad \forall i, j, l : (i, l) \in \mathcal{K}, \quad (j, l) \in \mathcal{K}, \quad i \in \mathcal{I}(j, l, \bar{\mathcal{Y}}(t)), \quad j \in \mathcal{I}(i, l, \bar{\mathcal{Y}}(t)). \quad (4.2)$$

При подстановке допустимого управления в исходную систему (1.1) при любом заданном начальном значении $x(t_0)$ будет разрешима соответствующая задача Коши для дифференциального включения, а любое ее решение $x(t, t_0, x_0)$ определено при $t \in [t_0, t_1]$. Условие (4.2) гарантирует, что на границах взаимодостижимых симплексов правая часть замкнутой системы (1.1) будет непрерывной по x , причем на границах любых размерностей.

5. Алгоритм построения разрывного управления

Цель алгоритма — нахождение в каждый фиксированный момент времени $t \in [t_0, t_1]$ множеств $\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t) \subset \mathcal{P}$, которые затем будут использованы для построения функции цены. При этом должно быть выполнено условие (4.2). Поскольку момент времени считается фиксированным, то зависимость от t будем опускать.

- 1) Рассмотрим вспомогательные множества $\mathcal{J}(i, l)$, $(i, l) \in \mathcal{K}$. Далее множества $\mathcal{J}(i, l)$ будут хранить номера симплексов, учитываемых для “склейки” функции цены и управлений. Изначально $\mathcal{J}(i, l) = \{i\}$.
- 2) Определим множества:

$$\mathcal{S}(i, l) = \left\{ j \mid (j, l) \in \mathcal{K}, j \neq i, \exists g \in \mathcal{N}(i, j) : \langle k_{\sigma(j,l)}^{(j)}, \tilde{g} \rangle > \langle k_{\sigma(i,l)}^{(i)}, \tilde{g} \rangle \right\}, \quad \tilde{g} = (g^T, 1)^T,$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{il} = \begin{cases} \mathcal{P} \cap \left(\bigcap_{j \in \mathcal{S}(i,l)} \mathcal{P}_{ijl} \right), & \text{если } \mathcal{S}(i, l) \neq \emptyset, \\ \mathcal{P}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Множество $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$ задает множество управлений, использование которых не приведет к попаданию траектории из симплекса $\Omega^{(i)}$ в симплекс с большим значением функции цены; далее это будет доказано. Выберем управления из $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$ таким образом, чтобы они были наиболее близки к управлению, реализующему операцию \min_u в уравнении ГЯБ.

Тогда из (3.5) с учетом обозначения

$$\eta_{\sigma(i,l)}^{(i)} = \langle \tilde{g}_l, [(\tilde{A}^{(i)})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{G}^{(i)} + \Gamma^{(i)} \tilde{G}^{(i)} + (4\gamma^{(i)})^{-1} \mathcal{K}^{(i)} \tilde{C} Q^{(i)} (\tilde{C})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{G}^{(i)}] \tilde{H}^{(i)} \tilde{g}_l \rangle,$$

получим следующую задачу:

$$\zeta(l, i, u) = \max_j \left\{ \langle \tilde{g}_l, \mathcal{K}^{(j)} \tilde{B}^{(j)} u \rangle + \eta_{\sigma(j,l)}^{(j)} \mid j \in \mathcal{J}(i, l) \right\}, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)} = \text{Argmin} \{ \zeta(l, i, u) : u \in \tilde{\mathcal{P}}_{il} \}. \quad (5.3)$$

- 3) Определим номера достижимых симплексов $\mathcal{I}(i, l, \bar{\mathcal{Y}})$ исходя из посчитанных на предыдущем шаге величин $\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)}$. Найдем все такие пары $(i, l) \in \mathcal{K}$, что

$$\exists j \in \mathcal{I}(i, l, \bar{\mathcal{Y}}), \exists g \in \mathcal{N}(i, j) : \langle k_{\sigma(j,l)}^{(j)}, \tilde{g} \rangle \geq \langle k_{\sigma(i,l)}^{(i)}, \tilde{g} \rangle, \quad \mathcal{J}(j, l) \not\subseteq \mathcal{J}(i, l). \quad (5.4)$$

Совокупность данных пар обозначим через \mathcal{D} . Для каждой $(i, l) \in \mathcal{D}$ дополним множество $\mathcal{J}(i, l)$ до множества $\mathcal{J}(i, l) \cup \{ \mathcal{J}(j, l) : j \text{ удовлетворяет (5.4)} \}$.

- 4) Если множество \mathcal{D} оказалось пустым, то алгоритм завершает работу. Иначе алгоритм переходит к следующему шагу.
- 5) Пересчитаем новое, “склеенное” управление в каждой вершине $g_{\sigma(i,l)}^{(i)}$ согласно формулам (5.2), (5.3), учитывая новое множество $\mathcal{J}(i, l)$. Алгоритм снова переходит к п. 3). \square

В итоге получена такая совокупность множеств $\bar{\mathcal{Y}}$, что если функция цены непрерывна на общей границе двух симплексов, а сами симплексы достижимы друг из друга, то выполнено условие (4.2). Если же функция цены терпит разрыв, то переход траектории в соседний симплекс с увеличением функции цены невозможен в силу выбора управлений из соответствующих множеств $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$.

Описанный выше алгоритм обязательно завершит свою работу за конечное количество итераций, так как на каждой итерации мощность хотя бы одного из множеств $\mathcal{J}(i, l)$ увеличивается на 1; если все множества $\mathcal{J}(i, l)$ максимальны, т.е. $\mathcal{J}(i, l) = \{ j \in \{1, \dots, N\} : g_l - \text{вершина } \Omega^{(j)} \}$, то полученное в результате кусочно-аффинное управление будет непрерывным по x , допустимым и будет соответствовать пустому множеству \mathcal{D} .

Определенное в соответствии с приведенным алгоритмом кусочно-аффинное управление, а также множества $\mathcal{J}(i, l)$ могут быть далее использованы для построения разрывной кусочно-квадратичной оценки функции цены.

6. Изменение нумерации симплексов

Прежде чем указать окончательный способ построения функции $V(t, \tilde{x})$, требуется для каждой вершины g_l упорядочить содержащие ее симплексы $\Omega^{(i)}$ на основе найденных множеств $\mathcal{J}(i, l)$ — это позволит последовательно вычислять векторы неизвестных коэффициентов в разных симплексах. Для этого удобно перейти к анализу графов.

Пусть вершине g_l сопоставлен ориентированный граф $G_l(V_l, E_l)$, допускающий существование петель, множеством вершин которого является $V_l = \{ i : (i, l) \in \mathcal{K} \}$, а множеством ребер — $E_l = \{ (i, j) : j \in \mathcal{J}(i, l) \}$. Будем говорить, что вершина $v \in V_l$ *достижима* из вершины $w \in V_l$, если в графе G_l существует путь из w в v . Таким образом, необходимо упорядочить вершины графа на основе их достижимости друг из друга. Задача, однако, усложняется возможным наличием циклов в графе G_l .

Компонентой сильной связности назовем такое максимальное по включению подмножество вершин $C \subseteq V_l$, что любые две вершины этого подмножества достижимы друг из друга. Очевидно, что различные компоненты сильной связности не пересекаются.

Графом конденсации называется граф, получаемый из данного графа сжатием каждой компоненты сильной связности в одну вершину. Каждой вершине графа конденсации соответствует компонента сильной связности графа G_l (возможно, состоящая из одного элемента), а

ориентированное ребро между двумя вершинами C_i и C_j графа конденсации проводится, если найдется пара вершин $w \in C_i$, $v \in C_j$, между которыми существовало ребро в исходном графе, т. е. $(w, v) \in E_l$. Также очевидно, что граф конденсации не содержит циклов.

Топологической сортировкой называется такая нумерация вершин ациклического ориентированного графа, при которой каждое ребро графа ведет из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.

Для поиска компонент сильной связности (и соответственно, циклов) в графе G_l можно применить алгоритм Тарьяна [11] или алгоритм Косарайю — Шарира [12], к тому же в качестве побочного результата получается топологическая сортировка графа конденсации. Следовательно, можно перенумеровать вершины исходного графа G_l таким образом, что будет выполнено

$$i_1 < i_2 \Rightarrow \mathcal{M}(i_1, l) \subseteq \mathcal{M}(i_2, l) \text{ или } \mathcal{M}(i_1, l) \cap \mathcal{M}(i_2, l) = \emptyset, \quad (6.1)$$

где $\mathcal{M}(i, l)$ — множество вершин графа G_l , достижимых из вершины графа с номером i .

Далее через $\mathcal{C}(i, l)$ будем обозначать номера вершин, входящих в одну компоненту сильной связности с вершиной i в графе G_l .

7. Основной результат

Следующая теорема позволяет построить внутреннюю оценку функции цены на всем отрезке времени $[t_0, t_1]$ на основе разрывных управлений, в каждый фиксированный момент времени полученных с помощью описанного выше алгоритма. При этом для вычисления неизвестных коэффициентов функции $V^{(i)}(t, \tilde{x})$ используются вспомогательные задачи оптимизации, которые поставлены таким образом, что в каждой вершине g_l соответствующие ей векторы $k_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t)$ при различных i можно вычислять последовательно, в порядке обхода (6.1), на основе уже обработанных симплексов. Добиться этого удастся за счет того, что в каждой вершине g_l для всех i из одной сильной компоненты связности решения задач оптимизации будут одинаковы.

Теорема 1. Пусть для каждого $t \in [t_0, t_1]$ в соответствии с приведенным выше алгоритмом определены многозначные отображения $\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t) \subseteq \mathcal{P}$, а также множества $\mathcal{J}(i, l)$ и $\mathcal{C}(i, l)$, $(i, l) \in \mathcal{K}$. Пусть симплексы $\Omega^{(i)}$ пронумерованы согласно (6.1). Пусть также для каждого $(i, l) \in \mathcal{K}$ величина $\zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$ является решением следующей оптимизационной задачи:

$$P_l^{(i)}(t) : \begin{cases} \langle \zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t), \tilde{g}_{\sigma(i,l)}^{(i)} \rangle + \varepsilon \|\zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t)\|^2 \rightarrow \min_{\zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}}, \\ \langle \zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t), \tilde{g} \rangle \geq \langle z_{\sigma(j,l)}^{(j)}(t), \tilde{g} \rangle \quad \forall g - \text{вершина } \Omega^{(j)}, \quad \forall j \in \mathcal{C}(i, l), \\ \langle \zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t), \tilde{g} \rangle \geq \langle \zeta_{\sigma(j,l)}^{(j)}(t), \tilde{g} \rangle \quad \forall j \in \mathcal{J}(j_1, l) \setminus \mathcal{C}(i, l), \quad \forall j_1 \in \mathcal{C}(i, l), \\ \text{при } \forall g \in \mathcal{N}(j, j_1), \end{cases} \quad (7.1)$$

где $z_{\sigma(i,l)}^{(i)}$ — столбец с номером $\sigma(i, l)$ матрицы $Z^{(i)}$ из (3.6), а различные задачи $P_l^{(i)}(t)$ решаются в порядке возрастания индекса (i) при каждом фиксированном l .

Рассмотрим систему векторных ОДУ

$$\dot{k}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t) = -\zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (7.2)$$

Граничное условие $k_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t_1)$ определяется как столбец с номером $\sigma(i, l)$ матрицы $K^{(i)}(t_1)$ из формулы (3.8).

Пусть $V(t, \tilde{x})$ — разрывная кусочно-квадратичная функция, определенная согласно формуле (3.1) на основе решений систем (7.2). Тогда множество

$$\mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t_0) = \{x \in \Omega \mid V(t_0, \tilde{x}) \leq \mu\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости: $\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1)$.

Доказательство. Сначала докажем, что для любого $t \in [t_0, t_1]$ множества $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$, определенные согласно (5.1), не пусты, а значит, указанный выше алгоритм корректен. При $t = t_1$ кусочно-квадратичная функция $V(t, \tilde{x})$ непрерывна, и потому $\tilde{\mathcal{P}}_{il} = \mathcal{P}$ для всех $(i, l) \in \mathcal{K}$.

Предположим, что для некоторых i, l , в некоторый момент времени $t^* < t_1$ выполнено $\tilde{\mathcal{P}}_{il} = \emptyset$. Тогда найдется такое значение $\tilde{t} \in [t^*, t_1)$, что

1. $\forall j = j_1, \dots, j_r \quad \forall g \in \mathcal{N}(i, j) \quad \langle k_{\sigma(j,l)}^{(j)}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle \geq \langle k_{\sigma(i,l)}^{(i)}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle$, но если в вершине $g^* \in \mathcal{N}(i, j)$ достигается равенство

$$\langle k_{\sigma(j,l)}^{(j)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle = \langle k_{\sigma(i,l)}^{(i)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle, \quad (7.3)$$

то обязательно выполнено неравенство для производных:

$$\langle \dot{k}_{\sigma(j,l)}^{(j)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle < \langle \dot{k}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle. \quad (7.4)$$

2. $\forall j = j_{r+1}, \dots, j_m \quad j \in \mathcal{S}(i, l)$.

Здесь j_1, \dots, j_m — все номера симплексов, содержащих вершину g_l , за исключением i . При этом обязательно $r \geq 1$. Кроме того, момент времени \tilde{t} можно взять такой, что $\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(\tilde{t} + 0) \neq \emptyset$. Проанализируем теперь множество $\mathcal{I}(i, l, \bar{\mathcal{Y}}(\tilde{t} + 0))$. Возможен один из двух описанных ниже случаев.

1) Если $\mathcal{I}(i, l, \bar{\mathcal{Y}}(\tilde{t} + 0)) = \{i\}$, то для i -го симплекса существует управление, для которого траектория системы (1.1), выпущенная из вершины g_l , будет направлена внутрь этого симплекса. В силу стационарности системы это управление будет обладать указанным свойством и при всех $t < \tilde{t}$, а значит, $\tilde{\mathcal{P}}_{il} \neq \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1]$. Получено противоречие.

2) Существует $\tilde{j} \neq i$, $\tilde{j} \in \mathcal{I}(i, l, \bar{\mathcal{Y}}(\tilde{t} + 0))$. Тогда в силу ограничения (5.1), выполненного при $t > \tilde{t}$, обязательно $\tilde{j} \in \{j_1, \dots, j_r\}$. Согласно (5.4) $\tilde{j} \in \mathcal{J}(i, l)$ в момент времени \tilde{t} . Тогда при $\tilde{j} \notin \mathcal{C}(i, l)$ из второй группы ограничений в задаче (7.1) следует, что для любой вершины $g \in \mathcal{N}(i, \tilde{j})$ выполняется неравенство $\langle \zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle \geq \langle \zeta_{\sigma(\tilde{j},l)}^{(\tilde{j})}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle$; если же $\tilde{j} \in \mathcal{C}(i, l)$, это неравенство следует из того, что задачи (7.1) совпадают для всех симплексов внутри одной компоненты связности и имеют единственное решение в силу строгой выпуклости функционала. Используя неравенство (7.2), получим $\langle \dot{k}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle \leq \langle \dot{k}_{\sigma(\tilde{j},l)}^{(\tilde{j})}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle$ для всех $g \in \mathcal{N}(i, j)$. Пусть g^* — вершина, на которой достигается равенство в (7.3). Тогда $\langle \dot{k}_{\sigma(i,l)}^{(i)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle \leq \langle \dot{k}_{\sigma(\tilde{j},l)}^{(\tilde{j})}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle$, что противоречит неравенству (7.4).

Таким образом, доказана непустота множеств $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$. Рассмотрим управление

$$\mathcal{U}^*(t, x) = \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l(x) \mathcal{Y}_l^{(i)}(t), \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.5)$$

Функция $\mathcal{U}^*(t, x)$ непрерывна по x в каждом из симплексов, но может иметь разрывы на их границах. Однако, такое разрывное управление является допустимым, так как выполнено условие (4.2). Из указанного условия выводим, что разрыв управления на границе между симплексами $\Omega^{(i^*)}$ и $\Omega^{(i^{**})}$ возможен только в тех случаях, когда траектория системы может попасть из первого симплекса во второй либо обратно, но не туда и обратно одновременно при различных управлениях.

Заметим, что от векторных уравнений (7.2) мы можем вновь перейти к матричным уравнениям вида (3.7):

$$\dot{K}^{(i)}(t) + \hat{Z}^{(i)}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N},$$

где матрицы $\hat{Z}^{(i)}$ составлены из соответствующих векторов $\zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}$.

Для произвольного вектора $x_0 \in \mathcal{W}_\mu^{int}(t_0)$ определим некоторое решение замкнутой системы $x(t) = x(t, t_0, x_0)|_{\mathcal{U}^*(\cdot)}$, $t \in [t_0, t_1]$. Пусть $u^*(t, x(t))$ — однозначный селектор многозначного отображения $\mathcal{U}^*(t, x(t))$, порождающий рассматриваемую траекторию. Найдутся такие $t_0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{K-1} < \tau_K = t_1$, для которых на каждом из отрезков $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = \overline{1, K-1}$, траектория замкнутой системы либо находится в одном из симплексов $\Omega^{(i)}$, либо движется по границе нескольких (одних и тех же) симплексов $\Omega^{(i_1)}, \dots, \Omega^{(i_m)}$. Во втором случае симплексы достижимы друг из друга вследствие неравенства (4.1) и, следовательно, значения $V^{(i_1)}(t, \tilde{x}), \dots, V^{(i_m)}(t, \tilde{x})$ совпадают на общей границе симплексов.

При $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$ можно оценить производную функции цены вдоль траектории системы аналогично (3.5):

$$\begin{aligned} & V'(t, \tilde{x}(t); (1, \tilde{A}^{(i(t))}\tilde{x}(t) + \tilde{B}^{(i(t))}u^*(t, x(t)) + \tilde{C}v^{(i(t))}(x(t)))^T) \\ & \leq \langle \tilde{x}(t), [\dot{K}^{(i(t))} + Z^{(i(t))}]\tilde{H}^{(i(t))}\tilde{x}(t) \rangle = \langle \tilde{x}(t), \dot{K}^{(i(t))}\tilde{H}^{(i(t))}\tilde{x}(t) \rangle + \langle \tilde{x}(t), Z^{(i(t))}\alpha^{(i)}(x(t)) \rangle \\ & = \langle \tilde{x}(t), \dot{K}^{(i(t))}\tilde{H}^{(i(t))}\tilde{x}(t) \rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x(t))\langle \tilde{x}(t), z_l^{(i(t))} \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая ограничения задачи (7.1) и линейность рассматриваемых функций, можем продолжить это неравенство:

$$\begin{aligned} & V'(t, \tilde{x}(t); (1, \tilde{A}^{(i(t))}\tilde{x}(t) + \tilde{B}^{(i(t))}u^*(t, x(t)) + \tilde{C}v^{(i(t))}(x(t)))^T) \\ & \leq \langle \tilde{x}(t), \dot{K}^{(i(t))}\tilde{H}^{(i(t))}\tilde{x}(t) \rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x(t))\langle \tilde{x}(t), z_l^{(i(t))} \rangle \\ & \leq \langle \tilde{x}(t), \dot{K}^{(i(t))}\tilde{H}^{(i(t))}\tilde{x}(t) \rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x(t))\langle \tilde{x}(t), \zeta_l^{(i(t))} \rangle \\ & = \langle \tilde{x}(t), [\dot{K}^{(i(t))} + \hat{Z}^{(i(t))}]\tilde{H}^{(i(t))}\tilde{x}(t) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Из условия (5.1) и задач (7.1) вытекает, что описанный выше алгоритм определяет управление $\mathcal{U}^*(t, x)$, при котором для любых двух номеров симплексов i, j , таких что если $j \in \mathcal{I}(i, l, \bar{\mathcal{Y}}(t))$, то $V^{(i)}(t, \tilde{g}) \geq V^{(j)}(t, \tilde{g})$ для любой вершины $g \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$ для любого $t \in [t_0, t_1]$. Поскольку значение функции цены в произвольной точке Ω определяется как линейная комбинация аффинных функций в вершинах соответствующего симплекса, то $V^{(i)}(t, \tilde{x}) \geq V^{(j)}(t, \tilde{x})$ для любого $x \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$, $j \in \mathcal{I}(i, l, \bar{\mathcal{Y}}(t))$. Следовательно, любой разрыв сопровождается лишь уменьшением функции цены.

Тогда из (7.6) получим, что если $V(t_0, \tilde{x}(t_0)) \leq \mu$, то $V(t_1, \tilde{x}(t_1)) = \phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1)) \leq \mu$ и, значит, $\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1)$. \square

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема дает априорную оценку погрешности при использовании управления, соответствующего формулам (5.2), (5.3) и (7.5). Для синтеза управлений разумно использовать предварительно вычисленные значения $\mathcal{Y}_{\sigma(i,l)}^{(i)}$. Это позволяет максимально упростить процедуру построения позиционного управления, хотя всю необходимую информацию можно получить из анализа значений функции цены $V(t, \tilde{x})$.

8. Оптимизация вычислений

8.1. Поиск управлений в вершинах симплексов

Опишем решение задачи (5.2), (5.3). В соответствии с определением множества $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$ (5.1), требуется найти такие $s \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, что

$$\begin{cases} s \rightarrow \min_{s,u}, \\ s \geq \langle \tilde{g}_l, \mathcal{K}^{(j)} \tilde{B}^{(j)} u \rangle + \eta_{\sigma(j,l)}^{(j)} \quad \forall j \in \mathcal{J}(i,l), \\ \langle u, P^{-1}u \rangle \leq 1, \\ (n_{ij})^T (A^{(i)} g_l + B^{(i)} u + f^{(i)}) - \rho(-n_{ij} | \mathcal{Q}^{(i)}) \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{S}(i,l). \end{cases} \quad (8.1)$$

Введем следующие обозначения:

$$z = (s, u^T)^T \in \mathbb{R}^{n_u+1}, \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n_u+1}, \quad R = (\mathbb{O}_{n_u \times 1} \quad \mathbb{I}_{n_u \times n_u}) \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_u+1)}.$$

Тогда задачу (8.1) можно переформулировать иначе:

$$\begin{cases} \langle e_1, z \rangle \rightarrow \min_z, \\ \langle R^T (\tilde{B}^{(j)})^T \mathcal{K}^{(j)} \tilde{g}_l - e_1, z \rangle + \eta_{\sigma(j,l)}^{(j)} \leq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}(i,l), \\ \langle z, R^T P^{-1} R z \rangle - 1 \leq 0, \\ \langle -R^T (B^{(i)})^T n_{ij}, z \rangle + [\rho(-n_{ij} | \mathcal{Q}^{(i)}) - (n_{ij})^T (A^{(i)} g_l + f^{(i)})] \leq 0 \quad \forall j \in \mathcal{S}(i,l). \end{cases} \quad (8.2)$$

Задача (8.2) представляет собой задачу минимизации с линейно-квадратичными ограничениями, при этом матрица $R^T P^{-1} R$ симметрична и неотрицательно определена. Таким образом, задача может быть эффективно решена численно [13, гл. VI].

8.2. Вычисление функции цены

Заметим, что если симплексам $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$, $g_l \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$, соответствуют вершины графа G_l , лежащие в одной сильной компоненте связности, то задачи $P_l^{(i)}$ и $P_l^{(j)}$ из (7.1) полностью совпадают. При этом решение этих задач единственно, поскольку рассмотренный функционал является строго выпуклым. Следовательно, можно сократить количество задач оптимизации, воспользовавшись уже найденными решениями.

Вообще говоря, в задаче (7.1) можно рассматривать и другие функционалы. При условии, что в каждой сильной компоненте связности будет выбираться одно и то же решение в каждом симплексе, можно отказаться от квадратичного члена $\varepsilon \|\zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}(t)\|^2$, в результате чего задача (7.1) преобразуется к задаче линейного программирования и решается, например, с помощью симплекс-метода [14, с. 105–131]. Однако на практике квадратичный член необходим, чтобы коэффициенты функции цены не возрастали слишком сильно и чтобы, как следствие, функция цены не сильно возросла внутри симплексов. Линейный же член нужен, чтобы уменьшить значение функции цены в выбранной вершине.

9. Численный пример

В качестве примера рассмотрим движение маятника на тележке с учетом силы трения [15], которое описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin(x_1) - 2\gamma x_2 - w^2 \cos(x_1) \cdot u, \end{cases}$$

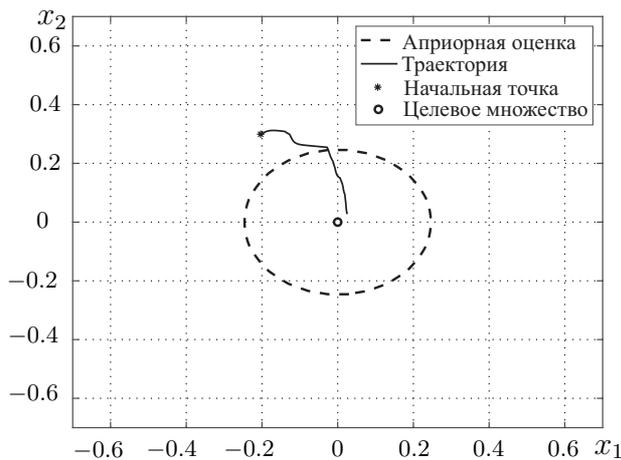


Рис. 1. Случай разрывной функции.

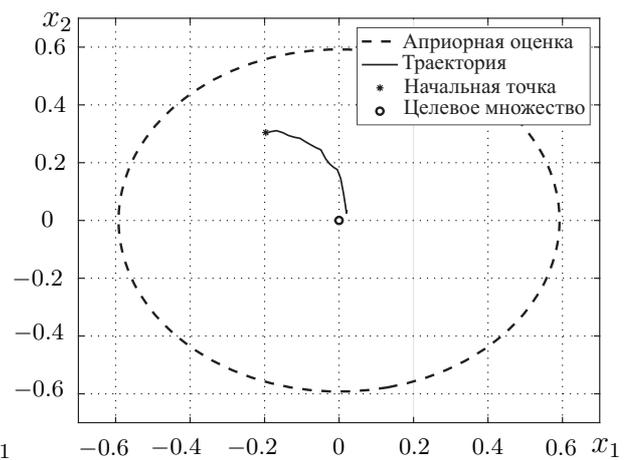


Рис. 2. Случай непрерывной функции.

где ω и γ — параметры, x_1 — угол отклонения маятника, x_2 — угловая скорость и управление u соответствует ускорению тележки. Пусть $\omega = 1$, $\gamma = 0.1$ и требуется перевести систему из начального положения $(-0.2, 0.4)^T$ при $t_0 = 0$ в начало координат в момент времени $t_1 = 1$. На управление наложено ограничение $u \in [-1, 1]$.

Предложенный в работе алгоритм допускает удобную для численной реализации дискретизацию по времени. При этом все дифференциальные уравнения заменяются их дискретными аналогами, а возникающая в результате дополнительная погрешность считается пренебрежимо малой.

На рис. 1 представлены результаты, полученные предложенным методом: пунктирная линия обозначает границу множества, куда априорно гарантируется попадание траектории при замыкании системы управлением (7.5); расстояние между $x(t_1)$ и целевым множеством составляет 0.036. На рис. 2 отображены результаты склеивания управлений во всех симплексах, так что итоговое управление и кусочно-квадратичная функция цены являются непрерывными; итоговое расстояние равно 0.042. Видно, что при схожих апостериорных погрешностях априорные погрешности заметно различаются.

Заключение

В данной работе рассмотрены основные конструкции, позволяющие строить разрывные кусочно-квадратичные функции цены для решения задачи целевого управления нелинейной автономной системой дифференциальных уравнений. Предложенный подход позволяет избавиться от лишних склеек функции цены вдоль границ симплексов, и результаты численного моделирования говорят о том, что это способствует существенному улучшению априорной оценки погрешности попадания в целевое множество.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона — Якоби в теории управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. (SCFA, vol. 85). doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
3. Habets L.C.G.J.M., Collins P.J., van Schuppen J.H. Reachability and control synthesis for piecewise-affine hybrid systems on simplices // IEEE Trans. Automatic Control. 2006. Vol. 51, no. 6. P. 938–948. doi: 10.1109/TAC.2006.876952.
4. Girard A., Martin S. Synthesis of constrained nonlinear systems using hybridization and robust controllers on simplices // IEEE Trans. Automatic Control. 2012. Vol. 57, no. 4, P. 1046–1051. doi: 10.1109/TAC.2011.2168874.

5. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
6. **Fleming W.H., Soner H.M.** Controlled Markov Processes and viscosity solutions. NY: Springer, 2006. 429 p. doi: 10.1007/0-387-31071-1.
7. **Чистяков И.А., Точилин П.А.** Приближенное решение задачи целевого управления в случае нелинейности по одной переменной // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 11. С. 1560–1571.
8. **Чистяков И.А., Точилин П.А.** Применение кусочно-квадратичных функций цены для приближенного решения нелинейной задачи целевого управления // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 11. С. 1545–1554.
9. **Tochilin P.A.** Piecewise affine feedback control for approximate solution of the target control problem // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, no. 2. P. 6127–6132. doi: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1691.
10. **Точилин П.А., Чистяков И.А.** О построении разрывного кусочно-аффинного синтеза в задаче целевого управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 3. С. 194–210. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-194-210.
11. **Tarjan R.** Depth-first search and linear graph algorithms // SIAM Journal on Computing. 1971. Vol. 1, № 2. P. 146–160. doi: 10.1137/0201010.
12. **Sharir M.** A strong-connectivity algorithm and its applications in data flow analysis // Computers & Mathematics with Applications. 1981. Vol. 7, no. 1. P. 67–72. doi: 10.1016/0898-1221(81)90008-0.
13. **Nesterov Yu., Nemirovskii A.** Interior-point polynomial algorithms in convex programming. Philadelphia: SIAM, 1994. 405 p. (SIAM studies in applied mathematics; vol. 13). doi: 10.1137/1.9781611970791.
14. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
15. **Reissig G.** Computing Abstractions of Nonlinear Systems // IEEE Trans. Automatic Control. 2011. Vol. 56, no. 11. P. 2583–2598. doi: 10.1109/TAC.2011.2118950.

Поступила 19.05.2022

После доработки 11.07.2022

Принята к публикации 18.07.2022

Чистяков Иван Александрович
аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: chistyakov.ivan@yahoo.com

Точилин Павел Александрович
канд. физ.-мат. наук
доцент факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова;
Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН
г. Москва
e-mail: tochilin@cs.msu.ru

REFERENCES

1. Kurzhanski A.B. Comparison principle for equations of the Hamilton–Jacobi type in control theory. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 253, no. 1, pp. S185–S195. doi: 10.1134/S0081543806050130.
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes*. Cham: Birkhäuser, 2014, 445 p. (SCFA, vol. 85) doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
3. Habets L.C.G.J.M., Collins P.J., van Schuppen J.H. Reachability and control synthesis for piecewise-affine hybrid systems on simplices. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2006, vol. 51, no. 6, pp. 938–948. doi: 10.1109/TAC.2006.876952.
4. Girard A., Martin S. Synthesis for constrained nonlinear systems using hybridization and robust controllers on simplices. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 1046–1051. doi: 10.1109/TAC.2011.2168874.

5. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective*. Boston, MA: Birkhäuser, 1995, 312 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1.
6. Fleming W.H., Soner H. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. New York, NY: Springer, 2006, 429 p. doi: 10.1007/0-387-31071-1.
7. Chistyakov I.A., Tochilin P.A. Approximate solution of the target control problem with a nonlinearity depending on one state variable. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 11, pp. 1518–1530. doi: 10.1134/S0012266119110107.
8. Chistyakov I.A., Tochilin P.A. Application of piecewise quadratic value functions to the approximate solution of a nonlinear target control problem. *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1513–1523. doi: 10.1134/S00122661200110129.
9. Tochilin P. Piecewise affine feedback control for approximate solution of the target control problem. *IFAC-PapersOnLine*, 2020, vol. 53, no. 2, pp. 6127–6132. doi: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1691.
10. Tochilin P.A., Chistyakov I.A. On the construction of a discontinuous piecewise affine synthesis in a target control problem. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 194–210. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-194-210 (in Russian).
11. Tarjan R. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM J. Comput.*, 1971, vol. 1, no. 2, pp. 146–160. doi: 10.1137/0201010.
12. Sharir M. A strong-connectivity algorithm and its applications in data flow analysis. *Comput. Math. with Appl.*, 1981, vol. 7, no. 1, pp. 67–72. doi: 10.1016/0898-1221(81)90008-0.
13. Nemirovskii Y.N. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. Ser. SIAM studies in applied mathematics, vol. 13, Philadelphia: SIAM, 1994, 405 p. doi: 10.1137/1.9781611970791.
14. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Factorial Press, 2002, 824 p. ISBN: 5-88688-056-9.
15. Reissig G. Computing abstractions of nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2011, vol. 56, no. 11, pp. 2583–2598. doi: 10.1109/TAC.2011.2118950.

Received May 19, 2022

Revised July 11, 2022

Accepted July 18, 2022

Funding Agency: The results of sections 1-3 and 6-9 were obtained by the first author with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement № 075-15-2022-284. The results of sections 4-5 were obtained by the second author with the financial support of the Russian Science Foundation (project № 22-11-00042).

Ivan Aleksandrovich Chistyakov, doctoral student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: chistyakov.ivan@yahoo.com.

Pavel Aleksandrovich Tochilin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, 119991 Russia; V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997 Russia,
e-mail: tochilin@cs.msu.ru.

Cite this article as: I. A. Chistyakov, P. A. Tochilin. Construction of discontinuous piecewise quadratic value functions in a target control problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 259–273.