ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.9

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ, СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ НЕГЛАДКОГО АНАЛИЗА И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРАВИЛА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА В НЕЛИНЕЙНОМ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ[1]

М. И. Сумин

Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) — в регулярной параметрической нелинейной (невыпуклой) задаче оптимального управлении для параболического уравнения с граничным управлением и аддитивно зависящим от параметра операторным ограничением-равенством (метод возмущений). Множество допустимых управлений задачи и значения задающего ограничение-равенство оператора вкладываются в пространства суммируемых с квадратом функций. Основное предназначение регуляризованных ПЛ и ПМП — устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги в рассматриваемой задаче. Регуляризованные ПЛ и ПМП формулируются как теоремы существования МПР, состоящих из минималей (субминималей) модифицированных функционалов Лагранжа, конструкции которых прямыt следствия субдиффереציальных свойств полунепрерывной снизу и, вообще говоря, невыпуклой функции значений как функции параметра задачи. Они “преодолевают” свойства некорректности ПЛ и ПМП, являются регуляризирующими алгоритмами и служат теоретической основой для создания алгоритмов практического решения оптимизационной задачи.

Ключевые слова: нелинейное оптимальное управление, параболическое уравнение, операторное ограничение, метод возмущений, субдифференциалы негладкого анализа, двойственная регуляризация, минимизирующая последовательность, регуляризирующий алгоритм, принцип Лагранжа, теорема Куна — Таккера, принцип максимума Понтрягина.

M. I. Sumin. Perturbation method, subdifferentials of nonsmooth analysis, and regularization of the Lagrange multiplier rule in nonlinear optimal control.

We consider the regularization of classical optimality conditions — the Lagrange principle (LP) and the Pontryagin maximum principle (PMP) — in a regular parametric nonlinear (nonconvex) optimal control problem for a parabolic equation with boundary control and with an operator equality-constraint additively depending on the parameter (perturbation method). The set of admissible controls of the problem and the values of the operator defining the equality-constraint are embedded into the spaces of square-summable functions. The main purpose of the regularized LP and PMP is the stable generation of minimizing approximate solutions (MASs) in the sense of J. Warga in the problem under consideration. The regularized LP and PMP are formulated as existence theorems for MASs consisting of minimals (subminimals) of modified Lagrange functionals whose constructions are direct consequences of the subdifferential properties of a lower semicontinuous and, generally speaking, nonconvex value function as a function of the parameter of the problem. They “overcome” the ill-posedness properties of the LP and PMP, are regularizing algorithms, and serve as a theoretical basis for creating algorithms for the practical solution of an optimization problem.

Keywords: nonlinear optimal control, parabolic equation, operator constraint, perturbation method, subdifferentials of nonsmooth analysis, dual regularization, minimizing sequence, regularizing algorithm, Lagrange principle, Kuhn–Tucker theorem, Pontryagin maximum principle.

MSC: 49K20, 49N15, 47J06, 35R25

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-202-221

Введение

Классические условия оптимальности (КУО), лежащие в основе всей теории условной оптимизации и оптимального управления, были открыты благодаря необходимости решения различных практических оптимизационных (экстремальных) задач [1; 2]. Они играют центральную роль и в теории оптимального управления распределенными системами. Говоря о КУО, мы имеем в виду правило множителей Лагранжа или, более коротко, принцип Лагранжа (ПЛ),

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00199_а).

а также принцип максимума Понтрягина (ПМП). Сложность и актуальность изучения вопросов теории оптимального управления для уравнений с частными производными общеизвестны (см., например, книги [3; 4] и библиографию в них). Их многообразие очень велико, они постоянно на протяжении десятков лет привлекают внимание исследователей, о чем можно судить, бросив даже беглый взгляд на связанные с КУО публикации этого направления математической теории за последние несколько лет в целом ряде ведущих научных журналов[2].

Отличительная черта настоящей статьи по сравнению с подавляющим числом других работ, так или иначе посвященных КУО и в целом вопросам теории оптимального управления распределенными системами, заключается в исследовании проблемы регуляризации КУО. Целесообразность и актуальность изучения этой проблемы обусловлены тем, что КУО являются математическими объектами со свойствами некорректности [5; 6], в полной мере “унаследованными” от “порождающих их” самих оптимизационных задач [7]. Основанный на теории двойственности и методе тихоновской стабилизации [8] подход, связанный с регуляризацией именно КУО, а не собственно оптимизационных задач, был впервые предложен в [5; 9]. В последние несколько лет в целом ряде исследований (см., например, [6; 10], а также библиографию в них) указанный подход к регуляризации КУО был реализован для ряда выпуклых задач оптимального управления сосредоточенными и распределенными системами с операторными ограничениями в гильбертовом пространстве.

В статье обсуждается, как “нелинейная” версия основанной на двойственности регуляризации [11] порождает соответствующую регуляризацию КУО в форме ПЛ и ПМП в нелинейной (невыпуклой) регулярной[3] задаче оптимального граничного управления с аддитивно зависящим от параметра операторным ограничением-равенством (метод возмущений) в случае третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения. Основное предназначение регуляризованных ПЛ и ПМП — устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги в рассматриваемой задаче, решение которой может как существовать, так и не существовать. Регуляризованные ПЛ и ПМП формулируются как теоремы существования МПР, состоящих из минималей (субминималей) модифицированных функционалов Лагранжа, взятых при значении двойственной переменной в соответствии с выбранной процедурой двойственной регуляризации. Они “преодолевают” свойства некорректности ПЛ и ПМП, являются регуляризирующими алгоритмами и служат теоретической основой для создания алгоритмов практического решения оптимизационной задачи. Конструкции модифицированных функционалов Лагранжа являются прямыми следствиями субдифференциальных свойств полунепрерывной снизу и, вообще говоря, невыпуклой функции значений как функции параметра задачи. Благодаря указанной регулярности задачи получаемый ниже регуляризованный ПЛ (см. теорему 2) можно называть также регуляризованной теоремой Куна — Таккера. Получение регуляризованных ПЛ и ПМП опирается на “нелинейный вариант” метода возмущений (метод возмущений в случае выпуклой задачи условной оптимизации см. в [1, п. 3.3.2]) и конструкции современного негладкого анализа [12–14]. Важную роль здесь играют свойства плотности “нелинейной” субдифференцируемости (см. подразд. 2.3.2).

1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления

Пусть $W \subset \mathbb{R}^1$ — замкнутое ограниченное множество, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t)\colon x \in S,\ t \in (0,T)\}$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\mathcal{D} \equiv \{w \in L_2(S_T) : w(x,t) \in W$ п.в. на $S_T\}$, $\mathcal{D} \subset L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$, w — управление (управляющая функция). Норму в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с элементами w обозначим через $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

[2]Здесь, в первую очередь, достаточно указать такие математические журналы как “SIAM Journal on Control and Optimization”, “SIAM Journal on Optimization”, “Journal of Optimization Theory and Applications”, “Applied Mathematics and Optimization”, а также ряд других.

[3]Регулярность задачи понимается в смысле существования в ней обобщенного вектора Куна — Таккера (см. подразд. 2.3.5).

Рассмотрим параметрическую (т. е. зависящую от параметра) нелинейную (вообще говоря, невыпуклую) задачу условной минимизации нелинейного (вообще говоря, невыпуклого) функционала $g_0\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ с фазовым в финальный момент времени (полуфазовым) нелинейным (вообще говоря) ограничением-равенством

$$(OC_p) \qquad g_0(w) \equiv \int\limits_{\Omega} G(x, z[w](x,T))dx \to \inf,$$

$$g_1(w)(x) \equiv \varphi_1(x, z[w](x,T)) = p(x) \text{ при п.в. } x \in \Omega, \quad w \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H},$$

где $p \equiv p(\cdot) \in L_2(\Omega)$ — параметр. Наличие параметра в ограничении-равенстве задачи (OC_p) означает, что в статье имеется условие применения так называемого метода возмущений [1, п. 3.3.2]. Здесь и ниже $z[w]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ [15, гл. III] третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения дивергентного вида

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z + u_0(x,t) = 0, \tag{1.1}$$

$$z(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)z = w(x,t), \quad (x,t) \in S_T.$$

Ниже нам потребуются следующие условия на исходные данные задачи (OC_p):

а) функции G, $\varphi_1\colon \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ измеримы по x и непрерывно дифференцируемы по z, $G(\cdot, z(\cdot,T)) \in L_\infty(\Omega)$, $\varphi_1(\cdot, z(\cdot,T)) \in L_\infty(\Omega)$ $\forall z(\cdot,T) \in L_\infty(\Omega)$;

б) выполняются оценки для функций $G(\cdot,\cdot)$, $\varphi_1(\cdot,\cdot)$ и их градиентов по z

$$|G(x,z)|,\ |\nabla_z G(x,z)| \le C_M, \quad |\varphi_1(x,z)|,\ |\nabla_z \varphi_1(x,z)| \le C_M \ \ \forall\, x \in \Omega, \quad z \in S_M^1,$$

где $S_M^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < M\}$;

в) функции $a_{i,j}$, $i,j = 1,\dots,n$, a, $u_0 : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^1$, $v_0 : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $\sigma\colon S \times (0,T) \to \mathbb{R}^1$ измеримы в смысле Лебега;

г) справедливы неравенства

$$\nu|\xi|^2 \le a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2 \ \ \forall\, (x,t) \in Q_T, \quad \nu, \mu > 0;$$

д) имеют место включение $v_0 \in C(\overline{\Omega})$ и оценки

$$|a(x,t)|,\ |u_0(x,t)| \le K \text{ при п.в. } (x,t) \in Q_T,\ \ |v_0(x)| \le K \ \text{ при п.в. } x \in \Omega,$$

$$|\sigma(x,t)| \le K \ \text{ при п.в. } (x,t) \in S_T,$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная;

е) граница S является кусочно-гладкой.

З а м е ч а н и е 1. Задача оптимального управления (OC_p) формально записывается в компактной форме задачи нелинейного программирования $g_0(w) \to \inf$, $g_1(w) = p$, $w \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}$. Если мы определим, в какое пространство вкладываются элементы $g_1(w)$, то получим “полноценную” задачу математического (нелинейного) программирования. В качестве пространства образов оператора $g_1(\cdot)$ здесь можно формально рассматривать разные конкретные пространства: $C(\Omega)$, $L_\infty(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, и еще некоторые другие. То, какое из них “более подходящее”, зависит от свойств регулярности решений $z[w]$ задачи (1.1) и “целей регуляризации” КУО.

Фазовое ограничение-равенство $g_1(w) \equiv g_1(w)(\cdot) \equiv G_1(\cdot, z[w](\cdot, T)) = p(\cdot)$ понимается как равенство почти всюду в Ω: $G_1(x, z[w](x,T)) = p(x)$ при п.в. $x \in \Omega$. Так как $z[w] \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{\Omega})$ в силу условий на исходные данные задачи (1.1), $p \in L_2(\Omega)$, то в дальнейшем нам будет целесообразно смотреть на это равенство как на равенство в $L_2(\Omega)$. При этом в качестве "важного бонуса" мы получаем возможность оперирования с субдифференциальными в смысле негладкого (нелинейного) анализа свойствами функции значений параметрической задачи (OC_p) как функции в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Возможные неустойчивость и невыполнимость КУО [6] в подобных ситуациях характеризуют те сложности, которые возникают при анализе задачи (OC_p) в случае такого выбора пространства образов.

Пусть F — множество всевозможных наборов исходных данных $\mathsf{f} \equiv \{G, \varphi_1, a_{i,j}, i,j = 1,\ldots,n, a, u_0, v_0, \sigma\}$, для каждого из которых выполняются условия а), б), в), г), д), е) с не зависящими от набора постоянными $C(M)$, ν, μ, K. Определим наборы невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных из F соответственно: $\mathsf{f}^0 \equiv \{G^0, \varphi_1^0, a_{i,j}^0, i,j = 1,\ldots,n, a^0, u_0^0, v_0^0, \sigma^0\}$ и $\mathsf{f}^\delta \equiv \{G^\delta, \varphi_1^\delta, a_{i,j}^\delta, i,j = 1,\ldots,n, a^\delta, u_0^\delta, v_0^\delta, \sigma^\delta\}$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$, — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$|G^\delta(x,z) - G^0(x,z)| \le C_M^1\delta,\ |\varphi_1^\delta(x,z) - \varphi_1^0(x,z)| \le C_M^1\delta \ \ \forall\ (x,z) \in \Omega \times S_M^1, \tag{1.2}$$

$$\|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{\infty,Q_T}, \quad i,j = 1,\ldots,n,$$
$$\|a^\delta - a^0\|_{\infty,Q_T}, \quad \|u_0^\delta - u_0^0\|_{\infty,Q_T}, \quad \|v_0^\delta - v_0^0\|_{\infty,\Omega},\ \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T} \le C\delta,$$

где C_M^1, $C > 0$ не зависят от $\delta \in (0, \delta_0]$.

Соответствующее набору f, а точнее его части $\{a_{i,j}, i,j = 1,\ldots,n, a, u_0, v_0, \sigma\}$, решение начально-краевой задачи (1.1) обозначим через $z(\mathsf{f})[w] \equiv z[w]$. Обозначим также задачу (OC_p), решение $z[w]$, функционал g_0, оператор g_1 и т.п., отвечающие набору исходных данных f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, через (OC_p^δ), $z^\delta[w] \equiv z(\mathsf{f}^\delta)[w]$, g_0^δ, g_1^δ соответственно. Существование решения задачи (OC_p^0) априори не предполагается, однако, в том случае, если такие решения существуют, примем для них обозначение w_p^0.

Введем также обозначения

$$\|g_1^\delta(w) - p\| \equiv \|g_1^\delta(w) - p\|_{2,\Omega}, \quad \mathcal{D}_p^{\delta,\epsilon} \equiv \{w \in \mathcal{D}\colon \|g^\delta(w) - p\| \le \epsilon\}, \quad \epsilon \ge 0, \quad \mathcal{D}_p^{0,0} \equiv \mathcal{D}_p^0.$$

Определим обобщенное значение $\beta(p)$ задачи (OC_p^0) как

$$\beta(p) \equiv \beta_{+0}(p) \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon(p), \quad \beta_\epsilon(p) \equiv \inf_{w \in \mathcal{D}_p^{0,\epsilon}} g_0^0(w), \qquad \beta_\epsilon(p) \equiv +\infty, \ \text{ если } \ \mathcal{D}_p^{0,\epsilon} = \varnothing.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta(p) \le \beta_0(p)$, где $\beta_0(p) \equiv \inf\limits_{w \in \mathcal{D}_p^0} g_0^0(w)$ — классическое значение задачи. Однако благодаря условиям на исходные данные рассматриваемой задачи, влекущим определенные компактностные свойства решений начально-краевой задачи (1.1), имеет место равенство $\beta(p) = \beta_0(p)$ $\forall p \in L_2(\Omega)$. Справедлива следующая важнейшая для дальнейших построений лемма; см. лемму 7 в (Сумин М.И. Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: минимизирующие последовательности, функция значений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 1. С. 23–41).

Лемма 1. *Функция значений $\beta\colon L_2(\Omega) \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ является полунепрерывной снизу.*

Центральным для нас будет понятие обобщенной минимизирующей последовательности (ОМП) — минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [16, гл. III] в задаче (OC_p^0), т.е. последовательности элементов $w^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, такой, что

$$g_0^0(w^i) \le \beta(p) + \delta^i, \quad w^i \in \mathcal{D}_p^{0,\epsilon^i},$$

для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1, 2, \dots$.

Итак, мы имеем семейство зависящих от $\delta \in [0, \delta_0]$ параметрических задач оптимального управления

$$(OC_p^\delta) \qquad g_0^\delta(w) \equiv \int\limits_\Omega G^\delta(x, z^\delta[w](x,T))dx \to \inf,$$

$$g_1^\delta(w)(x) \equiv \varphi_1^\delta(x, z^\delta[w](x,T)) = p(x) \ \text{ при п.в. } x \in \Omega, \quad w \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H},$$

где $p \in L_2(\Omega)$ — параметр. Верхний индекс δ в исходных данных задачи (OC_p^δ) означает, что либо они заданы точно ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), т. е. задаются с ошибкой, величину которой и характеризует параметр $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$, — некоторое фиксированное число.

Введем важное для всех последующих построений

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots,$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1, 2, \dots$, вообще говоря, многозначный оператор $R_p(\cdot, \delta^k)$, который ставит в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, множество $R_p(\cdot, \delta^k) \equiv \mathcal{W}_p^{\delta^k} \subset \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (OC_p^0), если любая последовательность $w^{\delta^k} \in \mathcal{W}_p^{\delta^k}$, $k = 1, 2, \dots$, есть МПР в этой задаче.

2. Регуляризация правила множителей Лагранжа в задаче оптимального управления

Переходим к регуляризации правила множителей Лагранжа в задаче оптимального управления (OC_p^0). Прежде всего перепишем задачу (OC_p^0) и возмущенные задачи (OC_p^δ) в форме задач нелинейного программирования с операторным ограничением-равенством. С этой целью сформулируем необходимые утверждения, связанные с существованием обобщенных решений класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (1.1) и сопряженной с ней задачи, а также с оценками их устойчивости по возмущению коэффициентов задачи и управлений.

2.1. Необходимые вспомогательные результаты

В силу условий в), г), д), е) теорема существования обобщенного решения третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью [17, с. 34] (см. также [15, гл. III, §5]) обеспечивает разрешимость прямой задачи (1.1) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любого управления $w \in \mathcal{H}$ и любого $T > 0$, а также необходимые оценки для отклонений этих решений при возмущении исходных данных задачи и управлений.

Лемма 2. *Если выполняются условия* в), г), д), е)*, тогда для любого управления* $w \in L_2(S_T)$ *существует единственное решение* $z(\mathsf{f})[w] \equiv z[w]$ *класса* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *задачи* (1.1) *и имеет место оценка*[4]

$$|z[w]|_{Q_T} + \|z[w]\|_{2,S_T} \le C_T(\|u_0\|_{2,Q_T} + \|v_0\|_{2,\Omega} + \|w\|_{2,S_T}),$$

где постоянная C_T *не зависит от* $w \in L_2(S_T)$ *и набора исходных данных* $\mathsf{f} \in \mathsf{F}$.

Кроме того, пусть $\mathsf{f}, \widetilde{\mathsf{f}} \in \mathsf{F}$ *— два произвольных набора исходных данных,* $z(\mathsf{f})[\cdot]$, $z(\widetilde{\mathsf{f}})[\cdot]$ *— соответствующие им решения задачи* (1.1)*. Тогда, если выполняются условия* в), г), д), е)*, то для любых двух управлений* w^1, $w \in \mathcal{H}$,

[4]Напомним, что, как и в [15], $|z|_{Q_T} \equiv \max\limits_{0 \le t \le T} \|z(\cdot,t)\|_{2,\Omega} + \|z_x\|_{2,Q_T}$— норма в банаховом пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$.

$$|z(\widetilde{\mathsf{f}})[w^1] - z(\mathsf{f})[w]|_{Q_T} + \|z(\widetilde{\mathsf{f}})[w^1] - z(\mathsf{f})[w]\|_{2,S_T}$$

$$\leq C_T\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \|z_{x_j}(\mathsf{f})[w]\|_{2,Q_T} \|\widetilde{a}_{i,j}(\cdot,\cdot) - a_{i,j}(\cdot,\cdot)\|_{\infty,Q_T}$$

$$+ \|z(\mathsf{f})[w]\|_{2,Q_T} \|\widetilde{a}(\cdot,\cdot) - a(\cdot,\cdot)\|_{\infty,Q_T} + \|\widetilde{u}_0 - u_0\|_{2,Q_T} + \|\widetilde{v}_0 - v_0\|_{2,\Omega}$$

$$+ \|w^1 - w\|_{2,S_T} + \|z(\mathsf{f})[w]\|_{2,S_T} \|\widetilde{\sigma} - \sigma\|_{\infty,S_T}\Big),$$

где постоянная C_T не зависит от наборов исходных данных f, $\widetilde{\mathsf{f}} \in \mathsf{F}$ *и управлений* w, $w^1 \in \mathcal{H}$.

Одновременно следствием введенных выше условий на исходные данные и теорем существования (см., например, [18, теорема 3.2]) непрерывного вплоть до границы цилиндра Q_T обобщенного решения начально-краевой задачи (1.1) является ее разрешимость в классе $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$. Можно говорить о том, что справедливо утверждение, дополняющее лемму 2.

Лемма 3. *Пусть $l > n + 1$. Если выполняются условия* в), г), д), е), *то для любого управления $w \in L_l(S_T)$ при любом $T > 0$ и любом наборе* $\mathsf{f} \in \mathsf{F}$ *прямая задача* (1.1) *однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ и справедлива оценка*

$$|z(\mathsf{f})[w]|^{(0)}_{Q_T} \leq C_T(\|u_0\|_{l,Q_T} + |v_0|^{(0)}_{\Omega} + \|w\|_{l,S_T}),$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора $\mathsf{f} \in \mathsf{F}$ *и управления $w \in L_l(S_T)$.*

Помимо прямой задачи (1.1) ниже при получении регуляризованного ПМП существенную роль будет играть и сопряженная с ней задача

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i}) + a(x,t)\eta + \chi(x,t) = 0, \tag{2.1}$$

$$\eta(x,T) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)\eta = \omega(x,t), \quad (x,t) \in S_T,$$

с $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$, решение которой обозначим через $\eta[\chi,\psi,\omega]$.

Так как сопряженная краевая задача (2.1) стандартной заменой времени приводится к более привычному виду начально-краевой задачи (1.1) (с начальным условием при $t = 0$), то можно считать, что следствием первого утверждения леммы 2 является

Лемма 4. *Пусть выполняются условия* в), г), д), е). *Тогда имеет место однозначная разрешимость в $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любых функций $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$ при любом $T > 0$ сопряженной* (*к* (1.1)) *задачи* (2.1). *Для ее решений так же, как в случае прямой задачи, справедлива оценка*

$$|\eta[\chi,\psi,\omega]|_{Q_T} + \|\eta[\chi,\psi,\omega]\|_{2,S_T} \leq C_T^1(\|\chi\|_{2,Q_T} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \|\omega\|_{2,S_T}), \tag{2.2}$$

в которой постоянная C_T^1 не зависит от набора исходных данных f *и тройки $(\chi,\psi,\omega) \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$.*

2.2. Задача оптимального управления как задача математического программирования

На основании условий а), б), в), г), д), е), оценок (1.2) и оценок лемм 2, 3 можно утверждать, что

$$|g_0^\delta(w^1)-g_0^\delta(w)|\le C_1\|w^1-w\|_{2,S_T},\ \ \|g_1^\delta(w^1)-g_1^\delta(w)\|_{2,\Omega}\le C_2\|w^1-w\|_{2,S_T}\ \ \forall\, w^1,\, w\in\mathcal{D},\tag{2.3}$$

$$|g_0^\delta(w)-g_0^0(w)|\le C_1\delta,\quad \|g_1^\delta(w)-g_1^0(w)\|_{2,\Omega}\le C_2\delta\ \ \forall\, w\in\mathcal{D},\quad \delta\in[0,\delta_0],\tag{2.4}$$

где постоянные C_1, $C_2>0$ не зависят от $\delta\in[0,\delta_0]$, w^1, $w\in\mathcal{D}$.

Кроме того, справедлива

Лемма 5. *При каждом $\delta\in[0,\delta_0]$ оператор $z^\delta[\cdot](\cdot,T)\colon\mathcal{D}\to L_2(\Omega)$ переводит слабо сходящуюся в $L_l(S_T)$ ($l>n+1$, см. лемму 3) к элементу $w^0\in\mathcal{D}$ последовательность управлений $w^i\in\mathcal{D}$, $i=1,2,\dots$, в сильно сходящуюся в $L_2(\Omega)$ к элементу $z^\delta[w^0](\cdot,T)$ последовательность элементов $z^\delta[w^i](\cdot,T)$, $i=1,2,\dots$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность управлений $w^i\in\mathcal{D}$, $i=1,2,\dots$, слабо в $L_l(S_T)$, $l>n+1$, сходится к элементу $w^0\in\mathcal{D}$. При этом, очевидно, та же последовательность сходится слабо к $w^0\in\mathcal{D}$ и в $L_2(S_T)$. Запишем соответствующее интегральное тождество [15, гл. III] для $z^\delta[w^i](x,t)$, $(x,t)\in Q_T$:

$$-\int\limits_{Q_T} z^\delta[w^i](x,t)\eta_t(x,t)dxdt+\int\limits_{Q_T}[(a^\delta_{i,j}(x,t)z^\delta_{x_j}[w^i](x,t)\eta_{x_i}(x,t)+a^\delta(x,t)z^\delta[w^i](x,t)\eta(x,t)]dxdt$$

$$+\int\limits_{Q_T} u_0^\delta(x,t)\eta(x,t)dxdt+\int\limits_{S_T}\sigma^\delta(s,t)z^\delta[w^i](s,t)\eta(s,t)dsdt-\int\limits_{S_T} w^i(s,t)\eta(s,t)dsdt$$

$$=\int\limits_{\Omega} v_0^\delta(x)\eta(x,0)dx\ \ \forall\,\eta\in W_2^{1,1}(Q_T),\quad \eta(x,T)=0.\tag{2.5}$$

Обозначим через $z^\delta_{0,0}[w]$ обобщенное решение начально-краевой задачи

$$z_t-\frac{\partial}{\partial x_i}(a^\delta_{i,j}(x,t)z_{x_j})+a^\delta(x,t)z=0,\ z(x,0)=0,\ x\in\Omega,\quad \frac{\partial z}{\partial\mathcal{N}}+\sigma^\delta(x,t)z=w(x,t),\ (x,t)\in S_T.$$

Тогда можем записать равенство $z^\delta[w]=z^\delta[0]+z^\delta_{0,0}[w]\ \forall\, w\in\mathcal{D}$. Линейные операторы $z^\delta_{0,0}[\cdot](\cdot,\cdot)\colon L_l(S_T)\to C(\overline{Q}_T)$, $z^\delta_{0,0}[\cdot](\cdot,T)\colon L_l(S_T)\to C(\overline{S}_T)$, $z^\delta_{0,0}[\cdot](\cdot,T)\colon L_l(S_T)\to C(\overline{\Omega})$ являются в силу леммы 3 ограниченными и, стало быть, переводят слабую сходимость последовательности $w^i\in\mathcal{D}$, $i=1,2,\dots$, в слабую сходимость соответственно в $C(\overline{Q}_T)$, $C(\overline{S}_T)$ и $C(\overline{\Omega})$ последовательностей $z^\delta_{0,0}[w^i](x,t)$, $(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $z^\delta_{0,0}[w^i](s,t)$, $(s,t)\in C(\overline{S}_T)$, $z^\delta_{0,0}[w^i](x,T)$, $x\in C(\overline{\Omega})$, $i=1,2,\dots$, к элементам $z^\delta_{0,0}[w^0](x,t)$, $(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $z^\delta_{0,0}[w^0](s,t)$, $(s,t)\in C(\overline{S}_T)$, $z^\delta_{0,0}[w^0](x,T)$, $x\in C(\overline{\Omega})$. Последние три слабые сходимости согласно критерию слабой сходимости в пространстве непрерывных функций [19, гл. IV, п. 6.4, следствие] являются одновременно поточечными сходимостями равномерно ограниченных функций соответственно в $C(\overline{Q}_T)$, $C(\overline{S}_T)$ и $C(\overline{\Omega})$. Тогда, учитывая, что $z^\delta[0]\in V_2^{1,0}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$, можно утверждать следующее.

1. Благодаря равномерной ограниченности непрерывных в $\overline{Q}_T$ функций $\{z^\delta[w]=z^\delta[0]+z^\delta_{0,0}[w]\colon w\in\mathcal{D}\}$

$$\|z^\delta[w^i]-z^\delta[w^0]\|_{2,Q_T}\to 0,\quad \|z^\delta[w^i]-z^\delta[w^0]\|_{2,S_T}\to 0,\quad i\to\infty.\tag{2.6}$$

2. Вследствие равномерной по $i = 1, 2, \ldots$ ограниченности в силу леммы 2 норм $\|z^\delta_{x_j}[w^i]\|_{2,Q_T}$, $j = 1, \ldots, n$, и сходимости (2.6) на основании классического свойства обобщенно дифференцируемых функций, связанного с сохранением обобщенными производными слабого предельного перехода (см., например, [20, п. 109, теорема 2]),

$$z^\delta_{x_j}[w^i] \to z^\delta_{x_j}[w^0] \ \text{ слабо в } \ L_2(Q_T), \quad i \to \infty, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

3. Справедливо предельное соотношение

$$\|z^\delta[w^i](\cdot, T) - z^\delta[w^0](\cdot, T)\|_{2,\Omega} \to 0, \quad i \to \infty. \tag{2.8}$$

Предельные соотношения (2.6), (2.7) дают возможность осуществить предельный переход при $i \to \infty$ в тождестве (2.5), показывающий, что полученная в результате слабого предельного перехода функция $z^\delta[w^0] = z^\delta[0] + z^\delta_{0,0}[w^0]$ действительно является соответствующим управлению w^0 решением начально-краевой задачи (1.1) в случае набора исходных данных $\mathsf{f}^\delta \in \mathsf{F}$. Последний факт в совокупности с предельным соотношением (2.8) говорят о том, что утверждение доказываемой леммы справедливо. □

З а м е ч а н и е 2. Можно заметить, что благодаря лемме 5 задача (OC^0_p) в случае выпуклости замкнутого ограниченного множества $W \subset \mathbb{R}^1$ является разрешимой.

Далее непрерывный оператор $g^\delta_1 \colon \mathcal{D} \to L_2(\Omega)$ в силу условий на исходные данные задачи (OC^0_p) и регулярности ограниченного решения (см. лемму 3) начально-краевой задачи (1.1) при $\mathsf{f} = \mathsf{f}^\delta \in \mathsf{F}$ внутри цилиндра Q_T [15, гл. III, теорема 10.1] имеет компактную[5] область значений $g^\delta_1(\mathcal{D})$. Последнее связано с тем, что согласно теореме 10.1 из [15, гл. III] имеет место следующее свойство “равномерной” гельдеровости решений $z^\delta[w]$, $w \in \mathcal{D}$, при $\delta \in [0, \delta_0]$: существует число $\alpha > 0$ такое, что $z^\delta[w] \in H^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ $\forall\, w \in \mathcal{D}$ и норма $|z^\delta[w]|^{(\alpha)}_{Q'}$ для любой подобласти $Q' \subset Q_T$, отстоящей от нижнего основания $\{(x, t) \colon x \in \Omega,\, t = 0\}$ и боковой поверхности S_T цилиндра Q_T на положительное расстояние ρ, равномерно по $w \in \mathcal{D}$ ограничена некоторой постоянной, зависящей лишь от этого расстояния ρ. Последнее свойство можно переписать как свойство компактности в $C(Q')$.

Лемма 6. *Множество решений прямой задачи $\{z^\delta[w] \colon w \in \mathcal{D}\} \subset V^{1,0}_2(Q_T)$ является множеством равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций в $C(Q')$ для любой подобласти $Q' \subset Q_T$, отстоящей от нижнего основания $\{(x, t) \colon x \in \Omega,\, t = 0\}$ и боковой поверхности S_T цилиндра Q_T на положительное расстояние ρ. Как следствие, это множество равномерно ограниченных и непрерывных в Q_T функций компактно в $L_2(Q_T)$. Одновременно множество $\{z^\delta[w](\cdot, T) \colon w \in \mathcal{D}\} \subset L_2(\Omega)$ — компакт в $L_2(\Omega)$.*

З а м е ч а н и е 3. Можно заметить, что компактность области значений $g^\delta_1(\mathcal{D})$ оператора $g^\delta_1 \colon \mathcal{D} \to L_2(\Omega)$ в случае выпуклости замкнутого ограниченного множества $W \subset \mathbb{R}^1$ есть непосредственное следствие леммы 5. При этом нет необходимости для доказательства этого факта применять теорему 10.1 из [15, гл. III].

Таким образом, можно утверждать, что исходная параметрическая задача оптимального управления (OC^δ_p) может быть формально записана как задача нелинейного программирования в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с операторным ограничением-равенством

$$(P^\delta_p) \qquad\qquad g^\delta_0(w) \to \inf, \quad g^\delta_1(w) = p, \quad w \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H},$$

где $p \in L_2(\Omega)$ — параметр, $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ — замкнутое ограниченное множество. При этом выполняются оценки (2.3), (2.4), а оператор $g^\delta_1 \colon \mathcal{D} \to L_2(\Omega)$ является непрерывным и имеет компактную область значений $g^\delta_1(\mathcal{D})$ (см. лемму 6). Это дает нам основание применить к задаче (P^δ_p), а как следствие, и к исходной задаче (OC^δ_p), все результаты работы [11].

[5] Здесь компактность множества понимается в смысле [21, п. 19.3]. Часто в подобной ситуации используется термин предкомпактность.

2.3. Субдифференциалы полунепрерывных снизу функций, плотность субдифференцируемости, модифицированные функции Лагранжа как следствия субдифференцируемости функции значений, модифицированная двойственная задача, обобщенный вектор Куна — Таккера

Напомним, прежде всего, нужные сведения по субдифференцируемости в смысле нелинейного (негладкого) анализа, связанные с субдифференциалами полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве (см. лемму 1). Необходимость их применения объясняется, во-первых, неестественностью использования понятия субдифференцируемости в смысле выпуклого анализа применительно к невыпуклым функциям, и, во-вторых, наличием соответствующих результатов о плотности субдифференцируемости полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве в смысле нелинейного анализа [12–14]. Одновременно эти понятия субдифференцируемости приведут нас естественным образом к конструкциям так называемых модифицированных функций Лагранжа.

2.3.1. Субдифференциалы полунепрерывных снизу функций. Далее нам будут нужны два понятия субдифференцируемости полунепрерывных снизу функций — понятия проксимального субградиента и субдифференциала Фреше.

Введем прежде всего понятие проксимального субградиента полунепрерывной снизу функции на основе понятия проксимальной нормали [12, гл. 4, гл. 5; 13, гл. 1, разд. 1, 2].

Определение 2. (а) Пусть H — гильбертово пространство, $S \subset H$ — замкнутое множество, $\bar{s} \in S$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальной нормалью к множеству S в точке $\bar{s} \in S$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что $\langle \zeta, s - \bar{s} \rangle \le M\|s - \bar{s}\|^2 \ \forall\, s \in S$. Множество всех таких векторов ζ, представляющее собой конус, обозначим через $\hat{N}_S(\bar{s})$ и назовем проксимальным нормальным конусом.

(б) Пусть $f\colon H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in dom\, f$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$, если $(\zeta, -1) \in \hat{N}_{epi\, f}(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Множество всех таких векторов ζ обозначим через $\partial^P f(\bar{x})$ и назовем проксимальным субградиентом f в точке $\bar{x}$.

Лемма 7 [12, утверждение 4A.3; 13, гл. 1, разд. 2]. *Пусть $f\colon H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in dom\, f$. Вектор $\zeta \in H$ является проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$ тогда и только тогда, когда существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ такие, что*

$$f(\bar{x}) - \langle \zeta, \bar{x} \rangle \le f(x) - \langle \zeta, x \rangle + R\|x - \bar{x}\|^2 \quad \forall\, x \in S_\delta(\bar{x}) \equiv \{x' \in H\colon \|x' - \bar{x}\| < \delta\}.$$

Определим далее понятие нормали Фреше к замкнутому множеству в банаховом пространстве, а также соответствующее понятие субдифференциала полунепрерывной снизу функции [14, разд. 1.1.1, 1.3.2].

Определение 3. Пусть Ω — непустое множество банахова пространства X. Пусть $x \in cl\, \Omega$. Тогда непустое множество

$$\hat{N}(x; \Omega) \equiv \Big\{ x^* \in X^*\colon \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \le 0 \Big\}$$

называется нормальным конусом Фреше к Ω в x. При $x \notin cl\, \Omega$ полагается $\hat{N}(x; \Omega) = \varnothing$.

Определение 4. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция, определенная на банаховом пространстве X, $\bar{x} \in dom\, f$. Множество

$$\hat{\partial} f(\bar{x}) \equiv \{x^* \in X^*\colon (x^*, -1) \in \hat{N}((\bar{x}, f(\bar{x})); epi\, f)\}$$

называется субдифференциалом Фреше функции f в точке $\bar{x}$. При этом полагается $\hat{\partial} f(\bar{x}) = \varnothing$ в случае $x \notin \mathrm{dom}\, f$.

Лемма 8 [14, утверждение 1.84]. *Пусть* $f\colon X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ *— полунепрерывная снизу функция, определенная на банаховом пространстве* X, $x \in dom\, f$, $\gamma > 0$. *Тогда* $x^* \in \hat{\partial} f(x)$ *в том и только в том случае, если для любого* $\gamma > 0$ *существует окрестность* X_γ *точки* x *такая, что*

$$f(x) - \langle x^*, x\rangle \le f(x') - \langle x^*, x'\rangle + \gamma\|x' - x\| \quad \forall\, x' \in X_\gamma.$$

2.3.2. Плотность субдифференцируемости. Важнейшее характеристическое свойство полунепрерывных снизу функций $f\colon X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ заключается в том, что как множество $\partial^P f(x)$, так и множество $\hat{\partial} f(x)$ в случае гильбертова пространства X не пусто для всех точек плотного в $\mathrm{dom} f$ множества [13, теорема 3.1; 14, следствие 2.29].

2.3.3. Модифицированные функции Лагранжа как следствия субдифференцируемости функции значений. Следуя [11], можно утверждать, что для задачи (P_p^0) с полунепрерывной снизу в силу леммы 1 функцией значений $\beta\colon L_2(\Omega) \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ являются естественными две конструкции модифицированной функции Лагранжа в зависимости от субдифференциальных свойств β в фиксированной индивидуальной точке p.

Первая модифицированная функция Лагранжа. Если точка $p \in \mathrm{dom}\,\beta$ такова, что $\partial^P\beta(p) \neq \varnothing$ и $\zeta \in \partial^P\beta(p)$, то, как следствие, для задачи (P_p^0) естественна (см. [11]) конструкция модифицированной функции Лагранжа вида

$$L^{0,2}_{p,c}(w,\zeta) \equiv g_0^0(w) - \langle \zeta, g_1^0(w) - p\rangle + c\|g_1^0(w) - p\|^2, \quad w \in \mathcal{D},$$

с некоторым достаточно большим коэффициентом $c > 0$ (этому коэффициенту можно придать смысл коэффициента штрафа), зависящим, вообще говоря, от $\zeta \in \partial^P\beta(p)$. Это вызвано тем, что в случае $\zeta \in \partial^P\beta(p)$ в задаче минимизации этой модифицированной функции Лагранжа

$$g_0^0(w) - \langle \zeta, g_1^0(w) - p\rangle + c\|g_1^0(w) - p\|^2 \to \inf, \quad w \in \mathcal{D}, \tag{2.9}$$

минимизирующей является лишь любая последовательность элементов w^k, $k = 1, 2, \ldots$, со свойствами $g_0^0(w^k) \to \beta(p)$, $g_1^0(w^k) \to p$, $k \to \infty$, и никакая другая последовательность. Одновременно справедливо равенство

$$\inf_{w\in\mathcal{D}} \big(g_0^0(w) - \langle \zeta, g_1^0(w) - p\rangle + c\|g_1^0(w) - p\|^2\big) = \beta(p). \tag{2.10}$$

В этом случае если для некоторых $\zeta \in L_2(\Omega)$, $c > 0$ выполняется (2.10), то $\zeta \in \partial^P\beta(p)$.

Более того (подробности в [11]), если коэффициент $c = c(\zeta)$ берется независимым от $\zeta \in \partial^P\beta(p)$, то этот коэффициент можно считать столь большим, что в задаче минимизации модифицированной функции Лагранжа (2.9) равенство (2.10) выполняется лишь при всех $\zeta \in \partial^P\beta(p)$ и минимизирующей в ней является лишь последовательность w^k, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $g_0^0(w^k) \to \beta(p)$, $g_1^0(w^k) \to p$, $k \to \infty$, и никакая другая последовательность.

Вторая модифицированная функция Лагранжа. Если точка $p \in \mathrm{dom}\,\beta$ такова, что $\hat{\partial}\beta(p) \neq \varnothing$ и $\zeta \in \hat{\partial}\beta(p)$, то, как следствие, для задачи (P_p^0) естественна (см. [11]) конструкция модифицированной функции Лагранжа вида

$$L^{0,1}_{p,c}(w,\zeta) \equiv g_0^0(w) - \langle \zeta, g_1^0(w) - p\rangle + c\|g_1^0(w) - p\|, \quad w \in \mathcal{D},$$

с некоторым достаточно большим коэффициентом $c > 0$, зависящим, вообще говоря, от $\zeta \in \hat{\partial}\beta(p)$. В этом случае, когда $\zeta \in \hat{\partial}\beta(p)$, так же как и в предыдущем, в задаче минимизации модифицированной функции Лагранжа

$$g_0^0(w) - \langle \zeta, g_1^0(w) - p\rangle + c\|g_1^0(w) - p\| \to \inf, \quad w \in \mathcal{D}, \tag{2.11}$$

минимизирующей является лишь последовательность w^k, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $g_0^0(w^k) \to \beta(p)$, $g_1^0(w^k) \to p$, $k \to \infty$, и никакая другая последовательность. Одновременно справедливо равенство

$$\inf_{w\in\mathcal{D}} (g_0^0(w) - \langle \zeta, g_1^0(w) - p\rangle + c\|g_1^0(w) - p\|) = \beta(p).$$

Комбинированная модифицированная функция Лагранжа. Далее следуя [11], введем с учетом конструкций модифицированных функций Лагранжа задач (2.9) (2.11) (о модифицированных функциях Лагранжа см. также, например, в [22–24]), комбинированную (смешанную) модифицированную функцию Лагранжа задачи (P_p^δ)

$$L_{p,c}^\delta(w,\lambda) \equiv \frac{1}{2} L_{p,2c}^{\delta,1}(w,\lambda) + \frac{1}{2} L_{p,2c}^{\delta,2}(w,\lambda) \equiv g_0^\delta(w) + \langle \lambda, g_1^\delta(w) - p \rangle$$
$$+ c\psi(\|g_1^\delta(w) - p\|), \quad w \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in L_2(\Omega),$$

где $c \geq 0$, а "штрафная" функция $\psi\colon \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}_+^1$ определяется формулой $\psi(t) \equiv l_1 t + l_2 t^2,\ t \in \mathbb{R}_+^1$, в которой весовые множители $l_1,\ l_2 \in \{0,1\}$ — фиксированные числа.

2.3.4. Модифицированная двойственная задача. Определим, в свою очередь, и модифицированную двойственную задачу, являющуюся задачей вогнутой оптимизации

$$V_{p,c}^\delta(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in L_2(\Omega), \qquad V_{p,c}^\delta(\lambda) \equiv \inf_{w \in \mathcal{D}} L_{p,c}^\delta(w,\lambda), \quad \delta \in [0,\delta_0]. \tag{2.12}$$

Условия на исходные данные задачи (OC_p^0) таковы, что функция $V_{p,c}^\delta$ при $\delta \in [0,\delta_0]$ является определенной (конечной) при любом $c \in \mathbb{R}^1$ для любой точки $\lambda \in L_2(\Omega)$ и выполняется оценка

$$|V_{p,c}^\delta(\lambda) - V_{p,c}^0(\lambda)| \leq C\delta(1 + \|\lambda\| + |c|) \ \ \forall\, \lambda \in L_2(\Omega), \tag{2.13}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, зависящая при фиксированном $p \in L_2(\Omega)$ лишь от $\sup\limits_{z \in \mathcal{D}} \|z\|$.

2.3.5. Обобщенный вектор Куна — Таккера. Введем также соответствующее понятие обобщенного вектора Куна — Таккера задачи (P_p^0), т. е. такого вектора $\lambda \in L_2(\Omega)$, для которого при некотором $c > 0$ выполняется неравенство $\beta(p) \leq \inf\limits_{w \in \mathcal{D}} L_{p,c}^0(w,\lambda)$.

Очевидно, возможны две и только две ситуации для задачи (P_p^0) или, другими словами, для задачи (OC_p^0):

А) в задаче имеется обобщенный вектор Куна — Таккера;

Б) в задаче не существует вектора Куна — Таккера в указанном смысле.

Оказывается (подробности в [11]), как и в привычной ситуации выпуклой оптимизационной задачи, существование вектора Куна — Таккера в указанном (обобщенном) смысле эквивалентно тому, что целевая функция $V_{p,c}^0(\lambda),\ \lambda \in L_2(\Omega)$, в модифицированной двойственной задаче при некотором $c > 0$ достигает максимального значения $\beta(p)$ в некоторой точке $\lambda^0 \in L_2(\Omega)$ из замкнутого выпуклого множества всех таких точек максимума при некотором $c > 0$. Заметим при этом, что если задача (P_p^0) обладает вектором Куна — Таккера в указанном обобщенном смысле при $l_1 = 0$, то любой такой вектор, взятый с обратным знаком, есть элемент проксимального субградиента $\partial^P \beta(p)$. И, наоборот, любой элемент проксимального субградиента $\partial^P \beta(p)$ — это обобщенный вектор Куна — Таккера при $l_1 = 0$ задачи (P_p^0) при некотором $c > 0$ (подробности в [11]).

2.4. Задача минимизации модифицированной функции Лагранжа

Ниже при формулировке теоремы сходимости метода двойственной регуляризации, а также регуляризованных ПЛ и ПМП центральную роль будет играть задача минимизации модифицированного функционала Лагранжа

$$L_{p,c}^\delta(w,\lambda) \to \inf, \quad w \in \mathcal{D}, \tag{2.14}$$

при $\lambda \in L_2(\Omega)$ — обычная, но, вообще говоря, не выпуклая, а нелинейная простейшая (т. е. без ограничений типа равенства и неравенства) задача оптимального управления. Сформулируем и докажем носящее интегральный характер необходимое условие оптимальности в этой задаче в терминах функции Гамильтона — Понтрягина, а именно, условие, которому с необходимостью удовлетворяют элементы $w^0 \in \mathcal{D}$ такие, что $L^\delta_{p,c}(w^0,\lambda) \le \inf_{w\in\mathcal{D}} L^\delta_{p,c}(w,\lambda)$. В силу леммы 5 подобные управления существуют при дополнительном предположении выпуклости множества W. Это является следствием слабой компактности ограниченного замкнутого выпуклого (в силу выпуклости W) множества $\mathcal{D}$ в пространстве $L_l(S_T)$ и слабой непрерывности в $L_l(S_T)$ функционала $L^\delta_{p,c}(w,\lambda), w \in \mathcal{D}$, являющейся следствием утверждения леммы 5.

Для упрощения рассмотрим случай, когда выполняются следующие дополнительные условия на исходные данные задачи (OC^0_p) (напомним, что $\lambda = -\zeta$):

1. Множитель $l_1 = 0$, т. е. $L^{\delta,2}_{p,c}(w,\lambda) \equiv L^\delta_{p,c}(w,\lambda) \equiv g^\delta_0(w) + \langle\lambda, g^\delta_1(w) - p\rangle + c\|g^\delta_1(w) - p\|^2$.

2. $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество.

Лемма 9. *Пусть выполняются дополнительные условия* **1**, **2** *и* $w^0 \in \mathcal{D}$ *— оптимальный элемент в задаче минимизации* (2.14). *Тогда имеет место неравенство*

$$\int\limits_{S_T} (w(s,t) - w^0(s,t))\eta^\delta_{p,c}[w^0](s,t)dsdt \le 0 \quad \forall\ w \in \mathcal{D} \tag{2.15}$$

и, как следствие, поточечный ПМП

$$H(w^0(s,t), \eta^\delta_{p,c}[w^0](s,t)) = \max_{r\in W} H(r, \eta^\delta_{p,c}[w^0](s,t)) \quad \textit{при п.в. } (s,t) \in S_T,$$

где $H(w,\eta) \equiv w\eta$ *— функция Гамильтона — Понтрягина,* $\eta^\delta_{p,c}[w^0]$ *— обобщенное решение при* $v = w^0$ *сопряженной задачи*

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a^\delta_{i,j}(x,t)\eta_{x_i}) + a^\delta(x,t)\eta = 0, \tag{2.16}$$

$$\eta(x,T) = -\nabla_z G^\delta(x, z^\delta[v](x,T)) - \lambda(x)\nabla_z\phi^\delta_1(x, z^\delta[v](x,T))$$
$$-\,2c(\phi^\delta_1(x, z^\delta[v](x,T)) - p)\nabla_z\phi^\delta_1(x, z^\delta[v](x,T)), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\eta = 0, \quad (s,t) \in S_T.$$

Доказательство. Запишем условие оптимальности элемента $w^0 \in \mathcal{D}$ в задаче минимизации (2.14). Введем классическую вариацию управления w^0: $w^0_\epsilon(s,t) \equiv w^0(s,t) + \epsilon(w(s,t) - w^0(s,t)) \equiv w^0(s,t) + \epsilon\delta w^0(s,t)$, где $w(s,t)$, $(s,t) \in S_T$, — произвольное фиксированное управление из $\mathcal{D}$, $\epsilon \in [0,1]$. Вычислим первую вариацию функционала $L^\delta_{p,c}(\cdot,\lambda)$ в точке w^0:

$$\delta L^\delta_{p,c}(w^0,\lambda) \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(L^\delta_{p,c}(w^0_\epsilon,\lambda) - L^\delta_{p,c}(w^0,\lambda)).$$

Используя обозначения $z^\delta[w^0_\epsilon](x,t) - z^\delta[w^0](x,t) \equiv \Delta_\epsilon z^\delta[w^0](x,t)$, $z^\delta[w^0](x,T) + l\Delta_\epsilon z^\delta[w^0](x,T) \equiv \Delta_\epsilon(l,x)$, преобразуем выражение для приращения

$$L^\delta_{p,c}(w^0_\epsilon,\lambda) - L^\delta_{p,c}(w^0,\lambda) = \int\limits_\Omega (G^\delta(x, z^\delta[w^0_\epsilon](x,T)) - G^\delta(x, z^\delta[w^0](x,T)))dx$$

$$+ \int\limits_\Omega \lambda(x)(\phi^\delta_1(x, z^\delta[w^0_\epsilon](x,T)) - \phi^\delta_1(x, z^\delta[w^0](x,T)))dx$$

$$+\, c\int\limits_\Omega [(\phi^\delta_1(x, z^\delta[w^0_\epsilon](x,T)) - p)^2 - (\phi^\delta_1(x, z^\delta[w^0](x,T)) - p)^2]dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{1} \nabla_z G^\delta(x, \Delta_\epsilon(l,x)) \Delta_\epsilon z^\delta[w^0](x,T) dl dx$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{1} \lambda(x) \nabla_z \phi_1^\delta(x, \Delta_\epsilon(l,x)) \Delta_\epsilon z^\delta[w^0](x,T) dl dx$$

$$+ c \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{1} \nabla_z \phi_1^\delta(x, \Delta_\epsilon(l,x)) \Delta_\epsilon z^\delta[w^0](x,T) dl (\phi_1^\delta(x, z^\delta[w_\epsilon^0](x,T)) - p$$

$$+ (\phi_1^\delta(x, z^\delta[w^0](x,T)) - p)) dx. \qquad (2.17)$$

Кроме того, можем записать

$$\Delta_\epsilon z^\delta[w^0]_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}^\delta(x,t) \Delta_\epsilon z^\delta[w^0]_{x_j}) + a^\delta(x,t) \Delta_\epsilon z^\delta[w^0] = 0, \qquad (2.18)$$

$$\Delta_\epsilon z^\delta[w^0](x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \Delta_\epsilon z^\delta[w^0]}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(s,t) \Delta_\epsilon z^\delta[w^0] = w_\epsilon^0(s,t) - w^0(s,t), \quad (s,t) \in S_T.$$

Применяя в этой ситуации в силу (2.17) и (2.18) лемму 3 из (Сумин М.И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 11. С. 2001–2019), получаем

$$L_{p,c}^\delta(w_\epsilon^0, \lambda) - L_{p,c}^\delta(w^0, \lambda) = - \int\limits_{S_T} (w_\epsilon^0(s,t) - w^0(s,t)) \eta_{p,c}^\delta[w_\epsilon^0, w^0](s,t) ds dt$$

$$= - \int\limits_{S_T} \epsilon(w(s,t) - w^0(s,t)) \eta_{p,c}^\delta[w_\epsilon^0, w^0](s,t) ds dt. \qquad (2.19)$$

где $\eta_{p,c}^\delta[w_\epsilon^0, w^0](x,t)$, $(x,t) \in Q_T$, — обобщенное решение “промежуточной” сопряженной задачи

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}^\delta(x,t) \eta_{x_i}) + a^\delta(x,t)\eta = 0,$$

$$\eta(x,T) = - \int\limits_{0}^{1} \nabla_z G^\delta(x, \Delta_\epsilon(l,x)) dl - \int\limits_{0}^{1} \lambda(x) \nabla_z \phi_1^\delta(x, \Delta_\epsilon(l,x)) dl$$

$$- c(\phi_1^\delta(x, z^\delta[w_\epsilon^0](x,T)) - p + \phi_1^\delta(x, z^\delta[w^0](x,T)) - p) \int\limits_{0}^{1} \nabla_z \phi_1^\delta(x, \Delta_\epsilon(l,x)) dl, \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\eta = 0, \quad (s,t) \in S_T.$$

Согласно лемме 3 можем записать предельное соотношение $|\Delta_\epsilon z^\delta[w^0]|_{Q_T}^{(0)} \to 0$, $\epsilon \to 0$, для решений $\Delta_\epsilon z^\delta[w^0]$ промежуточной сопряженной задачи, откуда благодаря условиям на функции G^δ, ϕ_1^δ и их градиенты, а также оценке (2.2) леммы 4 получаем, в свою очередь,

$$\|\eta_{p,c}^\delta[w_\epsilon^0, w^0] - \eta_{p,c}^\delta[w^0]\|_{2,S_T} \to 0, \quad \epsilon \to 0,$$

где $\eta^\delta_{p,c}[w^0] \equiv \eta^\delta_{p,c}[w^0, w^0]$ — обобщенное решение “предельной” сопряженной задачи (2.16) при $v = w^0$. Одновременно, пользуясь полученным выше равенством (2.19), выводим и выражение для первой вариации $\delta L^\delta_{p,c}(w^0, \lambda)$:

$$\delta L^\delta_{p,c}(w^0, \lambda) = -\int\limits_{S_T} (w(s,t) - w^0(s,t))\eta^\delta_{p,c}[w^0](s,t)dsdt,$$

а, как следствие, в силу оптимальности w^0 и неравенство (2.15). □

2.5. Двойственная регуляризация для нелинейной регулярной задачи оптимального управления с поточечным фазовым ограничением-равенством

Выше было установлено, что в задаче (OC^0_p) выполняются все условия, при которых в ней могут быть применены результаты работы [11]. Это дает возможность организовать для построения МПР в задаче (OC^0_p) процедуру двойственной регуляризации в соответствии со схемой [11]. Двойственная регуляризация в нелинейном случае основана (так же, как и в выпуклом случае) на алгоритме поиска максимума в задаче максимизации при $\alpha > 0$ сильно вогнутого функционала $R^{\delta,\alpha}_{p,c}(\lambda) \equiv V^\delta_{p,c}(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2,\ \ \lambda \in L_2(\Omega)$. При этом с целью конструирования минимизирующей последовательности в исходной задаче (OC^0_p) при достаточно большом $c > 0$ рассматривается задача (подробности в [11])

$$R^{\delta,\alpha}_{p,c}(\lambda) \to \max, \quad \lambda \in \Lambda_c \equiv \{\lambda \in L_2(\Omega)\colon \|\lambda\| \le c\}. \tag{2.20}$$

Обозначим через $\lambda^{\delta,\alpha}_{p,c}$ единственную в Λ_c точку, дающую на Λ_c максимум функционалу $R^{\delta,\alpha}_{p,c}$. Регуляризованный по Тихонову [7; 8] процесс (2.20) поиска максимума в точной (т. е. взятой при $\delta = 0$) модифицированной двойственной задаче (2.12) с учетом оценки (2.13) и при выполнении условия согласования $\delta/\alpha(\delta) \to 0,\ \delta \to 0,\ \alpha(\delta) \to 0$ конструктивно порождает минимизирующую последовательность $w^k \in \mathcal{D},\ k = 1, 2, \ldots$, в задаче $(P^0_p) = (OC^0_p)$, т. е. $g^0_0(w^k) \to \beta(p),\ \ g^0_1(w^k) - p \to 0,\ \ \ k \to \infty$. При этом в случае А) величина c может быть взята равной любому фиксированному достаточно большому положительному числу. В случае же Б), который в данной статье на рассматривается, “штрафной” коэффициент c необходимо стремить к $+\infty$ согласованно со стремлением к нулю δ. Основное предположение при этом с точки зрения практической реализации алгоритма двойственной регуляризации заключается в том, что минимизация модифицированной функции Лагранжа может проводиться с любой наперед заданной точностью.

Сформулируем “теорему сходимости” (по функции и по “ограничению”) метода двойственной регуляризации применительно к задаче (OC^0_p), являющуюся “следом” соответствующей теоремы 3.1 в [11]. Обозначим с этой целью через $W^{c,\kappa,\gamma,\delta}_p[\lambda] \subset \mathcal{D},\ \kappa \ge 0$, множество всех элементов $w^\gamma \in \mathcal{D}$, удовлетворяющих неравенству $L^\delta_{p,c+\kappa}(w^\gamma, \lambda) \le L^\delta_{p,c+\kappa}(w, \lambda) + \gamma\ \forall\, w \in \mathcal{D}$, т. е. множество всех γ-оптимальных управлений в задаче минимизации модифицированной функции Лагранжа

$$L^\delta_{p,c+\kappa}(w, \lambda) \to \inf, \quad w \in \mathcal{D}. \tag{2.21}$$

Теорема 1. *Пусть задача (OC^0_p) обладает вектором Куна — Таккера в указанном выше обобщенном смысле и $l_1,\ l_2 \in \{0, 1\},\ (l_1, l_2) \ne 0,\ \delta^k,\ k = 1, 2, \ldots,$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, $\kappa > 0$. Тогда найдется достаточно большое $c > 0$ такое, что справедливы предельные соотношения*

$$g^0_0(w^k) \to \beta(p), \quad g^0_1(w^k) - p \to 0, \quad \lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}_{p,c} \to \lambda^0_{p,c}, \quad V^0_{p,c}(\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}_{p,c}) \to \beta(p), \quad k \to \infty.$$

Здесь

w^k, $k=1,2,\ldots,$ — ϵ^k-*оптимальные элементы в задаче минимизации модифицированной функции Лагранжа* (2.21) *при* $\delta=\delta^k$, $\epsilon^k\to 0,\ k\to\infty$, $\lambda=\lambda_{p,c}^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}$;

$\lambda_{p,c}^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}$, $k=1,2,\ldots,$ — *элементы, максимизирующие в* $L_2(\Omega)$ *сильно вогнутый функционал* $R_{p,c}^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}$, $\delta^k/\alpha(\delta^k)\to 0,\ k\to\infty$;

$\lambda_{p,c}^0$ — *минимальный по норме обобщенный вектор Куна — Таккера задачи* (OC_p^0).
При этом если при $l_1=0$ *множество* $\partial^P\beta(p)$ *содержит минимальный по норме элемент, то можно считать, что* $\kappa=0$ *в задаче минимизации* (2.21). *В случае разрешимости задачи минимизации* (2.21) *можно считать, что* $\epsilon^k=0,\ k=1,2,\ldots$.

Таким образом, оператор $R_p(\cdot,\cdot,\delta^k)$, *который ставит в соответствие каждому набору исходных данных* $(f^{\delta^k},g^{\delta^k})$, *удовлетворяющих оценкам* (1.2) *при* $\delta=\delta^k$, *множество*

$$R_p(f^{\delta^k},g^{\delta^k},\delta^k)\equiv W_p^{c,\kappa,\epsilon^k,\delta^k}[\lambda_{p,c}^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}]\subset\mathcal{D},$$

где $\epsilon^k\to 0,\ k\to\infty$, *и выполняется условие согласования* $\delta^k/\alpha(\delta^k)\to 0,\ k\to\infty$, *является* МПР-*образующим в задаче* (OC_p^0) (*в смысле определения* 1).

2.6. Регуляризованная теорема Куна — Таккера для нелинейной регулярной задачи оптимального управления с поточечным фазовым ограничением-равенством

Как и в [11], теорема 1 позволяет сформулировать и доказать необходимые и достаточные условия существования МПР в задаче (OC_p^0), которые можно также назвать, в силу существования для нее обобщенного вектора Куна — Таккера, регуляризованной теоремой Куна — Таккера в недифференциальной форме. Заметим, что необходимость условий формулируемой ниже теоремы вытекает из теоремы 1, а их достаточность является простым следствием условий теоремы и условий на исходные данные задачи (OC_p^0) (подробности см. в [11, теорема 4.1]).

Теорема 2. *Пусть* $l_1,\ l_2\in\{0,1\}$, $(l_1,l_2)\neq 0$ *и задача* (OC_p^0) *обладает обобщенным вектором Куна — Таккера,* δ^k, $k=1,2,\ldots,$ — *произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда найдутся достаточно большое* $c>0$ *и ограниченная последовательность* $\lambda^k\in L_2(\Omega)$, $k=1,2,\ldots,$ *такие, что для любой последовательности* w^k, $k=1,2,\ldots,$ ϵ^k-*оптимальных элементов в задаче минимизации модифицированной функции Лагранжа* (2.21) *при* $\delta=\delta^k$, $\lambda=\lambda^k$, $\kappa>0$, $\epsilon^k\to 0,\ k\to\infty$, *справедливы предельные соотношения*

$$g_0^0(w^k)\to\beta(p),\quad g_1^0(w^k)-p\to 0,\quad V_{p,c}^0(\lambda^k)\to\beta(p),\quad k\to\infty, \tag{2.22}$$

и, как следствие, предельное соотношение

$$V_{p,c+\kappa}^0(\lambda^k)\to\beta(p),\quad k\to\infty. \tag{2.23}$$

Таким образом, оператор $R_p(\cdot,\cdot,\delta^k)$, *который ставит в соответствие каждому набору исходных данных* $(f^{\delta^k},g^{\delta^k})$, *удовлетворяющих оценкам* (1.2) *при* $\delta=\delta^k$, *множество*

$$R_p(f^{\delta^k},g^{\delta^k},\delta^k)\equiv W_p^{c,\kappa,\epsilon^k,\delta^k}[\lambda^k]\subset\mathcal{D},$$

где $\epsilon^k\to 0,\ k\to\infty$, *является* МПР-*образующим в задаче* (OC_p^0) (*в смысле определения* 1).

В качестве указанной выше последовательности λ^k, $k=1,2,\ldots,$ *может быть взята последовательность* $\lambda_{p,c}^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}$, $k=1,2,\ldots,$ *из теоремы* 1, *элементы которой максимизируют на* $L_2(\Omega)$ *сильно вогнутый функционал* $R_{p,c}^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}$ *при условии согласования* $\delta^k/\alpha(\delta^k)\to 0$,

$k \to \infty$. При этом $\lambda^k \to \lambda^0_{p,c}$, $k \to \infty$, где $\lambda^0_{p,c}$ — минимальный по норме обобщенный вектор Куна — Таккера задачи (OC^0_p).

И наоборот, если при некотором достаточно большом $c > 0$ существует ограниченная последовательность $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что элементы последовательности ϵ^k-оптимальных элементов w^k, $k = 1, 2, \dots$, задачи (2.21) *при $\lambda = \lambda^k$, $\epsilon^k \to 0$, $k \to \infty$, и при $\kappa \geq 0$ удовлетворяют второму предельному соотношению* (2.22)[6]*, то выполняется и первое предельное соотношение* (2.22)*, т. е. последовательность w^k, $k = 1, 2, \dots$, является* МПР *в задаче (OC^0_p). При этом выполняется и предельное соотношение* (2.23).

В случае разрешимости задачи (2.21) *можно считать, что $\epsilon^k = 0$, $k = 1, 2, \dots$.*

2.7. Регуляризованный ПМП в нелинейной регулярной задаче оптимального управления с поточечным фазовым ограничением-равенством

МПР в задаче (OC^0_p) в соответствии с теоремой 2 конструируются из элементов w^k, $k = 1, 2, \dots$, принадлежащих множествам $W^{c,\kappa,\epsilon^k,\delta^k}_p[\lambda^k] \subset \mathcal{D}$, $\epsilon^k \to 0$, $k \to \infty$, ϵ^k-оптимальных элементов задачи минимизации (2.21) при $\lambda = \lambda^k$. При этом, в свою очередь, элементы λ^k, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют третьему предельному соотношению (2.22). В случае разрешимости задачи минимизации (2.21) множество $W^{c,\kappa,\epsilon^k,\delta^k}_p[\lambda^k]$ следует брать при $\epsilon^k = 0$. В такой ситуации МПР в задаче (OC^0_p) в соответствии с теоремой 2 конструируются из оптимальных элементов задачи минимизации (2.21) при $\lambda = \lambda^k$, когда элементы λ^k, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют третьему предельному соотношению (2.22). Введем в этом случае обозначение: $W^{c,\kappa,0,\delta}_p[\lambda] \equiv W^{c,\kappa,\delta}_p[\lambda]$.

Охарактеризуем в случае разрешимости задачи (2.21) с помощью леммы 9, вообще говоря, несколько более широкие, чем $W^{c,\kappa,\delta^k}_p[\lambda^k]$ множества допустимых управлений $w \in \mathcal{D}$ в задаче (OC^0_p), которым с необходимостью должны принадлежать элементы указанной последовательности w^k, $k = 1, 2, \dots$. Соответствующее утверждение можно трактовать как регуляризованный ПМП. В силу нелинейности (невыпуклости) задачи (OC^0_p) это утверждение носит характер лишь необходимого условия, которому должно удовлетворять МПР в этой задаче.

Пусть выполняются дополнительные условия $\mathbf{1}, \mathbf{2}$ и w^k, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность оптимальных управлений в задаче минимизации (2.21) при $\lambda = \lambda^k$, о которой идет речь в теореме 2 при $\epsilon^k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда в силу леммы 9 (см. неравенство (2.15)) каждое такое, возможно не единственное, оптимальное управление $w^k \in \mathcal{D}$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{S_T} (w(s,t) - w^k(s,t))\eta^{\delta^k}_{p,c}[w^k](s,t)dsdt \leq 0 \quad \forall\, w \in \mathcal{D}. \tag{2.24}$$

Обозначим через $W^{c,\kappa,\delta^k}_{p,max}[\lambda^k]$ множество всех управлений $w^k \in \mathcal{D}$, которые удовлетворяют неравенству (2.24) или, что в данном случае одно и то же, поточечному ПМП

$$H(w^k(s,t), \eta^{\delta^k}_{p,c}[w^k](s,t)) = \max_{r \in W} H(r, \eta^{\delta^k}_{p,c}[w^k](s,t)) \quad \text{при п.в. } (s,t) \in S_T,$$

где $\eta^{\delta^k}_{p,c}[w^k]$ — обобщенное решение при $\delta = \delta^k$, $v = w^k$ сопряженной задачи (2.16). Таким образом, можно утверждать, что следствием леммы 9 и теоремы 2 является следующее утверждение — регуляризованный ПМП в задаче (OC^0_p).

Теорема 3. *Если выполняются дополнительные условия* $\mathbf{1}, \mathbf{2}$*, то имеют место включения $W^{c,\kappa,\delta^k}_p[\lambda^k] \subseteq W^{c,\kappa,\delta^k}_{p,max}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$.*

[6] Можно заметить, что благодаря ограниченности множества $\mathcal{D}$ и условиям на исходные данные задачи (OC^0_p) предельное соотношение $g^0_1(w^k) - p \to 0$, $k \to \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется предельное соотношение $g^{\delta^k}_1(w^k) - p \to 0$, $k \to \infty$.

2.8. Классические КУО в нелинейной регулярной задаче оптимального управления как предельные варианты своих регуляризованных аналогов

Заметим, прежде всего, что если $\beta(p) < +\infty$, то при дополнительном условии выпуклости множества управляющих параметров $W \subset \mathbb{R}^1$ исходная задача (OC_p^0) является разрешимой. Это является следствием слабой компактности в этом случае выпуклого ограниченного замкнутого множества $\mathcal{D}$ как множества в $L_l(S_T)$ (напомним, что $l > n+1$, см. лемму 3), так и в $L_2(S_T)$, и сформулированного в лемме 5 свойства оператора $z^0[\cdot](\cdot,T)\colon \mathcal{D} \to L_2(\Omega)$, в соответствии с которым он переводит слабо сходящуюся в $L_l(S_T)$ к элементу $w^0 \in \mathcal{D}$ последовательность управлений $w^i \in \mathcal{D}$, $i = 1,2,\dots$, в сильно сходящуюся в $L_2(\Omega)$ к элементу $z^0[w^0](\cdot,T)$ последовательность элементов $z^0[w^i](\cdot,T)$, $i = 1,2,\dots$. С учетом этих свойств любое МПР в задаче (OC_p^0) можно "замкнуть" и получить равенства $\beta(p) = \beta_0(p) = g_0^0(w_p^0)$, $g_1^0(w_p^0) = p$ для любой его слабой предельной точки w_p^0, говорящие о том, что эта точка — решение задачи (OC_p^0).

Более того, имея ввиду характеристическое свойство регуляризованных КУО (см. разд. 3 в [6]) в выпуклых задачах условной оптимизации, в соответствии с которым сами КУО являются их предельными вариантами, можно утверждать, что это свойство имеет место и в случае рассматриваемой нелинейной задачи (OC_p^0) при дополнительном условии выпуклости множества W. Действительно, пусть выполняется дополнительное условие **2** (см. подразд. 2.4) и w^k, $k = 1,2,\dots,$ — последовательность оптимальных управлений в задаче минимизации (2.21) при $\lambda = \lambda^k$, о которой идет речь в теореме 2 при $\epsilon^k = 0$, $k = 1,2,\dots$. Тогда, во-первых, считая без ограничения общности, что эта последовательность слабо сходится при $k \to \infty$ к решению w_p^0 задачи (OC_p^0) и учитывая предельное соотношение $\lambda^k \to \lambda_{p,c}^0$, $k \to \infty$ ($\lambda_{p,c}^0$ — минимальный по норме обобщенный вектор Куна — Таккера задачи (OC_p^0)), оценки (2.3), (2.4), а также уже использованное в предыдущем абзаце свойство "полной непрерывности" оператора $z^0[\cdot](\cdot,T)\colon \mathcal{D} \to L_2(\Omega)$ леммы 5, можно перейти к пределу при $k \to \infty$ в соотношениях (2.22), (2.23) теоремы 2. И, во-вторых, если выполняется и дополнительное условие **1**, то те же самые аргументы при условии непрерывности градиентов $\nabla_z G^\delta(\cdot,\cdot)$, $\nabla_z \varphi_1^\delta(\cdot,\cdot)$ по δ в точке $\delta = 0$ (помимо оценок (1.2)) позволяют совершить предельный переход в неравенстве (2.24) и в сопряженной задаче (2.16), взятой при $\delta = \delta^k$, $v = w^k$. Тем самым мы получаем и "предельный вариант" теоремы 3. Как результат, мы можем сформулировать следующие классические КУО для предельного управления w_p^0 — решения исходной задачи (OC_p^0).

Теорема 4. *Если выполняется условие* **2**, *то для любой слабой предельной точки* w_p^0 *последовательности оптимальных управлений* w^k, $k = 1,2,\dots$, *в задаче минимизации* (2.21) *при* $\lambda = \lambda^k$, *о которой идет речь в теореме* 2 *при* $\epsilon^k = 0$, *выполняются соотношения*

$$L_{p,c+\kappa}^0(w_p^0, \lambda_{p,c}^0) = \min\nolimits_{w\in\mathcal{D}} L_{p,c+\kappa}^0(w, \lambda_{p,c}^0),$$
$$g_0^0(w_p^0) = \beta(p), \quad g_1^0(w_p^0) = p, \quad V_{p,c}^0(\lambda_{p,c}^0) = V_{p,c+\kappa}^0(\lambda_{p,c}^0) = \beta(p).$$

Если же помимо условия **2** *выполняется и дополнительное условие* **1**, *а также*

$$|\nabla_z G^\delta(x,z) - \nabla_z G^0(x,z)| \le C_M^2\delta, \quad |\nabla_z \varphi_1^\delta(x,z) - \nabla_z \varphi_1^0(x,z)| \le C_M^2\delta \ \ \forall\ (x,z) \in \Omega \times S_M^1,$$

где $C_M^2 > 0$ *не зависит от* $\delta \in (0,\delta_0]$ *(см. оценки* (1.2)), *то для той же слабой предельной точки* w_p^0 *выполняется соотношение максимума*

$$H(w_p^0(s,t), \eta_{p,c}^0[w_p^0](s,t)) = \max_{r\in W} H(r, \eta_{p,c}^0[w_p^0](s,t)) \quad \text{при п.в. } (s,t) \in S_T,$$

где $\eta_{p,c}^0[w_p^0]$ *— обобщенное решение сопряженной задачи*

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}^0(x,t)\eta_{x_i}) + a^0(x,t)\eta = 0,$$

$$\eta(x,T) = -\nabla_z G^0(x, z^0[w_p^0](x,T)) - \lambda_{p,c}^0(x)\nabla_z \phi_1^0(x, z^0[w_p^0](x,T)), \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^0(s,t)\eta = 0, \quad (s,t) \in S_T.$$

Указанная слабая предельная точка w_p^0 является одновременно решением задачи (OC_p^0).

Заключение

В статье получены так называемые регуляризованные ПЛ и ПМП в нелинейной (невыпуклой) регулярной задаче граничного оптимального управлении для параболического уравнения с операторным ограничением-равенством. Они сформулированы как теоремы существования МПР, выражаются в терминах модифицированных функций Лагранжа и обычных функций Гамильтона — Понтрягина и представляют собою регуляризирующие алгоритмы для решения рассматриваемой задачи с одновременным конструктивным представлением конкретных МПР. Регуляризованные ПЛ и ПМП: 1) преодолевают возможную некорректность своих классических аналогов; 2) являются теоретической базой для конструирования устойчивых численных алгоритмов для практического решения рассматриваемой задачи оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
2. **Гамкрелидзе Р.В.** Математические работы Л.С. Понтрягина. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Тр. Междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 31 августа — 6 сентября 1998 г.). Том I. Оптимальное управление. 1998. Т. 60. С. 5–23.
3. **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352.
4. **Tröltzsch F.** Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. Providence, RI: AMS, 2010. 400 p. (Graduate Studies in Math.; vol. 112). doi: 10.1090/gsm/112 .
5. **Сумин М.И.** Регуляризованная параметрическая теорема Куна — Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1594–1615.
6. **Сумин М.И.** Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 279–296. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-279-296 .
7. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2-х кн. Москва: МЦНМО, 2011. 1056 с.
8. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
9. **Сумин М.И.** Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 12. С. 2083–2102.
10. **Сумин М.И.** Регуляризация принципа максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального граничного управления для параболического уравнения с операторным ограничением-равенством // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 221–237. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-221-237 .
11. **Сумин М.И.** Устойчивая секвенциальная теорема Куна — Таккера в итерационной форме или регуляризованный алгоритм Удзавы в регулярной задаче нелинейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 6. С. 947–977. doi: 10.7868/S0044466915060137 .
12. **Loewen P.D.** Optimal control via nonsmooth analysis. CRM Proc. Lecture Notes. Vol. 2. Providence, RI: AMS, 1993. 153 p. doi: 10.1090/crmp/002 .
13. **Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.** Nonsmooth analysis and control theory. NY: Springer-Verlag, 1998. 278 p. (Graduate Texts in Math.; vol. 178). doi: 10.1007/b97650 .
14. **Mordukhovich B.S.** Variational analysis and generalized differentiation, I: Basic Theory. Berlin: Springer, 2006. 579 p. doi: 10.1007/3-540-31247-1 .
15. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

16. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
17. **Плотников В.И.** Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165, № 1. С. 33–35.
18. **Casas E., Raymond J.-P., Zidani H.** Pontryagin's principle for local solutions of control problems with mixed control-state constraints // SIAM J. Control Optim. 2000. Vol. 39, no. 4. P. 1182–1203. doi: 10.1137/S0363012998345627 .
19. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.
20. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 5. М.: ГИФМЛ, 1959. 656 с.
21. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. Москва: Наука, 1980. 496 с.
22. **Мину М.** Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 488 с.
23. **Бертсекас Д.** Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 400 с.
24. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. М.: Наука, 1989. 399 с.

Поступила 30.05.2022
После доработки 18.07.2022
Принята к публикации 22.07.2022

Сумин Михаил Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина
г. Тамбов;
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
г. Нижний Новгород
e-mail: m.sumin@mail.ru

REFERENCES

1. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal Control.* NY: Plenum Press, 1987, 309 p. doi: 10.1007/978-1-4615-7551-1 . Original Russian text published in Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie.* Moscow: Nauka Publ., 1979, 432 p.
2. Gamkrelidze R.V. The mathematical work of L.S. Pontryagin. *J. Math. Sci.*, 2000, vol. 100, no. 5, pp. 2447–2457. doi: 10.1007/BF02673835 .
3. Fursikov A.V. *Optimal control of distributed systems: Theory and applications.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 187. Providence, RI: AMS, 2000, 305 p. ISBN: 978-0-8218-1382-9 . Original Russian text published in Fursikov A.V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya*, Novosibirsk: Nauchnaya Kniga Publ., 1999, 352 p.
4. Tröltzsch F. *Optimal control of partial differential equations: Theory, methods and applications.* Ser. Graduate Studies in Math., vol. 112. Providence, RI: AMS, 2010, 400 p. doi: 10.1090/gsm/112 .
5. Sumin M.I. Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1489–1509. doi: 10.1134/S0965542511090156 .
6. Sumin M.I. Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 279–296 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-279-296 .
7. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii*: v 2-kh. kn. [Optimization methods: In two vols.] Moscow: MCCME Publ., 2011, 1056 p.
8. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Solutions of ill-posed problems.* Washington: Winston; NY: Halsted Press, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow: Nauka Publ., 1986, 288 p.
9. Sumin M.I. Parametric dual regularization for an optimal control problem with pointwise state constraints. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009, vol. 49, no. 12, pp. 1987–2005. doi: 10.1134/S096554250912001X .

10. Sumin M.I. Regularization of the Pontryagin maximum principle in a convex optimal boundary control problem for a parabolic equation with an operator equality constraint. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 221–237 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-221-237 .
11. Sumin M.I. Stable sequential Kuhn-Tucker theorem in iterative form or a regularized Uzawa algorithm in a regular nonlinear programming problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 6, pp. 935–961. doi: 10.1134/S0965542515060111 .
12. Loewen P.D. *Optimal control via nonsmooth analysis*. Ser. CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 2. Providence, RI: AMS, 1993, 153 p. doi: 10.1090/crmp/002 .
13. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. *Nonsmooth analysis and control theory*. Ser. Graduate Texts in Math., vol. 178. NY: Springer-Verlag, 1998, 278 p. doi: 10.1007/b97650 .
14. Mordukhovich B.S. *Variational analysis and generalized differentiation, I: Basic Theory*. Berlin: Springer, 2006, 579 p. doi: 10.1007/3-540-31247-1 .
15. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Providence, RI: AMS, 1968, 648 p. ISBN: 978-0-8218-1573-1 . Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa*, Moscow: Nauka Publ., 1967, 736 p.
16. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*. NY: Acad. Press, 1972, 531 p. ISBN: 9781483259192 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka Publ., 1977, 624 p.
17. Plotnikov V.I. Uniqueness and existence theorems and a priori properties of generalized solutions. *Sov. Math., Dokl.*, 1965, vol. 6, pp. 1405–1407.
18. Casas E., Raymond J.P., Zidani H. Pontryagin's principle for local solutions of control problems with mixed control-state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 2000, vol. 39, no. 4, pp. 1182–1203. doi: 10.1137/S0363012998345627 .
19. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators,* I*: General theory*. NY: Interscience Publ., 1958, 858 p. ISBN: 0470226056 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory, I: Obshchaya teoriya*, Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 896 p.
20. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki. Tom 5* [Course of higher mathematics. Vol. 5]. Moscow: GIFML Publ., 1959, 636 p.
21. Trenogin V.A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 496 p.
22. Minoux M. *Mathematical programming: Theory and algorithms*. NY: Wiley, 1986, 489 p. ISBN: 0471901709 . Translated to Russian under the title *Matematicheskoe programmirovanie: Teoriya i algoritmy*, Moscow: Nauka Publ., 1990, 488 p.
23. Bertsekas D.P. *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. NY: Academic, 1982, 395 p. doi: 10.1016/C2013-0-10366-2 . Translated to Russian under the title *Uslovnaya optimizatsiya i metody mnozhitelei Lagranzha*, Moscow: Radio i Svyaz' Publ., 1987, 400 p.
24. Gol'shtein E.G., Tret'yakov N.V. *Modified Lagrangians and monotone maps in optimization*. NY: Wiley, 1996, 438 p. ISBN: 0471548219 . Original Russian text published in Gol'shtein E.G., Tret'yakov N.V. *Modifitsirovannye funktsii Lagranzha. Teoriya i metody optimizatsii*, Moscow: Nauka Publ., 1989, 399 p.

Received May 30, 2022
Revised July 18, 2022
Accepted July 22, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00199_a).

Mikhail Iosifovich Sumin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tambov State University, Tambov, 392000 Russia; Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, 603950 Russia,
e-mail: m.sumin@mail.ru .

Cite this article as: M. I. Sumin. Perturbation method, subdifferentials of nonsmooth analysis, and regularization of the Lagrange multiplier rule in nonlinear optimal control. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 202–221.