ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 519.16 + 519.85

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ С ПОСТОЯННОЙ ТОЧНОСТЬЮ ДЛЯ СЕРИИ МАРШРУТНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ, ОСНОВАННЫЕ НА СВЕДЕНИИ К АСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА[1]

М. Ю. Хачай, Е. Д. Незнахина, К. В. Рыженко

В статье впервые обосновываются алгоритмы с постоянными гарантированными оценками точности для серии асимметричных маршрутных задач комбинаторной оптимизации: задачи о штейнеровском цикле (SCP), обобщенной задачи коммивояжера (GTSP), задачи маршрутизации транспорта с неделимым потребительским спросом (CVRP-UCD) и задачи коммивояжера с призами (PCTSP). Объединяет представленные результаты то, что все они опираются на полиномиальную сводимость, сохраняющую стоимость (cost-preserving reduction), исследуемых задач к подходящим постановкам асимметричной задачи коммивояжера (ATSP) и $(22+\varepsilon)$-приближенный алгоритм для этой классической задачи, предложенный О. Свенссоном и В. Трауб в 2019 г.

Ключевые слова: асимметричная задача коммивояжера, алгоритм с постоянной оценкой точности, полиномиальная сводимость, задача о штейнеровском цикле минимального веса, обобщенная задача коммивояжера, задача коммивояжера с призами, задача маршрутизации транспорта.

M. Yu. Khachai, E. D. Neznakhina, K. V. Ryzhenko. Constant-factor approximation algorithms for a series of combinatorial routing problems based on the reduction to Asymmetric Traveling Salesman Problem.

For the first time, algorithms with constant performance guarantees are substantiated for a series of asymmetric routing problems of combinatorial optimization: Steiner Cycle Problem (SCP), Generalized Traveling Salesman Problem (GTSP), Capacitated Vehicle Routing Problem with Unsplittable Client Demands (CVRP-UCD), and Prize Collecting Traveling Salesman Problem (PCTSP). The presented results are united by the property that they all rely on polynomial cost-preserving reduction to appropriate statements of Asymmetric Traveling Salesman Problem (ATSP) and on the $(22+\varepsilon)$-approximate algorithm for this classical problem proposed by O. Svensson and V. Traub in 2019.

Keywords: Asymmetric Traveling Salesman Problem, constant-factor approximation algorithm, polynomial-time reduction, Steiner Cycle Problem, Generalized Traveling Salesman Problem, Prize Collecting Traveling Salesman Problem, Vehicle Routing Problem.

Посвящается славному 75-летнему юбилею
выдающегося российского ученого,
чл.-корр. РАН А.Г. Ченцова
с искренними поздравлениями и благодарностью.

MSC: 68W25

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-241-258

Введение

Настоящая работа посвящена вопросам проектирования и обоснования приближенных алгоритмов с полиномиальной трудоемкостью и константными факторами аппроксимации (точностью) для серии актуальных маршрутных задач комбинаторной оптимизации, заданных на взвешенных ориентированных графах и называемых потому *асимметричными*.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00672, https://rscf.ru/project/22-21-00672/ .

Маршрутные задачи комбинаторной оптимизации включают широкий класс постановок дискретных экстремальных задач, являющихся модификациями и обобщениями классических задач коммивояжера (TSP; см. [1]), маршрутизации транспорта (VRP; см. [2]) и обладающих многочисленными актуальными приложениями в области исследования операций, робототехники и искусственного интеллекта (см., например, [3–5]). По-видимому, впервые математические постановки задач оптимальной маршрутизации были введены в классических работах Г. Данцига и коллег (см. [6; 7]), в которых обосновывается сведение классической задачи коммивояжера к эквивалентной постановке целочисленного линейного программирования (MILP-модели) и строится математическая модель доставки топлива в рамках сети заправочных станций.

Как и для большей части известных проблем комбинаторной оптимизации, исследования в области алгоритмического анализа экстремальных маршрутных задач традиционно развиваются по трем основным направлениям.

Первое направление связано с развитием оригинальных схем динамического программирования и методов ветвей и границ (см., например, [8–10]). Однако, несмотря на стремительные темпы развития вычислительной техники и очевидные успехи последних лет в области совершенствования алгоритмов (см. [11; 12]), труднорешаемость исследуемых задач по-прежнему существенно сужает практическую применимость данного подхода (постановками достаточно скромного размера).

Широкий спектр современных эвристических алгоритмов и метаэвристик составляет основу второго направления. Наибольшего успеха в области эффективной аппроксимируемости маршрутных задач удалось достичь в классе методов локального поиска [13], поиска с запретами [14], переменных окрестностей (VNS; см. [15]), адаптивных алгоритмов поиска в больших окрестностях (ALNS; см. [16]), машинного обучения и обучения с подкреплением, эволюционных и биоинспирированных алгоритмов, а также их комбинаций (см., например, [17–19]). Нередко эвристические алгоритмы демонстрируют потрясающую производительность, находя близкие к оптимальным или даже оптимальные решения для практически важных постановок большого размера. Тем не менее в связи с отсутствием теоретически обоснованных гарантий применение этих алгоритмов сопряжено с дополнительными трудозатратами и необходимостью дополнительной настройки внутренних параметров при переходе к каждому новому классу постановок.

Третье направление связано с аппроксимируемостью маршрутных экстремальных задач в классе приближенных алгоритмов с теоретическими оценками точности. За редким исключением все исследуемые в данной работе задачи:

- NP-трудны в сильном смысле — как в общем случае, так и в чрезвычайно специфических постановках, например на евклидовой плоскости (см., например, [20; 21]);
- не аппроксимируемы в общем случае со сколько-нибудь приемлемой точностью (в предположении $P \neq NP$; см. [22]);
- в метрической постановке принадлежат классу APX-полных задач (см. [23]);
- допускают аппроксимируемость в классе квазиполиномиальных и даже полиномиальных приближенных схем в пространствах произвольной фиксированной размерности удвоения (в том числе в конечномерных числовых пространствах; см. [24; 25]).

Подавляющее большинство позитивных результатов в области эффективной аппроксимируемости исследуемых задач получено для так называемых *симметричных* постановок, задаваемых на неориентированных взвешенных графах, вершины которых являются элементами некоторого метрического или даже конечномерного числового пространства, а веса ребер — расстояниями между инцидентными вершинами. При этом ключевым компонентом многих известных алгоритмов являлся классический 3/2-приближенный алгоритм Кристофидеса — Сердюкова (см. [26; 27]) для метрической задачи коммивояжера.

В свою очередь, проблематика алгоритмического анализа для асимметричных постановок маршрутных задач долгое время была значительно менее изученной. Так, даже для асимметричной задачи коммивояжера (ATSP) до 2018 г. рекордным оставался приближенный алгоритм [28], имеющий оценку точности $O(\log n/\log\log n)$. В этом смысле значимость пионерской работы О. Свенссона, Я. Тарнавски и Л. Вега [29], которым впервые удалось для этой задачи обосновать полиномиальный алгоритм с фиксированным фактором аппроксимации, вряд ли может быть переоценена. В дальнейшем оценка точности предложенного алгоритма неоднократно улучшалась. Последняя версия результата получена В. Трауб и Й. Вигеном (см. [30]) и приведена в следующей теореме.

Теорема 1. *Для произвольного* $\varepsilon > 0$ *задача* ATSP *с неравенством треугольника обладает* $(22+\varepsilon)$*-приближенным алгоритмом.*

В данной работе мы обосновываем аппроксимируемость в классе алгоритмов с константными оценками точности серии асимметричных маршрутных задач комбинаторной оптимизации, среди которых задача о штейнеровском цикле (SCP), обобщенная задача коммивояжера (GTSP), задача маршрутизации транспорта с неделимым неоднородным потребительским спросом (CVRP-USD) и задача коммивояжера с призами (PC-ATSP). Для каждой из перечисленных задач нами построен приближенный алгоритм с фиксированным фактором аппроксимации. Объединяет все приведенные ниже алгоритмы то, что все они основаны на полиномиальной сводимости к подходящим постановкам ATSP и используют алгоритм Свенссона — Трауб в качестве “черного ящика”. Отметим, что попытки применить при аппроксимируемости некоторых маршрутных задач известные (или гипотетические) алгоритмы для ATSP предпринимались и ранее (см., например, [31]). Для всех рассматривавшихся ранее задач полученные в данной статье результаты опережают известные по точности аппроксимации.

1. Предварительные сведения

Постановка асимметричной задачи коммивояжера (ATSP) задается ориентированным графом $G=(V,E,c)$ с неотрицательной весовой функцией $c\colon E\to\mathbb{R}_+$. Требуется построить замкнутый маршрут, посещающий каждую вершину не менее одного раза и имеющий наименьшую стоимость. Эквивалентная постановка задачи ATSP состоит в поиске (мульти)множества дуг F минимального суммарного веса, такого что ориентированный мультиграф (V,F) является связным и эйлеровым, т. е. для каждой вершины v число входящих в нее дуг мультимножества F совпадает с числом исходящих.

Метрическим замыканием орграфа G называется орграф $\bar{G}=(V,\bar{E},\bar{c})$ на множестве вершин V, вес произвольной дуги (v,w) которого совпадает со стоимостью кратчайшего v-w-пути в графе G. По построению весовая функция $\bar{c}$ удовлетворяет неравенству треугольника $\bar{c}(u,v)+\bar{c}(v,w)\geq\bar{c}(u,w)$ для всевозможных $u,v,w\in V$. Заметим, что понятие метрического замыкания определено только для неотрицательной весовой функции c.

Без ограничения общности всюду ниже будем полагать орграф G сильно связным, весовую функцию c — удовлетворяющей неравенству треугольника, и использовать в качестве базовой стандартную MIP-модель задачи ATSP:

$$\min\sum_{e\in E}c_e x_e \tag{1}$$

$$x(\delta^+(v))=x(\delta^-(v))\qquad(v\in V), \tag{2}$$

$$x(\delta(U))\geqslant 2\qquad(\varnothing\neq U\subset V), \tag{3}$$

$$x_e\in\mathbb{Z}_+\qquad(e\in E). \tag{4}$$

Здесь переменная x_e определяет кратность использования дуги e в маршруте (вхождения в мультимножество F); $\delta(U) = \delta^+(U) \cup \delta^-(U)$ — *разрез* графа G, задаваемый непустым подмножеством вершин U, где

$$\delta^+(U) = \{(u,v) \in E\colon u \in U,\ v \notin U\}, \quad \delta^-(U) = \{(u,v) \in E\colon u \notin U,\ v \in U\};$$

$\delta^+(v)$ и $\delta^-(v)$ — исходящий и входящий разрезы для одноэлементного подмножества $U = \{v\}$ и $x(E') = \sum_{e \in E'} x_e$ для произвольного $\varnothing \neq E' \subset E$. По построению целевая функция (1) описывает стоимость маршрута, ограничение (2) обеспечивает эйлеровость, а (3) — связность соответствующего мультиграфа.

Через ATSP LP* обозначим оптимальное значение *вещественной релаксации* задачи (1)–(4), получаемой путем отказа от требования целочисленности переменных x_e. Фактически, в работе В. Трауб и Й. Вигена (см. [30]) получен следующий результат.

Теорема 2. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует полиномиальный алгоритм, находящий приближенное решение задачи* ATSP *с неравенством треугольника, стоимость которого не превосходит* $(22 + \varepsilon) \cdot (\text{ATSP LP}^*)$.

Видно, что теорема 1, как и верхняя оценка *разрыва целочисленности* задачи ATSP, является простым следствием данной теоремы. В дальнейшем нам потребуются оба результата, в частности теорему 1 мы используем в разд. 2, 4, 7, а теорему 2 — в разд. 6.

2. Задача о штейнеровском цикле

В задаче Steiner Cycle Problem (SCP) в реберно-взвешенном ориентированном графе $G = (V, E, c)$ с весовой функцией $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ требуется построить минимальный по весу замкнутый маршрут, посещающий выделенное подмножество $T \subseteq V$ терминальных вершин. Если количество терминальных вершин является частью входа, то задача очевидно труднорешаема даже на евклидовой плоскости, являясь обобщением классической задачи коммивояжера. Для некоторых ограниченных постановок задачи известен ряд позитивных алгоритмических результатов. Так, в работе [32] описан точный FPT алгоритм для симметричной версии задачи. В [33] исследована аппроксимируемость постановок SCP, в которых каждая вершина графа может быть посещена не более одного раза. Показано, что при этом условии задача SCP с k терминалами и неравенством треугольника допускает аппроксимацию в классе полиномиальных алгоритмов с точностью $\dfrac{3}{2}\log_2 k$ на орграфах и $\dfrac{3}{2}$ на неориентированных графах соответственно.

Основной результат данного раздела — по-видимому, первый приближенный алгоритм для общей постановки задачи SCP с константным фактором аппроксимации.

Теорема 3. *Существование α-приближенного алгоритма для задачи* ATSP *с неравенством треугольника влечет аппроксимируемость задачи* SCP *в классе α-приближенных полиномиальных алгоритмов.*

Доказательство. Сопоставим исходному орграфу G вспомогательный полный орграф $G_m = \bar{G}\langle T \rangle$ — подграф метрического замыкания $\bar{G}$, индуцированный подмножеством T терминальных вершин. По построению вес $c_m(v_i, v_j)$ дуги, соединяющей в графе G_m произвольную пару терминальных вершин $v_i, v_j \in T$, совпадает со стоимостью кратчайшего пути между этими вершинами в исходном графе G (рис. 1), а весовая функция c_m удовлетворяет неравенству треугольника.

Пусть SCP* и ATSP*(G_m) — оптимальные значения исходной задачи и постановки асимметричной задачи коммивояжера ATSP(G_m) на графе G_m соответственно. Убедимся в том, что SCP* $=$ ATSP*(G_m). В самом деле, пусть R_m — произвольное оптимальное решение ATSP(G_m). По построению графа G_m маршруту R_m соответствует маршрут R в графе G,

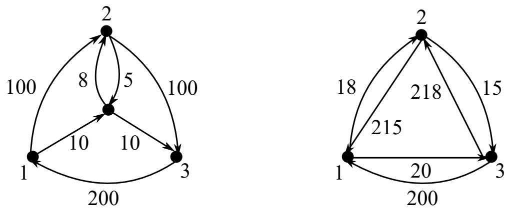

Рис. 1. Пример построения графа G_m для $T = \{1, 2, 3\}$.

совпадающий с ним по стоимости. Следовательно, $\mathrm{SCP}^* \leqslant c(R) = \mathrm{ATSP}^*(G_m)$, так как R является допустимым решением исходной постановки SCP по построению. С другой стороны, произвольное оптимальное решение R задачи SCP индуцирует допустимое решение R_m задачи $\mathrm{ATSP}(G_m)$, стоимость которого, очевидно, не превосходит стоимость $c(R)$, откуда $\mathrm{SCP}^* \geqslant \mathrm{ATSP}^*(G_m)$.

Пусть далее $\widetilde{R}_m$ — произвольное α-приближенное решение задачи $\mathrm{ATSP}(G_m)$. Рассуждая по аналогии, сопоставим ему маршрут $\widetilde{R}$ в графе G, для которого

$$\mathrm{SCP}^* \leqslant c(\widetilde{R}) = c_m(\widetilde{R}_m) \leqslant \alpha \cdot \mathrm{ATSP}^*(G_m) = \alpha \cdot \mathrm{SCP}^*.$$

Теорема доказана.

3. Задача о сельском почтальоне

В качестве простого следствия теоремы 3 получим результат об аппроксимируемости известной труднорешаемой задачи сельского почтальона (Rural Postman Problem, RPP), состоящей в поиске в реберно-взвешенном ориентированном графе $G = (V, E, c)$ замкнутого маршрута минимальной стоимости, включающего каждую терминальную дугу из заданного подмножества $R \subseteq E$.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 3 *задача* RPP *обладает полиномиальным приближенным алгоритмом с фактором аппроксимации* α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обоснуем полиномиальную сводимость задачи RPP к подходящей постановке задачи SCP с сохранением стоимости (cost-preserving reduction). В самом деле, преобразуем орграф $G = (V, E, c)$, задающий условие задачи RPP, следующим образом. На каждой дуге $e \in R \subseteq E$ разместим по вспомогательной терминальной вершине и разделим ее вес между дугами, инцидентными данной вершине (рис. 2). Получим граф $G_T = (V \cup T, E_T, c_T)$,

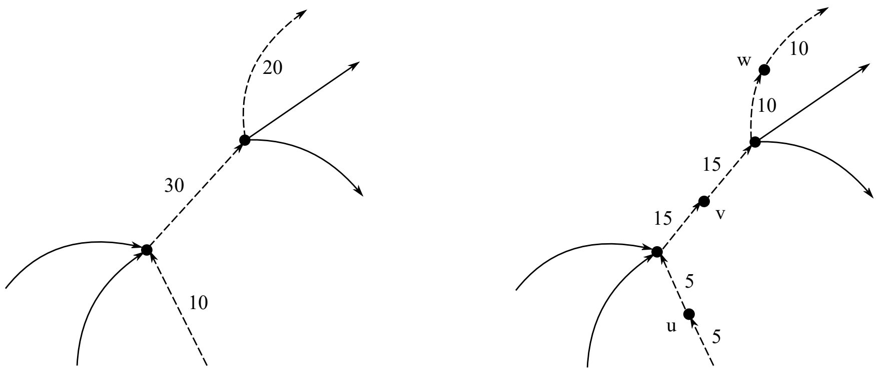

Рис. 2. Пример сведения задачи RPP к подходящей постановке задачи SCP.

для которого решение SCP на выделенном подмножестве добавленных терминальных вершин T $(|T| = |R|)$ эквивалентно решению RPP на исходном графе. По построению множества допустимых решений исходной задачи RPP и полученной постановки SCP изоморфны, причем стоимости соответствующих решений совпадают.

Следствие доказано.

4. Задача маршрутизации транспорта

Содержательная постановка задачи маршрутизации с ограничением на грузоподъемность (Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP) заключается в следующем: заданы координаты n потребителей, обладающих некоторым спросом на (однородную) продукцию, и склада O, на котором она хранится и базируются идентичные транспортные средства заданной грузоподъемности; требуется построить набор маршрутов минимальной стоимости, удовлетворяющих совокупный потребительский спрос так, что каждый маршрут начинается и заканчивается в O и удовлетворяет ограничению на грузоподъемность транспортного средства.

Хотя задача не аппроксимируема в общем случае в рамках гипотезы $P \neq NP$ (см. [22]) и APX-полна при произвольной метрике (см. [23]), геометрическая постановка CVRP допускает аппроксимацию в классе квазиполиномиальных приближенных схем (QPTAS; см. [34]), а введение дополнительных ограничений (на рост грузоподъемности и размерность пространства) позволяет обосновать существование и полиномиальных приближенных схем (PTAS; см., например, [35]). На настоящий момент наиболее общие результаты в области аппроксимируемости задачи удалось получить в метрических пространствах фиксированной размерности удвоения (см. [25; 36]).

Асимметричная задача маршрутизации с ограничением на грузоподъемность и неоднородным потребительским спросом (ACVRP-UCD) задается взвешенным ориентированным графом $G = (V, E, c, d)$, где $V = X \cup \{O\}$, $\{O\}$ — выделенная вершина (склад), $d\colon X \to \mathbb{Z}_+$, $d(x)$ — неделимый спрос потребителя $x \in X$, $c\colon E \to \mathbb{Z}_+$ — транспортными издержками, а также D — грузоподъемностью транспортного средства.

Допустимым маршрутом назовем упорядоченную пару $R_i = (\Pi_i, s_i)$, где Π_i — замкнутый ориентированный путь в орграфе G, начинающийся и заканчивающийся в вершине O, $s_i\colon X \to \mathbb{Z}_+$ — функция обслуживания, принимающая значение $s_i(x) \in \{0, d(x)\}$ в произвольной вершине x, посещаемой Π_i, и 0 — во всех остальных вершинах. Ограничение на грузоподъемность для каждого маршрута R_i задается соотношением $\sum\limits_{x \in X} s_i(x) \leq D$. Заметим, что произвольная вершина $x_0 \in X$ может посещаться несколькими маршрутами. Однако, по условию задачи равенство $s_i(x_0) = d(x_0)$ будет выполняться только для одного из них.

Цель — найти семейство допустимых маршрутов $W = \{R_1, \ldots, R_p\}$ минимального суммарного веса, удовлетворяющих совокупный потребительский спрос.

Алгоритм $\mathcal{A}_1$.

1. Построим α-приближенное решение C задачи SCP для заданного графа G, множество терминальных вершин которого зададим соотношением $T = \{O\} \cup \{x \in X : d(x) > 0\}$.

2. Разделим C на максимальные по включению фрагменты U_i, суммарный спрос вершин, входящих в которые, не превышает D $(i = \overline{1,k})$, и O_j — выделенных потребителей с положительным спросом, следующих за U_i в C $(j = \overline{1,m})$. Заметим, что по построению $m \leq k$ (рис. 3).

3. Определим R_p $(p = \overline{1, k+m})$ как кратчайший маршрут от склада до первой вершины U_i, фрагмент U_i и кратчайший маршрут от последней вершины U_i до склада для всех полученных фрагментов U_i $(i = \overline{1,k})$ либо как кратчайший маршрут от склада до O_j и от O_j до склада для всех выделенных потребителей O_j $(j = \overline{1,m})$.

4. Построенное семейство маршрутов $W = W(\mathcal{A}_1) = \{R_1, \ldots, R_{k+m}\}$ искомое. □

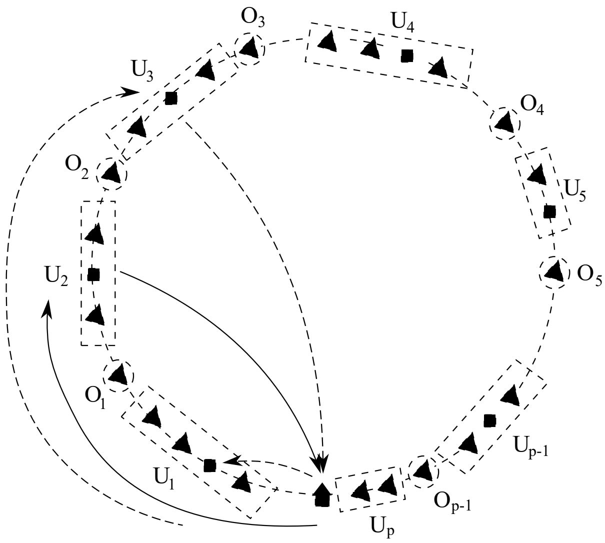

Рис. 3. Построение решения ACVRP-UCD.

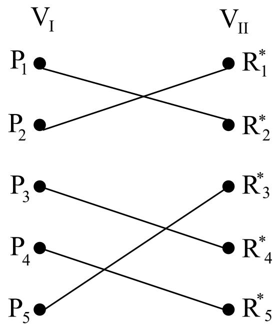

Рис. 4. Вспомогательный двудольный граф H.

Лемма 1. *Пусть C — α-приближенное решение для задачи* SCP, *а W^* — оптимальное решение* ACVRP-UCD. *Тогда $c(C) \leq \alpha \cdot c(W^*)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $c(C) \leq \alpha{\cdot}c(C^*)$, где C^* — оптимальное решение SCP. Если рассматриваемые графы совпадают и терминальное множество вершин в SCP образовано вершинами, имеющими положительный спрос в ACVRP-UCD, и выделенной вершиной (складом), то $c(C^*) \leq c(W^*)$, поскольку W^* — допустимое решение для SCP. □

Теорема 4. *Из существования α-приближенного алгоритма для* ATSP *следует, что алгоритм $\mathcal{A}_1$ строит $(3\alpha+2)$-приближенное решение задачи* ACVRP-UCD.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть C — α-приближенное решение SCP, U_i — максимально полные по включению фрагменты построенного маршрута, такие что суммарный спрос входящих во фрагмент вершин не превышает D, а O_i — выделенные потребители с положительным спросом, следующие за U_i в α-приближенном маршруте (см. рис. 3). Обозначим через P_i фрагменты маршрута, образованные U_i и O_i.

Пусть W^* — оптимальное решение задачи ACVRP-UCD; покажем, что в каждом P_i найдется вершина (“точка врезки”), чей спрос удовлетворяет уникальный маршрут из W^*. Рассмотрим вспомогательный двудольный граф H, вершины правой доли — маршрут W^*, левой доли — фрагменты P_i из цикла C (рис. 4). Ребро $[P_i, R_j^*]$ присутствует в H, если R_j^* удовлетворяет спрос хотя бы одной вершины из P_i.

По построению суммарный объем спроса, соответствующего произвольному подмножеству $S \subset V_I$, более $D\,|S|$. Чтобы удовлетворить этот спрос, понадобится более $|S|$ маршрутов из W^*. По лемме Холла [37] в графе H существует паросочетание, покрывающее все вершины доли V_I. По нашей терминологии, каждому фрагменту P_i может быть сопоставлен персональный маршрут R_j, пересекающий его в “точке врезки”.

Чтобы оценить сверху стоимость $W(\mathcal{A}_1)$, построим вспомогательное допустимое решение $\widetilde{W}$ задачи ACVRP-UCD. Для этого рассмотрим обход маршрута C от склада в направлении фрагмента P_1 (рис. 3). В R_1 попадет фрагмент C от склада до первой вершины из P_1, фрагмент P_1, фрагмент C от последней вершины P_1 до ближайшей “точки врезки”, фрагмент W^* от “точки врезки” до склада; R_2 будет образован фрагментом W^* от склада до первой “точки врезки”, фрагментом C от “точки врезки” до первой вершины из P_2, фрагментом P_2, фрагментом C от последней вершины P_2 до следующей “точки врезки”, фрагментом W^* от “точки врезки” до склада и так далее. Аналогично обработаем вершины O_i, построив набор маршрутов от склада до O_i и обратно из фрагментов цикла C и W^*. По построению стоимость $W(\mathcal{A}_1)$ не превосходит стоимость построенного решения $\widetilde{W}$.

В свою очередь, стоимость $c(\widetilde{W})$ легко может быть оценена сверху. В самом деле, вес его маршрутов, покрывающих фрагменты U_i, не превосходит $2\,c(C) + c(W^*)$, а маршрутов, покрывающих O_i, не больше $c(C) + c(W^*)$. Таким образом, с учетом утверждения леммы 1,

$$c(\widetilde{W}) \le 2\,c(C) + c(W^*) + c(C) + c(W^*) \le (3\alpha + 2) \cdot c(W^*).$$

Теорема доказана.

5. Реберная маршрутизация на графах смешанного типа

В задаче обхода дуг (ребер) с требованиями (Capacitated Arc Routing Problem, CARP; см. [31]) на смешанных графах, содержащих дуги и ребра, $G = (V, E, A, c, d)$, где c — транспортные издержки, d — спрос, размещенный на дугах и ребрах, и D — грузоподъемность транспортного средства; как и в ACVRP с неделимым спросом, выделена вершина O (склад) и требуется построить набор маршрутов, отвечающих ограничениям на грузоподъемность и удовлетворяющих в совокупности весь спрос, не разделяя требования между различными маршрутами. CARP на смешанных графах эквивалентна ACVRP с неделимым спросом и наследует коэффициент аппроксимации $3\alpha + 2$, что улучшает предыдущее известное значение $8\,\alpha \cdot (C + 1) + 27$ (см. [31]), где C — это количество компонент связности в подграфе, индуцированном дугами и ребрами с положительными значениями требований с опорой на α-приближенное решение ATSP.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 4 *задача* CARP *на смешанных графах обладает полиномиальным приближенным алгоритмом с фактором аппроксимации* $3\,\alpha + 2$.

Доказательство. Преобразуем граф $G = (V, E, A, c, d)$, задающий условие задачи CARP, следующим образом: на ребрах и дугах, имеющих отличный от нуля спрос, разместим по фиктивной вершине, закрепив за ней соответствующий спрос; транспортные издержки исходных ребер и дуг разделим между дугами, инцидентными новой фиктивной вершине. Если транспортные издержки использования ребра зависят от направления, то заменим ребро на две пары дуг и фиктивную вершину, разделив издержки с учетом направления (рис. 5):

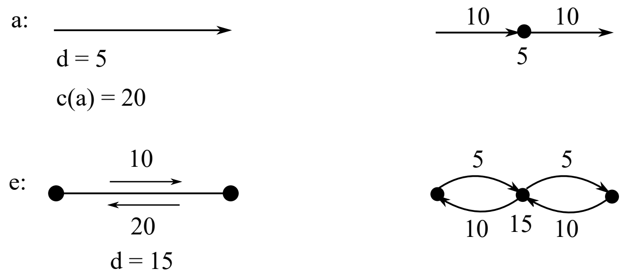

Рис. 5. Добавление фиктивных вершин на дугу и ребро.

В полученном графе $G' = (V \cup V', E', c', d')$ решение задачи ACVRP-UCD эквивалентно решению исходной постановки CARP, задаваемой графом G; кроме того, оптимальные значения целевых функций совпадают.

Следовательно, задача CARP допускает полиномиальную аппроксимацию с точностью $3\,\alpha + 2$.

Следствие доказано.

6. Задача коммивояжера с призами

Постановка рассматриваемой в статье версии задачи коммивояжера с призами (Prize Collecting Traveling Salesman Problem, PCATSP) задается полным взвешенным ориентированным графом $G = (V, E, c, \pi)$, в котором весовая функция $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ соответствует транспортным издержкам и удовлетворяет неравенству треугольника; функция $\pi\colon V \to \mathbb{R}_+$ определяет штрафы за непосещение вершин. Требуется найти замкнутый маршрут R минимальной стоимости

$$\mathrm{cost}(R) = \sum_{e\in R} c_e + \sum_{v\notin V'} \pi_v,$$

где $V' \subset V$ — подмножество вершин, посещенных маршрутом R. Заметим, что известны и альтернативные постановки близких экстремальных задач, также называемые авторами задачей коммивояжера с призами (см., например, [38; 39]).

Задача PCATSP очевидным образом обобщает классическую задачу коммивояжера и потому наследует все результаты, связанные с труднорешаемостью последней. Необходимо отметить, что множество допустимых решений задачи PCATSP, включая аналогичное множество для соответствующей ATSP, существенно богаче и содержит, например, “пустой” маршрут, не посещающий ни единой вершины. Для метрической постановки задачи на неориентированных графах известен $\frac{5}{2}$-приближенный алгоритм (см. [40]), опирающийся на алгоритм Кристофидеса — Сердюкова для метрической TSP и метод округления дробных решений релаксации задачи линейного программирования до целочисленных значений, допустимых в оригинальной постановке.

Реализуя подход, аналогичный предложенному в [40], опишем первый алгоритм с константным фактором аппроксимации для общей постановки PCATSP, использующий произвольный полиномиальный алгоритм, обозначим его $\mathcal{A}_0$, находящий для асимметричной задачи коммивояжера с неравенством треугольника приближенное решение стоимости APP, для которого

$$\mathrm{ATSP}^* \leqslant \mathrm{APP} \leqslant \alpha\cdot(\mathrm{ATSP\,LP}^*).$$

А л г о р и т м $\mathcal{A}_2$.

1. Ограничиваясь рассмотрением нетривиальных постановок задачи, в которых $V > 1$, сопоставим исходной задаче PCATSP семейство вспомогательных постановок задачи. Каждая постановка этого семейства (договоримся обозначать ее $\mathrm{PCATSP}_{u,v}$) отягощена дополнительным ограничением: произвольный допустимый маршрут данной задачи обязан посетить заданную пару вершин $\{u, v\} \subset V$. Легко видеть, что оптимальное значение PCATSP^* исходной задачи удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{PCATSP}^* = \min\Big\{\sum_{v\in V}\pi_v,\ \min\big\{\mathrm{PCATSP}^*_{u,v}\colon \{u,v\}\subset V\big\}\Big\}, \tag{5}$$

первая компонента которого соответствует “пустому” маршруту.

2. Произвольной подзадаче $\mathrm{PCATSP}_{u,v}$ сопоставим эквивалентную постановку задачи целочисленного линейного программирования (MILP-модель):

$$\min \sum_{e\in E} c_e x_e + \sum_{w\in V}\pi_w(1-y_w) \tag{6}$$

$$x(\delta^+(w)) = x(\delta^-(w)) \qquad (w\in V), \tag{7}$$

$$x(\delta(S)) \geqslant 2 \qquad (S\subset V\colon |S\cap\{u,v\}| = 1), \tag{8}$$

$$x(\delta(S)) \geqslant 2y_w \qquad (S\subseteq V\backslash\{u,v\},\ w\in S), \tag{9}$$

$$x_e\in\mathbb{Z}_+,\quad y_w\in\{0,1\}, \tag{10}$$

$$y_u = y_v = 1, \tag{11}$$

целевая функция которой выражает суммарные транспортные издержки и накопленные штрафы за непосещение вершин графа G. Как и в модели (1)–(4), переменные x_e характеризуют кратность использования дуг в допустимом маршруте, соотношения (7) обеспечивают эйлеровость, а (8), (9) — связность порождаемого им подграфа. Переменная y_v является индикатором посещения вершины $v \in V$.

Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ — произвольное оптимальное решение вещественной релаксации (получаемой заменой ограничения (10) неравенствами $x_e \geqslant 0$ и $0 \leqslant y_w \leqslant 1$) PCATSP LP$_{u,v}$ задачи PCATSP$_{u,v}$. Рассмотрим вспомогательную постановку задачи ATSP на подграфе $G\langle T_{u,v}\rangle$, индуцированном подмножеством вершин

$$T_{u,v} = \Big\{w \in V : \bar{y}_w \geqslant \frac{\alpha}{\alpha+1}\Big\}. \tag{12}$$

Если $|T_{u,v}|$ не превосходит наперед заданного фиксированного порога, сопоставим подзадаче PCATSP$_{u,v}$ точное решение данной постановки, которое, очевидно, может быть получено при этом условии за константное время; в противном случае сопоставим приближенное решение, найденное алгоритмом $\mathcal{A}_0$.

3. К началу данного этапа построен набор маршрутов $\{R_{u,v}\}$ — решений описанных выше подзадач. В качестве приближенного решения исходной задачи выдается маршрут $\bar{R} = \arg\min\{\mathrm{cost}\,(R_{u,v})\}$ при условии $\mathrm{cost}\,(\bar{R}) < \sum\limits_{v\in V} \pi_v$ и "пустой маршрут", не посещающий ни одной вершины, — в противном случае. □

Теорема 5. *Алгоритм $\mathcal{A}_2$ находит $(\alpha+1)$-приближенное решение задачи* PCATSP.

Доказательство. 1. Убедимся, что стоимость решения $R_{u,v}$, найденного на шаге 2 алгоритма $\mathcal{A}_2$ для произвольной подзадачи PCATSP$_{u,v}$, удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{PCATSP}^*_{u,v} \leqslant \mathrm{cost}\,(R_{u,v}) \leqslant (\alpha+1)\cdot(\mathrm{PCATSP\,LP}^*_{u,v}),$$

где PCATSP LP$^*_{u,v}$ — оптимальное значение вещественной релаксации задачи (6)–(11). В самом деле, преобразуем найденное на шаге 2 алгоритма оптимальное решение $(\bar{x}, \bar{y})$ задачи PCATSP LP$_{u,v}$ следующим образом: $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\hat{x}, \hat{y})$, где

$$\hat{x} = \frac{\alpha+1}{\alpha}\,\bar{x}; \qquad \hat{y}_w = \begin{cases} 1, \text{ если } \bar{y}_w \geqslant \dfrac{\alpha}{\alpha+1}, \\ 0 \text{ — в противном случае,} \end{cases} \qquad (w \in V). \tag{13}$$

По построению множество $T_{u,v}$, задаваемое соотношением (12), удовлетворяет соотношению $T_{u,v} = \{w \in V : \hat{y}_w = 1\}$. Без ограничения общности полагаем $|T_{u,v}| \geq 3$. Пусть $R_{u,v}$ — приближенное решение, найденное алгоритмом $\mathcal{A}_0$ для вспомогательной задачи ATSP, заданной на подграфе $G\langle T_{u,v}\rangle$, x' — соответствующее ему допустимое решение задачи

$$\min \sum c_e x_e \tag{14}$$

$$x(\delta^+(w)) = x(\delta^-(w)) \qquad (w \in T_{u,v}), \tag{15}$$

$$x(\delta(U)) \geqslant 2 \qquad (\varnothing \neq U \subset T_{u,v}), \tag{16}$$

$$x_e \in \mathbb{Z}_+. \tag{17}$$

По выбору алгоритма $\mathcal{A}_0$ для стоимости $c(x')$ данного решения справедлива оценка

$$\mathrm{ATSP}^* \leqslant \frac{c(x')}{\mathrm{ATSP\,LP}^*} \leqslant \alpha. \tag{18}$$

В свою очередь, задача ATSP LP, вещественная релаксация задачи (14)–(17), эквивалентна задаче

$$\min \sum c_e x_e \tag{19}$$

$$x(\delta(S)) \geqslant 2 \qquad (S \subset V : T_{u,v} \cap S \neq \varnothing,\ T_{u,v} \cap V \backslash S \neq \varnothing), \tag{20}$$

$$x(\delta^+(w)) = x(\delta^-(w)) \qquad (w \in V), \tag{21}$$

$$x_e \geqslant 0 \qquad (e \in E), \tag{22}$$

$$x(\delta(w)) \begin{cases} \geq 2, & \text{если } w \in T_{u,v}, \\ = 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \tag{23}$$

Пусть L_1 и L_2 — задачи линейного программирования, задаваемые соотношениями (19)–(22) и (19)–(23) соответственно. По построению обе задачи разрешимы. Обозначим через X_1^* и X_2^* их оптимальные множества и покажем, что произвольный рациональнозначный вектор $x^* = \arg\min\{\sum\limits_{e\in E} x_e : x \in X_1^*\}$ есть элемент X_2^*, для чего, очевидно, достаточно убедиться, что x^* удовлетворяет ограничению (23), при этом ясно, что достаточно обосновать равенства

$$x^*(\delta(w)) = 0 \quad (w \notin T_{u,v}),$$

так как справедливость неравенства $x^*(\delta(w)) \geqslant 2$ для произвольной вершины $w \in T_{u,v}$ следует из соотношения (20). Пусть, от противного, $x^*(\delta(w_0)) > 0$ для некоторой вершины $w_0 \notin T_{u,v}$. Поскольку все координаты x^* рациональны, найдется число $D \geqslant 1$, для которого вектор $\xi^* = D\,x^*$ является целочисленным. По построению координаты вектора ξ^* являются кратностями использования дуг графа G замкнутым маршрутом, посещающим вершину w_0. Проведя рассуждения по аналогии с доказательством [40, Lemma 2.2], убедимся в наличии в данном маршруте фрагмента w', w_0, w'', замена которого на дугу (w', w'') и обновление кратностей использования дуг приводят к получению вектора $\tilde{\xi}$, удовлетворяющего соотношениям (21), (22) и $\tilde{\xi}(S) \geqslant 2D$ для каждого S из (20). Кроме того, вектор $\tilde{\xi}$ удовлетворяет соотношениям $\sum\limits_{e\in E} \tilde{\xi}_e = \sum\limits_{e\in E} \xi_e^* - 1$ и $\sum\limits_{e\in E} c_e\tilde{\xi}_e \leqslant \sum\limits_{e\in E} c_e\xi_e^*$ в силу неравенства треугольника. Положив $\tilde{x} = (1/D)\,\tilde{\xi}$, получим допустимое решение задачи L_1, для которого

$$\sum_{e\in E} c_e x_e^* = \frac{1}{D}\sum_{e\in E} c_e \xi_e^* \geqslant \frac{1}{D}\sum_{e\in E} c_e\tilde{\xi}_e = \sum_{e\in E} c_e\tilde{x}_e \geqslant \sum_{e\in E} c_e x_e^*.$$

Следовательно, $\tilde{x} \in X_1^*$, причем $\sum\limits_{e\in E} \tilde{x}_e = \sum\limits_{e\in E} x_e^* - 1/D$, что противоречит выбору решения x^*.

Таким образом, нами показано, что

$$\text{ATSP LP}^* = L_1^* = L_2^*, \tag{24}$$

где L_1^* и L_2^* — оптимальные значения задач L_1 и L_2 соответственно.

Убедимся теперь в том, что $\hat{x}$ является допустимым решением задачи L_1. В самом деле, ограничение (21) следует из допустимости $(\bar{x}, \bar{y})$ в задаче PCATSP $\text{LP}_{u,v}$ и равенства $\hat{x} = [(\alpha+1)/\alpha]\,\bar{x}$. Аналогичным образом обосновывается справедливость ограничения (20) для произвольного S, для которого $|\{u,v\} \cap S| = 1$. Рассмотрим случай $S \cap \{u,v\} = \varnothing$ (в случае $\{u,v\} \subset S$ рассуждения проводятся по аналогии). Выбрав $w \in T_{u,v} \cap S$, имеем $\hat{y}_w = 1$ по построению, откуда, $\bar{y}_w \geq \alpha/(\alpha+1)$. Поскольку $\bar{x}$ — допустимое решение задачи (6)–(11), то $\bar{x}(\delta(w)) \geqslant 2\bar{y}_w$ и, следовательно,

$$\hat{x}(\delta(S)) = \sum_{e\in\delta(S)} \hat{x}_e = \frac{\alpha+1}{\alpha}\sum_{e\in\delta(S)} \bar{x}_e \geq 2\,\frac{\alpha+1}{\alpha}\,\bar{y}_w \geq 2.$$

В итоге получаем допустимое решение $(x', \hat{y})$ задачи (6)–(11), индуцированное маршрутом $R_{u,v}$ (построенным алгоритмом $\mathcal{A}_0$), стоимость которого описывается формулой

$$\mathrm{PCATSP}^*_{u,v} \leqslant \mathrm{cost}(R_{u,v}) = c(x') + \sum_{v \in V} \pi_v (1 - \hat{y}_v) \leqslant \alpha \cdot (\mathrm{ATSP\,LP}^*) + \sum_{v \in V} \pi_v (1 - \hat{y}_v)$$

$$\leqslant \alpha \cdot L_1^* + \sum_{v \in V} \pi_v (1 - \hat{y}_v) \leqslant \alpha \cdot c(\tilde{x}) + \sum_{v \in V} \pi_v (1 - \hat{y}_v) = (\alpha + 1) \cdot c(\bar{x}) + \sum_{v \in V} \pi_v (1 - \hat{y}_v)$$

в силу (18) и (24). Наконец, учитывая соотношение $1 - \tilde{y}_w \leqslant (\alpha + 1) \cdot (1 - \bar{y}_w)$, которое непосредственно следует из (13), выводим

$$\frac{\mathrm{cost}\,(R_{u,v})}{\mathrm{PCATSP\,LP}^*_{u,v}} = \frac{c(x') + \sum\limits_{v \in V} \pi_v (1 - \hat{y}_v)}{c(\bar{x}) + \sum\limits_{v \in V} \pi_v (1 - \bar{y}_v)}$$

$$\leq \frac{(\alpha + 1) \cdot c(\bar{x}) + (\alpha + 1) \cdot \sum\limits_{v \in V} \pi_v (1 - \bar{y}_v)}{c(\bar{x}) + \sum\limits_{v \in V} \pi_v (1 - \bar{y}_v)} = \alpha + 1.$$

2. Исключая из рассмотрения тривиальный случай оптимальности “пустого” маршрута и учитывая достижимость минимума в соотношении (5), положим $\mathrm{PCATSP}^* = \mathrm{PCATSP}^*_{\bar{u},\bar{v}}$ для некоторой пары $\{\bar{u}, \bar{v}\} \subset V$. По построению для результирующего маршрута $\bar{R}$ имеем

$$\mathrm{PCATSP}^* \leqslant \mathrm{cost}\,(\bar{R}) \leqslant \mathrm{cost}\,(R_{\bar{u},\bar{v}}) \leqslant (\alpha + 1) \cdot (\mathrm{PCATSP\,LP}^*_{\bar{u},\bar{v}})$$

$$\leqslant (\alpha + 1) \cdot \mathrm{PCATSP}^*_{\bar{u},\bar{v}} = (\alpha + 1) \cdot \mathrm{PCATSP}^*.$$

Теорема доказана.

7. Обобщенная задача коммивояжера

В Generalized Traveling Salesman Problem (GTSP) заданы взвешенный ориентированный граф $G = (V, E, c)$ и разбиение множества его вершин на кластеры $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$. Требуется построить связный эйлеров подграф минимального веса, посещающий хотя бы по одной вершине из каждого кластера. Для произвольной неотрицательной весовой функции и фиксированного числа кластеров задача разрешима за полиномиальное время путем сведения к поиску кратчайшего пути в бесконтурной взвешенной сети; при количестве кластеров порядка $k = O(\log n)$ задача разрешима за полиномиальное время, например адаптацией классической схемы динамического программирования Хелда — Карпа (см. [41]). Тем не менее в общей постановке, в которой число кластеров является частью входа, задача остается NP-трудной в сильном смысле даже на евклидовой плоскости (см. [20]).

В области эффективных алгоритмов с гарантированными оценками точности для GTSP на сетке предложен $(1.5 + 8\sqrt{2} + \varepsilon)$-приближенный алгоритм (см. [42]); кроме того, обоснованы эффективные полиномиальные схемы (EPTAS) для случаев медленно ($k = O(\log n)$) и быстро ($k = n - O(\log n)$) растущего количества кластеров (см. [43]).

А л г о р и т м $\mathcal{A}_3$.

1. Построим метрическое замыкание $\bar{G} = (V, \bar{E}, \bar{c})$ исходного орграфа.

2. Определим S как семейство уникальных выборок s_i $(i = \overline{1, m})$, содержащих по одной вершине из каждого кластера.

3. Для каждой выборки s_i $(i = \overline{1, m})$ определим подграф $\bar{G}_{s_i}$ графа $\bar{G}$, индуцированный вершинами данной выборки, и построим для него α-приближенное решение задачи ATSP.

4. Маршрут, на котором достигается минимум решения ATSP, — искомый. □

Теорема 6. *Наличие α-приближенного алгоритма для* ATSP *с неравенством треугольника гарантирует построение алгоритмом $\mathcal{A}_3$ α-приближенного решения для асимметричной задачи* GTSP *при условии $k \geq n - O(\log n)$.*

Доказательство. Если изначально заданный орграф $G = (V, E, c)$ не был полным, перейдем к его метрическому замыканию $\bar{G} = (V, \bar{E}, \bar{c})$. По условию в каждом кластере V_i необходимо выбрать представителя, который будет посещен результирующим маршрутом. Чтобы оценить сверху число таких выборок, рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$\max t_1 \times \ldots \times t_k,$$
$$\sum_{i=1}^{k} t_i = n, \quad t_i > 0,$$

в которой $t_i = |V_i|$. Нетрудно убедиться, что оптимальное (дробное) значение данной задачи $(n/k)^k$ достигается в точке $(n/k)\,[1, \ldots, 1]^T$; число выборок — $T \leq (n/k)^k$; при $k \geq n - D\log n$ число выборок $T \leq n^D$, т. е. ограничено сверху полиномом при некотором постоянном $D > 0$.

Далее для каждой полученной выборки на индуцированном соответствующими вершинами графе запускаем α-приближенный алгоритм для ATSP, выбираем наименьший по весу маршрут; он и будет α-приближенным решением для исходной постановки GTSP; в свою очередь, сложность алгоритма останется полиномиальной.

Теорема доказана.

Заключение

В статье приведены полиномиальные алгоритмы с фиксированными оценками точности для серии асимметричных маршрутных задач, в том числе для задачи о штейнеровском цикле, задачи маршрутизации транспорта с неделимым спросом, задачи коммивояжера с призами и обобщенной задачи коммивояжера с дополнительным ограничением на рост числа кластеров. Своим появлением наши алгоритмы обязаны пионерскому результату О. Свенссона и В. Трауб для асимметричной задачи коммивояжера с неравенством треугольника, являющимся основным компонентом каждого из них. Для большей части рассмотренных задач аппроксимируемость в классе алгоритмов с фиксированной оценкой точности удалось обосновать впервые, в остальных случаях фактор аппроксимации удалось сократить. Обозначим коэффициент О. Свенссона и В. Трауб через $\alpha = 22+\varepsilon$. С учетом этого обозначения в таблице ниже приведены полученные в данной статье результаты:

Верхние оценки фактора аппроксимации

Асимметричная постановка	Фактор аппроксимации
SCP	α
RPP	α
ACVRP с неделимым неоднородным спросом	$3\,\alpha + 2$
CARP	$3\,\alpha + 2$
PCATSP	$\alpha + 1$
GTSP с условием $k \geq n - O(\log n)$	α

Отметим, что примененный в работе подход, использующий непосредственное сведение к задаче ATSP, не всегда гарантируем успех. В ближайших работах авторы надеются получить новые результаты в области аппроксимируемости асимметричных маршрутных задач, основанные на более глубокой адаптации данного подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gutin G., Punnen A. P.** The Traveling Salesman Problem and its variations. Boston; NY: Springer, 2007. 830 p. doi: 10.1007/b101971 .
2. **Toth P., Vigo D.** Vehicle routing: problems, methods and applications. Philadelphia: SIAM, 2014. 463 p.
3. **Mor A., Speranza M. G.** Vehicle routing problems over time: a survey // J. Oper. Res., 4OR-Q. 2020. Vol. 18, no. 2. P. 129–149. doi: 10.1007/s10288-020-00433-2 .
4. **Chentsov A. G., Chentsov P. A., Petunin A. A., Sesekin A .N.** Model of megalopolises in the tool path optimisation for CNC plate cutting machines // Internat. J. Product. Res. 2018. Vol. 56, no. 14. P. 4819–4830. doi: 10.1080/00207543.2017.1421784 .
5. **Chung S. H., Sah B., Lee J.** Optimization for drone and drone-truck combined operations: A review of the state of the art and future directions // Comput. Oper. Res. 2020. Vol. 123. Art. no. 105004. doi: 10.1016/j.cor.2020.105004 .
6. **Dantzig G. B., Fulkerson D. R., Johnson S. M.** Solution of a large-scale traveling-salesman problem // J. Oper. Res. Soc. America. 1954. Vol. 2, no. 4. doi: 10.1287/opre.2.4.393 .
7. **Dantzig G. B., Ramser J. H.** The truck dispatching problem // Manag. Sci. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 80–91. doi: 10.1287/MNSC.6.1.80 .
8. **Chentsov A. G., Korotaeva L. N.** The dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem // Math. Comp. Modelling. 1997. Vol. 25, no. 1. P. 93–105. doi: 10.1016/S0895-7177(96)00187-2 .
9. **Chentsov A. G., Khachay M. Yu., Khachay D. M.** An exact algorithm with linear complexity for a problem of visiting megalopolises // Proc. Steklov Inst. Math. 2016. Vol. 295, no. 1. P. 38–46. doi: 10.1134/S0081543816090054 .
10. **Archetti C., Bianchessi N., Speranza M.** Optimal solutions for routing problems with profits // Discrete Appl. Math. 2013. Vol. 161, no. 4-5. P. 547–557. doi: 10.1016/j.dam.2011.12.021 .
11. **Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E.** Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing // Math. Program. Comp. 2017. Vol. 9, no. 1. P. 61–100. doi: 10.1007/s12532-016-0108-8 .
12. **Pessoa A., Sadykov R., Uchoa E., Vanderbeck F.** A generic exact solver for vehicle routing and related problems // Math. Program. 2020. Vol. 183. P. 483–523. doi: 10.1007/978-3-030-17953-3_27 .
13. **Avdoshin S., Beresneva E.** Local search metaheuristics for capacitated vehicle routing problem: a comparative study // Proc. ISP RAS. 2019. Vol. 31, no. 4. P. 121–138. doi: 10.15514/ISPRAS-2019-31(4)-8 .
14. **Qiu M., Fu Z., Eglese R., Tang Q.** A Tabu search algorithm for the Vehicle Routing Problem with discrete split deliveries and pickups // Comput. Oper. Res. 2018. Vol. 100. P. 102–116. doi: 10.1016/j.cor.2018.07.021 .
15. **Frifita S., Masmoudi M.** VNS methods for home care routing and scheduling problem with temporal dependencies, and multiple structures and specialties // International Transactions in Operational Research. 2020. Vol. 27, no. 1. P. 291–313. doi: 10.1111/itor.12604 .
16. **Smith S., Imeson F.** GLNS: An effective large neighborhood search heuristic for the Generalized Traveling Salesman Problem // Comput. Oper. Res. 2017. Vol. 87. P. 1–19. doi: 10.1016/j.cor.2017.05.010 .
17. **Nazari M., Oroojlooy A., Takac M., Snyder L. V.** Reinforcement learning for solving the vehicle routing problem // Proc. of the 32nd International Conf. on Neural Information Processing Systems (NIPS'18). 2018. P. 9861–9871. doi: 10.5555/3327546.3327651 .
18. **Verbeeck C., Vansteenwegen P., Aghezzaf E.-H.** The time-dependent orienteering problem with time windows: a fast ant colony system // Ann. Oper. Res. 2017. Vol. 254. P. 481–505. doi: 10.1007/s10479-017-2409-3 .
19. **Zhukova G. N., Ulyanov M. V., Fomichev M. I.** A hybrid exact algorithm for the asymmetric Traveling Salesman Problem: Construction and a statistical study of computational efficiency // Automat. Remote Control. 2019. Vol. 80, no. 11. P. 2054–2067. doi: 10.1134/S0005117919110092 .
20. **Papadimitriou C.** Euclidean TSP is NP-complete // Theoret. Comput. Sci. 1977. Vol. 4, no. 3. P. 237–244. doi: 10.1016/0304-3975(77)90012-3 .
21. **Khachay M., Neznakhina K.** Towards tractability of the Euclidean Generalized Traveling Salesman Problem in grid clusters defined by a grid of bounded height // Optimization Problems and Their Applications. 2018. Communications in Computer and Information Science. Vol. 871. P. 68–77. doi: 10.1007/978-3-319-93800-4_6 .

22. **Sahni S., Gonzales T.** P-complete approximation problems // JACM. 1976. Vol. 23, no. 3. P. 555–565. doi: 10.1145/321958.321975 .
23. **Asano T., Katoh N., Tamaki H., Tokuyama T.** Covering points in the plane by K-tours: Towards a polynomial time approximation scheme for General K //Proc. of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'97). NY: ACM, 1997. P. 275–283. doi: 10.1145/258533.258602 .
24. **Bartal Y., Gottlieb L. A., Krauthgamer R.** The traveling salesman problem: low-dimensionality implies a polynomial time approximation scheme // SIAM J. Comput. 2016. Vol. 45. P. 1563–1581. doi: 10.1145/2213977.2214038 .
25. **Khachay M., Ogorodnikov Yu., Khachay D.** Efficient approximation of the metric CVRP in spaces of fixed doubling dimension // J. Glob. Optim. 2021. Vol. 80, no. 3. P. 679–710. doi: 10.1007/s10898-020-00990-0 .
26. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the Travelling Salesman Problem: Technical Report 388 / Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University. 1976. 5 p.
27. **Сердюков А. И.** О некоторых экстремальных обходах в графах // Управляемые системы. 1978. № 17. С. 76–79.
28. **Asadpour A., Goemans M., Madry A., Gharan S. O., Saberi A.** An $O(\log n/\log\log n)$-approximation algorithm for the Asymmetric Traveling Salesman Problem // Oper. Res. 2017. Vol. 65, no. 4. P. 1043–1061. doi: 10.1287/opre.2017.1603 .
29. **Svensson O., Tarnawski J., Végh L.** A constant-factor approximation algorithm for the asymmetric Traveling Salesman Problem // Proc. of the 50th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC). 2018. P. 204–213. doi: 10.1145/3188745.3188824 .
30. **Traub V., Vygen J.** An improved approximation algorithm for ATSP // Proc. of the 52nd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing (STOC 2020). 2020. P. 1–13. doi: 10.1145/3357713.3384233 .
31. **van Bevern R., Komusiewicz C., Sorge M.** A parameterized approximation algorithm for the mixed and windy capacitated arc routing problem: theory and experiments // Networks. 2017. Vol. 70, no. 3. P. 262–278. doi: 10.1002/net.21742 .
32. **Wahlström M.** Abusing the Tutte Matrix: An algebraic instance compression for the K-set-cycle problem // STACS. 2013. P. 341–352. doi: 10.4230/LIPIcs.STACS.2013.341 .
33. **Steinová M.** Approximability of the minimum Steiner Cycle Problem // Comput. Inform. 2010. Vol. 29, no. 6+. P. 1349–1357.
34. **Das A., Mathieu C.** A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean Capacitated Vehicle Routing // Algorithmica. 2015. Vol. 73, no. 1. P. 115–142. doi: 10.1007/s00453-014-9906-4 .
35. **Adamaszek A., Czumaj A., Lingas A.** PTAS for k-Tour Cover Problem on the plane for moderately large values of k // Internat. J. Foundations Comp. Sci. 2010. Vol. 21, no. 6. P. 893–904. doi: 10.1142/S0129054110007623 .
36. **Хачай М. Ю., Огородников Ю. Ю.** Аппроксимационная схема Хаймовича — Ринноя Кана для CVRP в метрических пространствах фиксированной размерности удвоения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 235–248. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-235-248 .
37. **Hall P.** On Representatives of Subsets // J. London Math. Soc. 1935. Vol. 10, no. 1. P. 26–30. doi: 10.1112/jlms/s1-10.37.26 .
38. **Balas E.** The prize collecting traveling salesman problem // Networks. 1989. Vol. 19, no. 6. P. 621–636. doi: 10.1002/net.3230190602 .
39. **Paul A., Freund D., Ferber A., Shmoys D., Williamson D.** Budgeted prize-collecting traveling salesman and minimum spanning tree problems // Math. Oper. Res. 2019. Vol. 45, no. 2. P. 576–590. doi: 10.1287/moor.2019.1002 .
40. **Bienstock D., Goemans M. X., Simchi-Levi D., Williamson D.** A note on the prize collecting traveling salesman problem // Math. Progr. 1993. Vol. 59, no. 1. P. 413–420. doi: 10.1007/BF01581256 .
41. **Khachay M., Ukolov S., Petunin A.** Problem-specific branch-and-bound algorithms for the precedence constrained generalized Traveling Salesman Problem // Optimization and Applications – 12th International Conference (OPTIMA 2021): Proc. 2021. P. 136–148. P. 136–148. doi: 10.1007/978-3-030-91059-4_10 .
42. **Bhattacharya B., Ćustić A., Rafiey A., Rafiey A., Sokol V.** Approximation algorithms for generalized MST and TSP in grid clusters // Combinatorial Optimization and Applications. 2015. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 9486. P. 110–125. doi: 10.1007/978-3-319-26626-8_9 .

43. **Khachay M., Neznakhina K.** Complexity and approximability of the Euclidean generalized traveling salesman problem in grid clusters // Ann. Math. Artif. Intell. 2020. Vol. 88, no. 1. P. 53–69. doi: 10.1007/s10472-019-09626-w .

Поступила 12.05.2022
После доработки 14.06.2022
Принята к публикации 20.06.2022

Хачай Михаил Юрьевич
чл.-корр. РАН
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru
Незнахина Екатерина Дмитриевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
г. Екатеринбург
e-mail: eneznakhina@yandex.ru

Рыженко Ксения Валерьевна
аспирант, математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: kseniarizhenko@gmail.com

REFERENCES

1. Gutin G., Punnen A.P. *The traveling salesman problem and its variations.* New York, NY: Springer, 2007, 830 p. doi: 10.1007/b101971 .
2. Toth P., Vigo D. *Vehicle routing: problems, methods, and applications.* Philadelphia: SIAM, 2014, 463 p. ISBN: 1611973589 .
3. Mor A., Speranza M.G. Vehicle routing problems over time: a survey. *J. Oper. Res., 4OR-Q*, 2020, vol. 18, no. 2, pp. 129–149. doi: 10.1007/s10288-020-00433-2 .
4. Chentsov A.G., Chentsov P.A., Petunin A.A., Sesekin A.N. Model of megalopolises in the tool path optimisation for CNC plate cutting machines. *Internat. J. Product. Res.*, 2018, vol. 56, no. 14, pp. 4819–4830. doi: 10.1080/00207543.2017.1421784 .
5. Chung S.H., Sah B., Lee J. Optimization for drone and drone-truck combined operations: A review of the state of the art and future directions. *Comput. Oper. Res.*, 2020, vol. 123, art. no. 105004. doi: 10.1016/j.cor.2020.105004 .
6. Dantzig G., Fulkerson R., Johnson S. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *J. Oper. Res. Soc. America*, 1954, vol. 2, no. 4. doi: 10.1287/opre.2.4.393 .
7. Dantzig G., Ramser J.H. The truck dispatching problem. *Manag. Sci.*, 1959, vol. 6, no. 1, pp. 80–91. doi: 10.1287/MNSC.6.1.80 .
8. Chentsov A., Korotayeva L.N. The dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem. *Math. Comp. Modelling*, 1997, vol. 25, no. 1, pp. 93–105. doi: 10.1016/S0895-7177(96)00187-2 .
9. Chentsov A.G., Khachai M.Yu., Khachai D.M. An exact algorithm with linear complexity for a problem of visiting megalopolises. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 295, no. 1, pp. 38–46. doi: 10.1134/S0081543816090054 .
10. Archetti C., Bianchessi N., Speranza M. Optimal solutions for routing problems with profits. *Discr. Appl. Math.*, 2013, vol. 161, no. 4-5, pp. 547–557. doi: 10.1016/j.dam.2011.12.021 .
11. Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E. Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing. *Math. Program. Comp.*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 61–100. doi: 10.1007/s12532-016-0108-8 .

12. Pessoa A., Sadykov R., Uchoa E., Vanderbeck F. A generic exact solver for vehicle routing and related problems. *Math. Program.*, 2019, vol. 183, pp. 483–523. doi: 10.1007/978-3-030-17953-3_27 .
13. Avdoshin S.M., Beresneva E. Local search metaheuristics for capacitated vehicle routing problem: a comparative study. *Proc. ISP RAS*, 2019, vol. 31, no. 4, pp. 121–138. doi: 10.15514/ISPRAS-2019-31(4)-8 .
14. Qiu M., Fu Z., Eglese R., Tang Q. A Tabu search algorithm for the vehicle routing problem with discrete split deliveries and pickups. *Comput. Oper. Res.*, 2018, vol. 100, pp. 102–116. doi: 10.1016/j.cor.2018.07.021 .
15. Frifita S., Masmoudi M. VNS methods for home care routing and scheduling problem with temporal dependencies, and multiple structures and specialties. *Int. Trans. Oper. Res.*, 2020, vol. 27, no. 1, pp. 291–313. doi: 10.1111/itor.12604 .
16. Smith S., Imeson F. GLNS: an effective large neighborhood search heuristic for the generalized traveling salesman problem. *Comput. Oper. Res.*, 2017, vol. 87, pp. 1–19. doi: 10.1016/j.cor.2017.05.010 .
17. Nazari M., Oroojlooy A., Takac M., Snyder L.V. Reinforcement learning for solving the vehicle routing problem. In: *Proc. of the 32nd International Conf. on Neural Information Processing Systems* (*NIPS'18*), 2018, pp. 9861–9871. doi: 10.5555/3327546.3327651 .
18. Verbeeck C., Vansteenwegen P., Aghezzaf E.-H. The time-dependent orienteering problem with time windows: a fast ant colony system. *Ann. Oper. Research*, 2017, vol. 254, pp. 481–505. doi: 10.1007/s10479-017-2409-3 .
19. Zhukova G.N., Ul'yanov M.V., Fomichev M.I. A hybrid exact algorithm for the asymmetric traveling salesman problem: construction and a statistical study of computational efficiency. *Autom. Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 11, pp. 2054–2067. doi: 10.1134/S0005117919110092 .
20. Papadimitriou C. The Euclidean travelling salesman problem is NP-complete. *Theor. Comput. Sci.*, 1977, vol. 4, no. 3, pp. 237–244. doi: 10.1016/0304-3975(77)90012-3 .
21. Khachay M., Neznakhina K. Towards tractability of the Euclidean generalized traveling salesman problem in grid clusters defined by a grid of bounded height. In: *Optimization Problems and Their Applications.* Communications in Computer and Information Science, vol. 871. Springer, 2018, pp. 68–77. doi: 10.1007/978-3-319-93800-4_6 .
22. Sahni S., Gonzales T. P-complete approximation problems. *J. ACM*, vol. 23, no. 3, pp. 555–565. doi: 10.1145/321958.321975 .
23. Asano T., Katoh N., Tamaki H., Tokuyama T. Covering points in the plane by K-tours: Towards a polynomial time approximation scheme for general K. In: *STOC '97: Proceedings of the twenty-ninth annual ACM symposium on Theory of computing.* NY: ACM, 1997, pp. 275–283. doi: 10.1145/258533.258602 .
24. Bartal Y., Gottlieb L.A., Krauthgamer R. The traveling salesman problem: low-dimensionality implies a polynomial time approximation scheme. *SIAM J. Comput.*, 2012, vol. 45, pp. 1563–1581. doi: 10.1145/2213977.2214038 .
25. Khachay M., Ogorodnikov Yu., Khachay D. Efficient approximation of the metric CVRP in spaces of fixed doubling dimension. *J. Glob. Optim*, 2021, vol. 80, no. 3, pp. 679–710. doi: 10.1007/s10898-020-00990-0 .
26. Christofides N. *Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem.* Technical Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, 1976. 5 p.
27. Serdyukov A.I. Some extremal bypasses in graphs. *Upravliaemie Systemy*, 1978, no. 17, pp. 76–79 (in Russian).
28. Asadpour A., Goemans M., Madry A., Gharan S.O., Saberi A. An $O(\log n/\log\log n)$-approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. *Oper. Res.*, 2017, vol. 65, no. 4, pp. 1043–1061. doi: 10.1287/opre.2017.1603 .
29. Svensson O., Tarnawski J., Végh L. A constant-factor approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. In: *STOC 2018: Proc. of the 50th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, 2018, pp. 204–213. doi: 10.1145/3188745.3188824 .
30. Traub V., Vygen J. An improved approximation algorithm for ATSP. In: *STOC 2020: Proc. of the 52nd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, 2020, pp. 1–13. doi: 10.1145/3357713.3384233 .
31. van Bevern R., Komusiewicz C., Sorge M. A parameterized approximation algorithm for the mixed and windy capacitated arc routing problem: Theory and experiments. *Networks*, 2017, vol. 70, no. 3, pp. 262–278. doi: 10.1002/net.21742 .

32. Wahlström M. Abusing the Tutte matrix: An algebraic instance compression for the K-set-cycle problem. In: *STACS*, 2013, pp. 341–352. doi: 10.4230/LIPIcs.STACS.2013.341 .
33. Steinová M. Approximability of the minimum Steiner cycle problem. *Comput. Inform.*, 2010, vol. 29, no. 6+, pp. 1349–1357.
34. Das A., Mathieu C. A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing. *Algorithmica*, 2015, vol. 73, no. 1, pp. 115–142. doi: 10.1007/s00453-014-9906-4 .
35. Adamaszek A., Czumaj A., Lingas A. PTAS for k-tour cover problem on the plane for moderately large values of k. *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 2010, vol. 21, no. 6, pp. 893–904. doi: 10.1142/S0129054110007623 .
36. Khachay M.Yu., Ogorodnikov Yu.Yu. Haimovich – Rinnooy Kan polynomial-time approximation scheme for the CVRP in metric spaces of a fixed doubling dimension. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 235–248 (in Russian) . doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-235-248 .
37. Hall P. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, 1935, vol. 10, no. 1, pp. 26–30. doi: 10.1112/jlms/s1-10.37.26 .
38. Balas E. The prize collecting traveling salesman problem. *Networks*, 1989, vol. 19, no. 6, pp. 621–636. doi: 10.1002/net.3230190602 .
39. Paul A., Freund D., Ferber A., Shmoys D., Williamson D. Budgeted prize-collecting traveling salesman and minimum spanning tree problems. *Math. Oper. Res.*, 2019, vol. 45, no. 2, pp. 576–590. doi: 10.1287/moor.2019.1002 .
40. Bienstock D., Goemans M.X., Simchi-Levi D., Williamson D. A note on the prize collecting traveling salesman problem. *Math. Program.*, 1993, vol. 59, no. 1, pp. 413–420. doi: 10.1007/BF01581256 .
41. Khachay M., Ukolov S., Petunin A. Problem-specific branch-and-bound algorithms for the precedence constrained generalized traveling salesman problem. In: *Optimization and Applications - 12th International Conference, OPTIMA 2021, Proceedings*, 2021, pp. 136–148. doi: 10.1007/978-3-030-91059-4_10 .
42. Bhattacharya B., Ćustić A., Rafiey A., Rafiey A., Sokol V. Approximation algorithms for generalized MST and TSP in grid clusters. In: *Combinatorial Optimization and Applications*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9486. Springer, 2015, pp. 110–125. doi: 10.1007/978-3-319-26626-8_9 .
43. Khachay M., Neznakhina K. Complexity and approximability of the Euclidean generalized traveling salesman problem in grid clusters. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 2020, vol. 88, no. 1, pp. 53–69. doi: 10.1007/s10472-019-09626-w .

Received May 12, 2022
Revised June 14, 2022
Accepted June 20, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00672).

Mikhail Yurevich Khachai, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru .

Ekaterina Dmitrievna Neznakhina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: eneznakhina@yandex.ru .

Kseniya Valerevna Ryzhenko, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: kseniarizhenko@gmail.com .

Cite this article as: M. Yu. Khachai, E. D. Neznakhina, K. V. Ryzhenko. Constant-factor approximation algorithms for a series of combinatorial routing problems based on the reduction to Asymmetric Traveling Salesman Problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 241–258.