ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.95

ВОЛЬТЕРРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ. К ПРОБЛЕМЕ СИНГУЛЯРНОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ[1]

В. И. Сумин

Ранее автором была предложена довольно общая форма описания управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ) с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ) вида

$$z(t) = f\,(t, A[z](t), v(t))\,, \quad t \equiv \{t^1, \ldots, t^N\} \in \Pi \subset \mathbb{R}^N, \quad z \in L_p^m \equiv (L_p\,(\Pi))^m\,,$$

где $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$; $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ – управление; $A : L_p^m \to L_q^l$ — линейный *оператор, вольтерров на некоторой системе* $\mathbf{T}$ *подмножеств* Π в том смысле, что для любого $H \in \mathbf{T}$ сужение $A\,[z]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi\setminus H}$; $p, q, k \in [1, +\infty]$. Это определение вольтерровости — многомерное обобщение известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра. К подобным уравнениям естественным образом (обращением главной части) приводятся разнообразные НКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с разного рода запаздываниями и др.). Переход к эквивалентному ВФУ-описанию управляемых НКЗ адекватен многим проблемам распределенной оптимизации (получение условий сохранения глобальной разрешимости НКЗ при возмущении управлений; обоснование численных методов оптимального управления; вывод *необходимых условий оптимальности* (НУО); изучение “особых управлений” НУО и др.). В частности, автором была предложена опирающаяся на это описание схема получения конструктивных достаточных условий сохранения (при возмущении управления) глобальной разрешимости управляемых НКЗ. В статье демонстрируется эффективность ВФУ-описания НКЗ для теории оптимального управления на примере НКЗ для управляемого полулинейного параболического уравнения. Рассматриваются вопросы получения достаточных условий сохранения (при возмущении управления) глобальной разрешимости НКЗ и вывода НУО для сингулярных в смысле Ж.-Л. Лионса задач оптимального управления. Показывается, что некоторые задачи оптимизации, которые относили к сингулярным, можно к таковым не относить, а при выводе для них НУО привести их к классической форме и действовать по схеме варьирования управлений.

Ключевые слова: Вольтерровы функциональные уравнения, управляемые начально-краевые задачи, условия сохранения глобальной разрешимости, сингулярные системы оптимальности.

V. I. Sumin. Volterra functional equations in the theory of optimization of distributed systems. On the problem of singularity of controlled initial–boundary value problems.

Earlier the author proposed a rather general form of describing controlled *initial–boundary value problems* (IBVPs) by means of *Volterra functional equations* (VFEs)

$$z(t) = f\,(t, A[z](t), v(t))\,, \quad t \equiv \{t^1, \ldots, t^N\} \in \Pi \subset \mathbb{R}^N, \quad z \in L_p^m \equiv (L_p\,(\Pi))^m\,,$$

where $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ is a control function, and $A : L_p^m\,(\Pi) \to L_q^l\,(\Pi)$ is a linear operator that is *Volterra for some system* $\mathbf{T}$ of subsets of Π in the following sense: for any $H \in \mathbf{T}$, the restriction $A\,[z]|_H$ does not depend on the values of $z|_{\Pi\setminus H}$, $p, q, k \in [1, +\infty]$ (this definition of a Volterra operator is a direct multidimensional generalization of the well-known Tikhonov definition of a functional Volterra type operator). Various IBVPs (for nonlinear hyperbolic and parabolic equations, integro-differential equations, equations with delay, etc.) are reduced by the method of inversion of the main part to such functional equations. The transition to an equivalent VFE-description of IBVPs is adequate to many problems of distributed optimization (obtaining conditions for maintaining the global solvability of equations under perturbed controls, substantiation of numerical methods of optimal control, derivation of necessary optimality conditions, study of singular controls for necessary optimality conditions, etc.). In particular, the author proposed (using such a description) a scheme for obtaining sufficient stability conditions (under perturbations of control) for the existence of global solutions for IBVPs. In the present paper, the effectiveness (for the theory of optimal control) of such a description of IBVPs is demonstrated by an example of a controlled semilinear parabolic equation. The problems of obtaining sufficient conditions for the preservation (under perturbation of control) of the global solvability of IBVPs and the derivation of necessary optimality conditions for singular in the sense of J.-L. Lions optimal control

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00199_a).

problems are considered. It is shown that some optimization problems that were classified as singular can in fact be classified as nonsingular, since the necessary optimality conditions for them may be derived by bringing the problems to the classical form and varying the controls.

Keywords: Volterra functional equations, controlled initial–boundary value problems, conditions for maintaining global solvability, singular optimality systems.

MSC: 93C20, 93C23, 35B30, 47B38

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-188-201

Ранее автором была предложена (см. обзоры в [8; 16]) достаточно общая форма описания управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ) с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ) вида

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv \left(L_p(\Pi)\right)^m, \tag{0.1}$$

где $\Pi \subset \mathbb{R}^N$ и $f(\cdot,\cdot,\cdot) : \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ заданы; $v(\cdot) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ — управление; $A : L_p^m \to L_q^l$ — линейный оператор, вольтерров на некоторой системе $\mathbf{T}$ подмножеств Π в том смысле, что для любого $H \in \mathbf{T}$ сужение $A\left[z\right]\big|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi\setminus H}$ (это многомерное обобщение известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра [9]); $p, q, k \in [1, +\infty]$. К ВФУ (0.1) обращением главной части приводятся самые разнообразные НКЗ для эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с запаздываниями и др.; см. обзоры в [8; 16]). Переход от НКЗ к эквивалентному ВФУ (0.1) адекватен многим проблемам распределенной оптимизации (получение *условий сохранения глобальной разрешимости* (УСГР) НКЗ при возмущении управлений; обоснование численных методов оптимального управления; вывод *необходимых условий оптимальности* (НУО); изучение “особых управлений” НУО и др., см. обзоры в [8; 16]). Мы проиллюстрируем эффективность такого перехода примерами получения условий единственности решения и условий сохранения глобальной разрешимости НКЗ для полулинейного параболического уравнения, а также примером вывода НУО в сингулярной в смысле Ж.-Л. Лионса [4] оптимизационной задаче, связанной с параболическим уравнением.

Как отмечено в [4, с. 10], в традиционной теории оптимального управления обычно считается выполненным следующее общее предположение:

“Для всякого управления, заданного в подходящем множестве, уравнение, описывающее управляемый процесс, имеет единственное решение в подходящем множестве”. (0.2)

Эти “подходящие множества” в каждой оптимизационной задаче свои, их можно, вообще говоря, менять и подбирать в зависимости от ситуации, от тех вопросов, которые предполагается решать. Однако, как сказано в [4, с. 12, 13], многие оптимизационные задачи, возникающие в приложениях, заставляют отказаться от предположения (0.2). Процитируем [4, с. 13]: “Мы должны иметь возможность рассматривать ситуации, в которых уравнение либо не имеет решения, либо имеет сколь угодно большое число решений, либо решения неустойчивы” (под неустойчивостью понимается, в частности, отсутствие глобального решения НКЗ, отвечающего некоторому допустимому управлению, при наличии соответствующего локального решения; см., например, [4, с. 14, 15]). Далее, рассматривая ту или иную НКЗ, будем через $\mathcal{R}$ обозначать то множество управлений, каждому из которых отвечает единственное глобальное решение данной НКЗ. Как сказано в [4, с. 9], “сингулярные распределенные системы (распределенные системы с особенностями) — это системы, уравнения состояния которых ... представляют “особенности”, а именно: неустойчивость, явление разрыва, кратные решения и явления бифуркации”. Наиболее подробно в [4] изучается сингулярная ситуация, связанная с неустойчивостью в описанном выше смысле, когда единственность решения управляемой НКЗ есть, но не всякое допустимое управление принадлежит $\mathcal{R}$; управляемая система, обладающая такой неустойчивостью, называется в [4] еще системой с разрывом.

В [4, гл. 1] “отправным модельным примером” является следующая оптимизационная задача, связанная с “неустойчивым параболическим уравнением”:

$$\mathcal{L}[x](t) \equiv x'_{t^{n+1}} - \Delta x = x^3 + v(t), \quad t = \left\{t^1, \ldots, t^n, t^{n+1}\right\} \in \Pi, \tag{0.3}$$

где $\Delta x \equiv \sum_{i=1}^{n} x''_{t^i t^i}$ — оператор Лапласа; $\Pi \equiv Q \times [0,\sigma] \subset \mathbb{R}^{n+1}$; $Q \subset \mathbb{R}^n$ — открытое ограниченное множество с границей ∂Q класса C_2. Основная модельная оптимизационная задача из [4, гл. 1] включает НКЗ для (0.3) с начальным условием (здесь $\hat{t} \equiv \{t^1,\dots,t^n\}$)

$$x(\hat{t},0) = w(\hat{t}), \quad \hat{t} \in Q \tag{0.4}$$

($w(.) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)$ фиксирована [2]), граничным условием Дирихле

$$x(t) = 0, \quad t \in \Gamma \equiv \partial Q \times [0,\sigma] \tag{0.5}$$

(или Неймана), при этом допустимы управления $v(.)$ из некоторого замкнутого в $L_2(\Pi)$, выпуклого множества $\mathbf{D}$, и минимизируемый функционал вида

$$J[v,x] \equiv \frac{1}{6}\|x-\overline{x}\|^6_{6,\Pi} + \frac{\mathcal{N}}{2}\|v\|^2_{2,\Pi} \to \min, \tag{0.6}$$

в котором $\overline{x} \in L_6$ фиксировано. Решение (0.3)–(0.5) понимается в смысле $W_2^{2,1}$ и в основном рассматриваются случаи $n = 1,2,3$, когда $W_2^{2,1}(\Pi) \subset L_6(\Pi)$, т. е. $x \in L_6(\Pi)$ и задание (0.6) корректно. Изучается проблема получения НУО типа интегрального принципа максимума для задачи (0.3)–(0.6). В данном случае, вообще говоря, $\mathbf{D} \not\subset \mathcal{R}$ (некоторым управлениям может отвечать лишь локальное по t^{n+1}, но не глобальное решение НКЗ (0.3)–(0.5)), т. е. управляемая система (0.3)–(0.5) сингулярна в описанном выше смысле. Поэтому в [4] предлагается для вывода НУО в задаче (0.3)–(0.6) действовать не традиционным методом классического варьирования управлений, когда значения функционала (0.6) определяются напрямую управлением по правилу $I[v] \equiv J[v,x_v]$ (x_v — глобальное решение НКЗ (0.3)–(0.5), отвечающее управлению v), а изучать задачу (0.3)–(0.6) на классе пар "управление-состояние" $\{v(.),x(.)\}$ в пространстве $L_2 \times L_6$ и применять метод адаптированного штрафа. При этом задача (0.3)–(0.6) заменяется задачей с адаптированным штрафом (как указано в [4, с. 52], используется идея работы [12], посвященной вариационным неравенствам)

$$J_\varepsilon[v,x] \equiv J[v,x] + (2\varepsilon)^{-1}\|\mathcal{L}[x] - x^3 - v\|_2^2 + \|v-v_0\|_2^2 + \|x-x_0\|_2^2 \to \min, \quad \{v,x\} \in X, \tag{0.7}$$

где $X \equiv \{\{v,x\} \in L_2 \times L_6 : (0.4),(0.5),\mathcal{L}[x] \in L_2, v \in \mathbf{D}\}$; $\varepsilon > 0$ — параметр штрафа, стремящийся к нулю; $\{v_0,x_0\}$ — выбранная оптимальная пара задачи (0.3)–(0.6). Доказывается, что метод адаптированного штрафа сходится, т. е. при $\varepsilon \to 0$ решение $\{v_\varepsilon,x_\varepsilon\}$ задачи (0.7) стремится в $L_2 \times L_6$ к $\{v_0,x_0\}$. Для задачи (0.7) методом классического варьирования выводится НУО в виде интегрального принципа максимума, из которого предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ получаются искомые НУО для задачи (0.3)–(0.6). Эти НУО, названные в [4] *сингулярной системой оптимальности*, выглядят следующим образом (см. [4, гл.1, теорема 3.2]).

Лемма 1. *Пусть $n \in \{1,2,3\}$. Если $\{v_0,x_0\}$ — оптимальная пара задачи* (0.3)–(0.6)*, то*

$$\int\limits_{\Pi} (\psi + \mathcal{N}v_0)(v-v_0)dt \geq 0 \quad \textit{при} \quad v \in \mathbf{D},$$

где ψ — единственное в $W_{6/5}^{2,1}(\Pi)$ решение задачи

$$\mathcal{L}^*[\psi](t) \equiv -\psi'_{t^{n+1}} - \Delta\psi = 3x_0^2\psi + (x_0 - \overline{x})^5, \quad t \in \Pi, \tag{0.8}$$

$$\psi(\hat{t},\sigma) = 0, \quad \hat{t} \in Q; \quad \psi(t) = 0, \quad t \in \Gamma. \tag{0.9}$$

[2] В обозначениях функциональных пространств мы следуем [3, гл.1, §1].

В [4] подчеркивается, что сингулярная система оптимальности из леммы 1 имеет в точности “ту же структуру”, что и НУО для задачи “без разрыва”, полученной заменой уравнения (0.3) на “устойчивое уравнение”

$$\mathcal{L}[x] = -x^3 + v(t), \quad t \in \Pi. \tag{0.10}$$

В аналогичной задаче (0.3)–(0.6) оптимизационной задаче для (0.10), в отличие от задачи (0.3)–(0.6), $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}$, так как $\mathcal{R} = L_2$. Поэтому в [4] для получения НУО в случае (0.10) функционал (0.6) рассматривается в виде $I[v] \equiv J[v, x_v]$ и применяется классическое варьирование оптимального управления v_0, что быстро приводит к цели (см.[4, гл. 1, п. 1.4]). Метод адаптированного штрафа гораздо более трудоемок. Одна из существенных трудностей (возникающих при использовании этого метода), как указано в [4, с. 66], — нахождение априорных оценок так называемого приближенного сопряженного состояния, зависящего от параметра ε.

Таким образом, в теории НУО считать управляемую НКЗ сингулярной и переходить к рассмотрению пар ”управление-состояние” вынуждает прежде всего недостаток информации об УСГР управляемой НКЗ относительно требующегося варьирования управлений (в задаче, описанной выше, это классическое варьирование). Как показано в данной статье, такая трудность в некоторых случаях может быть преодолена (т. е. показана возможность требующегося для вывода НУО варьирования управлений) с помощью перехода в описании управляемой системы от НКЗ к эквивалентному ВФУ и применения соответствующих теорем об УСГР. При этом используется то, что и в сингулярной в смысле [4] ситуации часто можно считать предположение (0.2) выполненным, взяв за “подходящее множество управлений” из (0.2) множество $\mathcal{R}$, если НКЗ обладает следующим свойством единственности:

каждому допустимому управлению отвечает не более одного решения НКЗ. (0.11)

Заметим, что в [13], [10] НУО в сингулярных в смысле [4] распределенных задачах оптимального управления, рассматриваемых на классах пар “управление-состояние”, выводятся применением абстрактных принципов Лагранжа для экстремальных задач общего вида с ограничениями. При этом используются как широко известные варианты принципа Лагранжа (например, из [2]), так и специально разработанные.

Естественно желание так или иначе (по возможности) возвратиться при выводе НУО в сингулярных в смысле [4] задачах оптимального управления к простой и естественной классической идее варьирования управлений. Цель данной статьи — на примере полулинейного параболического уравнения показать, как эквивалентное описание управляемых НКЗ с помощью ВФУ (0.1) позволяет получить такую возможность для некоторых задач оптимального управления, рассматриваемых в [4] при выводе НУО как сингулярные, и вывести для них искомые НУО классическим способом варьирования управлений. При этом удается обойтись элементарными средствами функционального анализа.

В качестве иллюстративного примера в разделе 3 статьи рассматривается вывод таким способом “сингулярной системы оптимальности” леммы 1. Мы показываем, что множество $\mathcal{R}$ НКЗ (0.3)–(0.5) открыто, а “сингулярная задача” (0.3)–(0.6) сводится к эквивалентной задаче оптимизации классической формы на множестве управлений $\mathcal{R} \cap \mathbf{D}$. Это позволяет для получения НУО в задаче применить классическое варьирование, что приводит к лемме 1. По той же схеме могут быть получены и некоторые другие “сингулярные системы оптимальности”, выведенные в [4] методом адаптированного штрафа, а также решены некоторые задачи по выводу “сингулярных систем оптимальности”, поставленные в [4] как “нерешенные и представляющие интерес” (см., например, [6; 11], а также обзор [16]).

В рассуждениях разд. 3 используются полученные в разд. 2 результаты о первой НКЗ для полулинейного параболического уравнения: утверждения о единственности решения, об открытости множества $\mathcal{R}$, о дифференцируемости по управлению интегрального функционала. Эти результаты следуют из соответствующих утверждений для ВФУ (0.1), представленных в разд. 1, которые опираются, в частности, на теорему об УСГР для (0.1). Некоторые из основных утверждений статьи в несколько иной форме были приведены в [6] без доказательств.

Примем следующие обозначения и соглашения: $\mathbb{R}^N$ — пространство N-векторов-столбцов; $\langle .,. \rangle_N$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$; $\Pi \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченное и измеримое по Лебегу заданное множество; Σ — σ-алгебра измеримых подмножеств Π; считаем функцию f, оператор A, систему $\mathbf{T} \subset \Sigma$, числа $p, q \in [1, +\infty)$ $(p \le q)$, $m, l, s, n \in \mathbb{N}$ фиксированными; $r = pq/(q-p)$ при $p < q$, $r = +\infty$ при $p = q$; модуль вектора (матрицы) равен сумме модулей его (соответственно ее) компонент; норма в $L_p^m(H)$, $H \in \Sigma$, задается формулой $\|z\|_{p,m,H} \equiv \| \, |z| \, \|_{p,H}$, где $\| \cdot \|_{p,H}$ — стандартная норма $L_p\,(H)$ (при $H = \Pi$ и/или $m = 1$ соответствующие значки в обозначениях, как правило, опускаем); $L_r^{m\times l}(H)$ — пространство $(m \times l)$-матриц-функций с $L_r(H)$-компонентами, $\| \cdot \|_{r,m\times l,H} \equiv \| \, |\cdot| \, \|_{r,H}$ — норма в $L_r^{m\times l}(H)$; $V(\mathbf{T})$ — семейство всех операторов (как линейных, так и нелинейных), действующих из одного в другое пространство вектор-функций на Π и вольтерровых на системе $\mathbf{T}$ в указанном выше смысле; $\mathbf{T}^{(-)} \equiv \{h \colon h = H_1 \backslash H_2 \colon H_1, H_2 \in \mathbf{T}, H_2 \subset H_1\}$; $L(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — класс всех *линейных ограниченных операторов* (ЛОО), определенных на банаховом пространстве $\mathbf{B}_1$ и действующих в банахово пространство $\mathbf{B}_2$; $\|G\|_{p,m,H\to q,l,H}$ — норма ЛОО $G \in L(L_p^m(H), L_q^l(H))$; P_H — оператор умножения на характеристическую функцию $\chi_H(t) = \{1, t \in H; 0, t \in \Pi \setminus H\}$ множества $H \subset \Pi$; * — знак транспонирования и сопряжения.

1. Некоторые свойства вольтерровых функциональных уравнений

Требования к уравнению (0.1) формулируем в виде выписываемых ниже условий $\mathbf{K}_0$), $\mathbf{K}_1$), $\mathbf{K}_2$), $\mathbf{K}_3$), $\mathbf{K}_4$), $\mathbf{K}_5$), **a**), **b**), **c**), **d**), **e**).

$\mathbf{K}_0$) Функция $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v})$ дифференцируема по $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s$ при *почти всех* (п.в.) $t \in \Pi$ и вместе с производными $f'_{\mathbf{p}}$, $f'_{\mathbf{v}}$ измерима по t на Π для всех $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s$, а также непрерывна по $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s$ для п.в. $t \in \Pi$.

$\mathbf{K}_1$) Формула $\mathbf{f}[y, v](t) \equiv f\,(t,\ y(t),\ v(t))$, $t \in \Pi$, $y \in L_q^l$, $v \in \mathcal{D}$, определяет оператор $\mathbf{f}[.,.] : L_q^l \times \mathcal{D} \to L_p^m$.

$\mathbf{K}_2$) Формула $\mathbf{f}_1[y, v](t) \equiv f'_{\mathbf{p}}\,(t,\ y(t),\ v(t))$, $t \in \Pi$, $y \in L_q^l$, $v \in \mathcal{D}$, определяет ограниченный оператор $\mathbf{f}_1[.,.] : L_q^l \times \mathcal{D} \to L_r^{m\times l}$. То есть существует неубывающая $\mathcal{N}(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\|\mathbf{f}_1[y, v](.)\|_{r,m\times l} \le \mathcal{N}\,(\max\{\|y\|_{q,l},\ \|v\|_{k,s}\})$ при $y \in L_q^l$, $v \in \mathcal{D}$.

a) $A \in V(\mathbf{T})$.

Пусть в $L_r^{m\times l} = L_r^{m\times l}(\Pi)$ выделен некоторый класс функций $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{\Gamma}(\Pi)$, такой что для любого $h \in \mathbf{T}^{(-)}$, $mes\ h > 0$, справедливо следующее: $P_h\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{\Gamma}$; формальная замена в определении класса $\mathbf{\Gamma}(\Pi)$ множества Π на множество h корректна и приводит к некоторому классу заданных на h функций, который мы обозначим через $\mathbf{\Gamma}(h)$; элементами класса $\mathbf{\Gamma}(h)$ являются те и только те определенные на h функции, каждая из которых есть сужение на h некоторой функции класса $\mathbf{\Gamma}(\Pi)$ (в приложениях роль $\mathbf{\Gamma}$ может играть, например, весь класс $L_r^{m\times l}$, некоторый класс $L_\nu^{m\times l}$, $\nu > r$, класс функций, пересечение которого с каждым шаром из $L_r^{m\times l}$ есть множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными $L_r^{m\times l}$-нормами и др.).

Положим

$$\mathbf{I}(t, x, y, \mathbf{v}) \equiv \int\limits_0^1 f'_{\mathbf{p}}\,(t,\ x + \theta y,\ \mathbf{v})\, d\theta, \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathbb{R}^l, \quad y \in \mathbb{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^s.$$

В силу $\mathbf{K}_2$) формула

$$\mathbf{J}\,[x,\ y,\ v]\,(t) \equiv \mathbf{I}\,(t,\ A[y](t),\ A[x-y](t),\ v(t)), \quad t \in \Pi, \quad x, y \in L_p^m, \quad v \in \mathcal{D},$$

задает ограниченный оператор $\mathbf{J}[.,.,.] : L_p^m \times L_p^m \times \mathcal{D} \to L_r^{m\times l}$.

$\mathbf{K}_3$) $\mathbf{J}\,[x, y, v]\,(.) \in \mathbf{\Gamma}\,(\Pi)$ для любых $x, y \in L_p^m$ и $v(.) \in \mathcal{D}$.

Далее потребуется введенное ранее нами (см. обзоры и библиографию в [8;16], а также работу [7]) понятие *суперравностепенной квазинильпотентности* семейства линейных операторов, действующих в банаховом пространстве. Пусть $\mathbf{B}$ — вещественное банахово пространство с нормой $\|.\|$, $\varGamma$ — некоторое множество, $\{G(\gamma)[.]:\mathbf{B}\to\mathbf{B}\}_{\gamma\in\varGamma}$ — семейство зависящих от параметра $\gamma\in\varGamma$ квазинильпотентных ЛОО. Достаточно естественно назвать семейство $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\varGamma}$ *равностепенно квазинильпотентным*, если $\sqrt[k]{\sup\limits_{\gamma\in\varGamma}\left\|\{G(\gamma)\}^k\right\|}\to 0$ при $k\to\infty$. Но нам требуется следующее определение: семейство $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\varGamma}$ *суперравностепенно квазинильпотентно*, если

$$\sqrt[k]{\sup_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k\in\varGamma}\|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_k)\|}\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty. \tag{1.1}$$

Заметим, что число, равное $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\sup\limits_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k\in\varGamma}\|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_k)\|}$, называется *совместным спектральным радиусом* (joint spectral radius) семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\varGamma}$ [14]. Если совместный спектральный радиус семейства операторов равен нулю, то такое семейство часто называют *квазинильпотентным* (см., например, [15]). Мы для обозначения свойства (1.1) семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\varGamma}$ используем понятие *суперравностепенная квазинильпотентность*, придерживаясь терминологии, предложенной нами ранее.

b) Семейство операторов $W(A,\Pi,\nu)\equiv\left\{(\alpha A)\in L(L_p^m,L_p^m):\alpha\in\mathbf{\Gamma}(\Pi),\|\alpha\|_{r,m\times s}\le\nu\right\}$ суперравностепенно квазинильпотентно при любом $\nu>0$.

Условие **a**) позволяет говорить о локальных решениях уравнения (0.1) на множествах $H\in\mathbf{T}$. В силу условий $\mathbf{K}_0$), $\mathbf{K}_1$), **a**) такие решения имеет смысл искать в классах $L_p^m(H)$. Функцию $z(\cdot)\in L_p^m(H)$ назовем отвечающим управлению $v(\cdot)\in D$ решением уравнения (0.1) на $H\in\mathbf{T}$, если она вместе с $v(\cdot)$ обращает (0.1) в тождество п.в. на H.

Теорема 1. *Если выполняются условия* $\mathbf{K}_0$)–$\mathbf{K}_3$), **a**), **b**)*, то каково бы ни было* $v\in\mathcal{D}$*, уравнение* (0.1) *не может иметь ни на каком* $H\in\mathbf{T}$ *более одного решения в классе* $L_p^m(H)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о сформулированной теоремы проводится подобно доказательству аналогичной теоремы единственности решения уравнения (0.1) [8, теорема 1.1], посвященной случаю регулярного оператора A.

Для рассмотрения вопроса о достаточных условиях сохранения глобальной разрешимости уравнения (0.1) введем следующие определения. Упорядоченную по вложению систему подмножеств $\{H_0,\ldots,H_{\mathbf{k}}\}$ множества Π называем *цепочкой множеств*, если $H_0=\varnothing$, $H_{\mathbf{k}}=\Pi$. Если цепочка множеств $\mathcal{T}=\{H_0,\ldots,H_{\mathbf{k}}\}$ принадлежит системе $\mathbf{T}$, на которой оператор A вольтерров, то называем $\mathcal{T}$ *вольтерровой цепочкой оператора* A. Пусть $\delta>0$ — некоторое число; говорим, что ЛОО $A:L_p^m\to L_q^l$ удовлетворяет δ-условию на множестве $H\in\Sigma$, если $\|P_HAP_H\|_{p,m\to q,l}<\delta$. Цепочку $\mathcal{T}=\{H_0,\ldots,H_{\mathbf{k}}\}$ назовем δ-*цепочкой* ЛОО $A:L_p^m\to L_q^l$, если A удовлетворяет δ-условию на каждой разности $H_i\setminus H_{i-1}$, $i=\overline{1,\mathbf{k}}$. Цепочку $\mathcal{T}=\{H_0,\ldots,H_{\mathbf{k}}\}\subset\Sigma$ назовем δ-*малой по мере*, если $mes(H_i\setminus H_{i-1})<\delta$ для всех $i=1,\ldots,\mathbf{k}$.

c) Для любого $\delta>0$ оператор $A:L_p^m\to L_q^l$ имеет вольтеррову δ-цепочку.

Пусть Ω — класс тех $v\in\mathcal{D}$, каждому из которых отвечает единственное глобальное решение $z_v\in L_p^m$ уравнения (0.1). Предполагаем, что $\Omega\ne\varnothing$. Произвольно фиксируем некоторый элемент $v_0\in\Omega$ и пусть $z_0\equiv z_{v_0}$. Для $v\in\mathcal{D}$ положим

$$\Delta_vf(z_0)(t)\equiv f(t,A[z_0](t),v(t))-f(t,A[z_0](t),v_0(t)),\ t\in\Pi;\quad \mathbf{r}(v,v_0)\equiv\|A[\Delta_vf(z_0)]\|_{q,l}.$$

Сформулируем теорему об УСГР уравнения (0.1).

Теорема 2. *Если выполняются условия* $\mathbf{K}_0$)–$\mathbf{K}_3$), **a**), **b**), **c**)*, то для любых* $d>0$, $d_0>0$, $v_0\in\Omega$ *существуют* $\epsilon>0$, $C>0$ *такие, что если некоторое* $v\in\mathcal{D}$ *удовлетворяет неравенствам* 1) $\|v-v_0\|_{k,s}<d_0$, 2) $\|\Delta_vf(z_0)\|_{p,m}<d$, 3) $\mathbf{r}(v,v_0)<\epsilon$, *то* $v\in\Omega$ *и*

$$\|z_v-z_0\|_{p,m}\le C\|\Delta_vf(z_0)\|_{p,m}\ ,\quad \|A[z_v-z_0]\|_{q,l}\le C\cdot\mathbf{r}(v,v_0).$$

Доказательство сформулированной теоремы проводится подобно доказательству аналогичной теоремы об УСГР уравнения (0.1) [8, теорема 1.1], посвященной случаю регулярного оператора A.

Заменяя в теореме 2 условие **b**) теми или иными конкретными условиями, достаточными для выполнения **b**), получаем конкретные УСГР уравнения (0.1). Ниже мы воспользуемся, например, условиями **d**) и **e**).

d) Для любого $\delta > 0$ ЛОО $A : L_p^m \to L_q^l$ имеет δ-малую по мере вольтеррову цепочку.

e) ЛОО $A : L_p^m \to L_q^l$ переводит единичный шар в множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами.

Непосредственно из [7, предложение 3] получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $E \subset L_r^{m\times l}$ — ограниченное множество, $q < \infty$ и* ЛОО $A : L_p^m \to L_q^l$ *обладает свойствами* **d**) *и* **e**). *Тогда семейство действующих в L_p^m* ЛОО

$$F_\alpha[z](t) \equiv \alpha(t)A[z](t), \quad t \in \Pi, \quad z(.) \in L_p^m \quad (\alpha(.) \in E)$$

суперравностепенно квазинильпотентно.

Замечание 1. Из неравенства Гёльдера следует, что условие **e**) выполняется, если существует $q* > q$ такое, что $A\left[L_p^m\right] \subset L_{q*}^l$.

Имея в виду, что целью данной статьи является рассмотрение конкретных задач оптимизации, связанных с параболическими уравнениями, далее считаем, что $k = 2$, $\mathcal{D} = L_2^s$, $p \in [1, 2]$; положим: $e = 2p/(2-p)$ при $p < 2$, $e = +\infty$ при $p = 2$.

$\mathbf{K}_4$) Для любого $v(.) \in L_2^s$ формула

$$\mathbf{f}_2(v)[y](t) \equiv f'_{\mathbf{p}}(t, y(t), v(t)), \quad t \in \Pi, \quad y(.) \in L_q^l,$$

определяет непрерывный оператор $\mathbf{f}_2(v)[.] : L_q^l \to L_r^{m\times l}$.

$\mathbf{K}_5$) Для любого $y(.) \in L_q^l$ формула

$$\mathbf{f}_3(y)[v](t) \equiv f'_{\mathbf{v}}(t, y(t), v(t)), \quad t \in \Pi, \quad v \in L_2^s,$$

определяет непрерывный и ограниченный оператор $\mathbf{f}_3(y)[.] : L_2^s \to L_e^{m\times s}$.

Из теоремы об УСГР получаем следующее утверждение об открытости множества Ω.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $\mathbf{K}_0$)–$\mathbf{K}_3$), $\mathbf{K}_5$), **a**), **b**), **c**). *Тогда множество Ω открыто в L_2^s и для любого элемента $v_0 \in \Omega$ существует его L_2^s-окрестность U, лежащая в Ω, и число $C_1 > 0$ такие, что*

$$\|A[z_v - z_0]\|_{q,l} \le C_1 \cdot \|v - v_0\|_{2,s}, \quad v \in U. \tag{1.2}$$

Доказательство. Из условий $\mathbf{K}_0$), $\mathbf{K}_5$) и теоремы о конечных приращениях имеем

$$\|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m} \le \left\|\left|\int_0^1 f'_{\mathbf{v}}\left(., A[z_0](.), v_0 + \theta(v - v_0)\right) d\theta\right|\right\|_e \cdot \|v - v_0\|_{2,s}, \quad v \in \mathcal{D}, \tag{1.3}$$

причем первый сомножитель правой части (1.3) равномерно по v ограничен в любой L_2^s-окрестности v_0. То есть для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная C_ε такая, что

$$\|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m} \le C_\varepsilon \cdot \|v - v_0\|_{2,s} \quad \text{при} \quad \|v - v_0\|_{2,s} < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Опираясь на (1.4), непосредственно из теоремы 2 получаем утверждение теоремы 3.

Теорема доказана.

При переходе к описанию оптимизационных задач в терминах функционального уравнения (0.1) функционалы задач часто приводятся к виду

$$J[v] \equiv F\left[A[z_v], v\right], \quad v \in \Omega, \tag{1.5}$$

где $F[.,.] : L_q^l \times L_2^s \to \mathbb{R}$ — функционал, дифференцируемый по Фреше над $L_q^l \times L_2^s$. Пусть $F'(y,v)[.,.] \in \left(L_q^l \times L_2^s\right)^*$ — производная Фреше F в точке $\{y, v\} \in L_q^l \times L_2^s$. По теореме Рисса

$$F'(y,v)[\Delta y, \Delta v] \equiv \int\limits_{\Pi} \left\{ \langle \sigma[y,v](t), \Delta y(t) \rangle_l + \langle \tau[y,v](t), \Delta v(t) \rangle_s \right\} dt, \quad \{\Delta y, \Delta v\} \in L_q^l \times L_2^s,$$

где $\{\sigma[y,v](.), \tau[y,v](.)\} \in L_{q'}^l \times L_2^s$, $(q')^{-1} + q^{-1} = 1$. Теорема 3 позволяет доказать следующую удобную в приложениях теорему о дифференцируемости функционалов вида (1.5).

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3, *условие* $\mathbf{K}_4$) *и указанные условия дифференцируемости функционала* $F[.,.] : L_q^l \times L_2^s \to \mathbb{R}$. *Тогда в любой точке* $v_0 \in \Omega$ *функционал* J *имеет производную Фреше* $J'(v_0)[.] \in (L_2^s)^*$, *которая отождествляется с принадлежащей* L_2^s *функцией*

$$\pi[v_0](t) \equiv \tau\left[A[z_0], v_0\right](t) + \left\{ f'_{\mathbf{v}}\left(t, A[z_0](t), v_0(t)\right)\right\}^* \psi(t), \quad t \in \Pi, \tag{1.6}$$

где ψ *— единственное в* $L_{p'}^m$, $(p')^{-1} + p^{-1} = 1$, *решение уравнения*

$$\psi(t) - A^*\left[\left\{ f'_{\mathbf{p}}\left(., A[z_0](.), v_0(.)\right)\right\}^* \psi\right](t) = A^*\left[\sigma\left[A[z_0], v_0\right]\right](t), \quad t \in \Pi. \tag{1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $v_0 \in \Omega$. Пусть U — L_2^s-окрестность v_0, отвечающая управлению v_0 по теореме 3. Для $v \in U$ рассмотрим приращение $\Delta J \equiv J[v] - J[v_0]$. Положим $\Delta z \equiv z_v - z_0$, $\Delta v \equiv v - v_0$. По определению производной Фреше имеем

$$\Delta J = F'\left(A[z_0], v_0\right)\left[A[\Delta z], \Delta v\right] + \xi\left[A[\Delta z], \Delta v\right],$$

где функционал $\xi[.,.] : L_q^l \times L_2^s \to \mathbb{R}$ таков, что

$$|\xi[\Delta y, \Delta v]| = o\left(\|\Delta y\|_{q,l} + \|\Delta v\|_{2,s}\right), \quad \|\Delta y\|_{q,l} + \|\Delta v\|_{2,s} \to 0.$$

В силу теоремы 3 получаем

$$|\xi\left[A[\Delta z], \Delta v\right]| = o\left(\|\Delta v\|_{2,s}\right), \quad \|\Delta v\|_{2,s} \to 0. \tag{1.8}$$

Линеаризовав (0.1) в окрестности U, находим, что

$$S[\Delta z](t) = f'_{\mathbf{v}}(t, A[z_0], v_0) \cdot \Delta v + \eta(t),$$

где

$$\eta(t) \equiv \eta_1(t)\Delta v + \eta_2(t) A[\Delta z],$$

$$\eta_1(t) \equiv \int\limits_0^1 \left[f'_{\mathbf{v}}(t, A[z_0], v_0 + \theta\Delta v) - f'_{\mathbf{v}}(t, A[z_0], v_0)\right] d\theta,$$

$$\eta_2(t) \equiv \int\limits_0^1 \left[f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0] + \theta A[\Delta z], v_0) - f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0], v_0)\right] d\theta,$$

$S[.] : L_p^m \to L_p^m$ — ЛОО, определяемый формулой

$$S[z](t) \equiv z(t) - f'_{\mathbf{p}}\left(t, A[z_0](t), v_0(t)\right) A[z](t), \quad t \in \Pi, \quad z(.) \in L_p^m.$$

В силу условий $\mathbf{K}_3$), $\mathbf{b}$) оператор S обратим, причем $\left(S^{-1}\right)^* = (S^*)^{-1}$ (см. [1, с. 516]), и уравнение (1.7) имеет единственное решение в $L^m_{p'}$, а

$$\Delta J = \int\limits_{\Pi} \langle \pi[v_0](t), \Delta v(t) \rangle_s \, dt + \int\limits_{\Pi} \langle \eta(t), \psi(t) \rangle_m \, dt + \xi \left[A\left[\Delta z\right], \Delta v \right].$$

Для завершения доказательства теоремы ввиду (1.8) осталось убедиться, что

$$\int\limits_{\Pi} \langle \eta(t), \psi(t) \rangle_m \, dt = o\left(\|\Delta v\|_{2,s}\right), \quad \|\Delta v\|_{2,s} \to 0. \tag{1.9}$$

Неравенство Гельдера и оценка (1.2) дают существование такой постоянной C_2, что для любого $v \equiv v_0 + \Delta v \in U$ имеем

$$\left| \int\limits_{\Pi} \langle \eta(t), \psi(t) \rangle_m \, dt \right| \le C_2 \cdot \|\Delta v\|_{2,s} \cdot \left(|||\eta_1|||_e + |||\eta_2|||_r \right),$$

откуда в силу $\mathbf{K}_4$), $\mathbf{K}_5$) следует (1.9).

Теорема доказана.

2. Применение к задачам оптимизации, связанным с полулинейным параболическим уравнением

Пусть $\Pi \equiv Q \times [0, \sigma] \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область с границей ∂Q класса C_2; $\Gamma \equiv \partial Q \times [0, \sigma]$; $t = \{t^1, \ldots, t^n, t^{n+1}\} \equiv \{\hat{t}, t^{n+1}\}$. Рассмотрим смешанную задачу для полулинейного параболического уравнения

$$\mathcal{L}[x](t) \equiv x'_{t^{n+1}} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(t) x'_{t^j} \right)'_{t^i} = g\left(t,\ x(t),\ v(t)\right), \quad t \in \Pi, \tag{2.1}$$

$$x(\hat{t}, 0) = w(\hat{t}), \quad \hat{t} \in Q, \tag{2.2}$$

$$x(t) = 0, \quad t \in \Gamma, \tag{2.3}$$

считая начальную функцию $w(.) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)$ заданной и предполагая, что коэффициенты главной части a_{ij} вместе с производными $(a_{ij})'_{t^i}$ принадлежат некоторому классу $\mathcal{H}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Pi})$, выполняется условие равномерной параболичности: $d_1 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) \xi^i \xi^j \le d_2 |\xi|^2$, $t \in \overline{\Pi}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ (числа $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ фиксированы). Функция правой части $g\left(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}\right) : \Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана, управление НКЗ (2.1)–(2.3) осуществляется с помощью функции $v(.)$. Чтобы сформулировать требования к правой части (2.1), проведем сначала вспомогательные рассмотрения.

Рассмотрим связанную с (2.1)–(2.3) вспомогательную НКЗ для уравнения

$$\mathcal{L}[x](t) = z(t), \quad t \in \Pi, \tag{2.4}$$

с условиями (2.2), (2.3), считая, что $z(.) \in L_p$ при некотором $p \in (1, \infty)$. Эта НКЗ при любом $p \in (1, \infty)$ и любом $z(.) \in L_p$ имеет единственное в $W^{2,1}_p(\Pi)$ решение, задаваемое формулой

$$x(t) = \mathcal{M}_{(p)}[z](t) + \mathcal{M}_0[w](t), \quad t \in \Pi, \tag{2.5}$$

в которой первое слагаемое правой части — решение НКЗ при $w \equiv 0$, второе — решение НКЗ при $z \equiv 0$ и каждое слагаемое принадлежит $W^{2,1}_p(\Pi)$, причем $\mathcal{M}_{(p)}[.] : L_p \to W^{2,1}_p(\Pi)$ — ЛОО (см. [3, гл. 4, теорема 9.1]). Оператор $\mathcal{M}_{(p)}$ имеет интегральное представление

$$\mathcal{M}_{(p)}[z](t) = \int\limits_0^{t^{n+1}} d\zeta^{n+1} \int\limits_Q G(t; \zeta) z(\zeta) d\hat{\zeta}, \quad z(.) \in L_p, \quad t \in \Pi, \tag{2.6}$$

где $G(t;\zeta):\Pi\times\Pi\to\mathbb{R}$ — функция Грина задачи (2.2)–(2.4) (см. [3, гл. 4, §16]). Положим

$$q_{p,n}\equiv\Big\{+\infty,\ \text{если } p\geq\frac{n+2}{2};\quad \frac{(n+2)p}{(n+2)-2p},\ \text{если } p<\frac{n+2}{2}\Big\}.$$

При $p\leq q\leq q_{p,n}$ пространство $W_p^{2,1}$ ограниченно вложено в L_q (см. [3, гл. 2, лемма 3.3]). Таким образом, формула

$$A[z](t)=\mathcal{M}_{(p)}[z](t),\quad t\in\Pi,\quad z(.)\in L_p\,, \tag{2.7}$$

определяет ЛОО $A\colon L_p\to L_q$ для любых p,q, таких что $1<p\leq 2$, $p<q\leq q_{p,n}$, $q<\infty$. Фиксируем некоторую пару p,q, удовлетворяющую неравенствам

$$1<p\leq 2,\quad p<q<q_{p,n},\quad q<\infty. \tag{2.8}$$

Взяв $m=1$, $l=1$, $s=1$, $N=n+1$, $\mathcal{D}=L_2$, $\mathbf{\Gamma}(\Pi)=L_r$, обозначим через $\mathbf{M}_0$), $\mathbf{M}_1$), $\mathbf{M}_2$), $\mathbf{M}_3$), $\mathbf{M}_4$), $\mathbf{M}_5$) условия, полученные соответственно из условий $\mathbf{K}_0$), $\mathbf{K}_1$), $\mathbf{K}_2$), $\mathbf{K}_3$), $\mathbf{K}_4$), $\mathbf{K}_5$) формальной заменой функции $f(t,\mathbf{p},\mathbf{v}):\Pi\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^m$ функцией $g\,(t,\mathbf{p},\mathbf{v})):\Pi\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, а символов $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ соответственно символами $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$. Будем считать, что для функции g выполняются условия $\mathbf{M}_0$)– $\mathbf{M}_5$).

Пусть $W_{(p,w)}$ — класс всех тех функций из $W_p^{2,1}(\Pi)$, каждая из которых при данном $w\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$ и некотором $z\in L_p$ является решением НКЗ (2.2)–(2.4). Поскольку оператор $\mathcal{M}_{(p)}$ как оператор, действующий в L_p, квазинильпотентен (см. [5, лемма 3]), то для каждой $w\in\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q)$ формула (2.5) устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями $x(.)$ из $W_{(p,w)}$ и функциями $z(.)$ из L_p.

Функцию $x(.)\in W(\Pi)\equiv W_p^{2,1}(\Pi)$ назовем решением НКЗ (2.1)–(2.3), отвечающим управлению $v(.)\in L_2$, если $x(.)$ является решением НКЗ (2.2)–(2.4) при $z(t)\equiv g(t,x(t),v(t)),\ t\in\Pi$ (это определение корректно, так как по условию $\mathbf{M}_1$) для g и выбору p и q указанная функция $z(.)$ принадлежит L_p). Таким образом, заменой (2.5) НКЗ (2.1)–(2.3) приводится к уравнению вида (0.1) над L_p, в котором ЛОО $A:L_p\to L_q$ задается формулой (2.7), а функция f — формулой $f(t,\mathbf{p},\mathbf{v})\equiv g(t,\mathbf{p}+\mathcal{M}_0[w]\,(t)\,,\mathbf{v})$. Указанное уравнение вида (0.1) есть ВФУ с системой $\mathbf{T}\equiv\{Q\times[0,\tau]:\,0\leq\tau\leq\sigma\}$.

Непосредственно проверяется, что для этого ВФУ выполняются условия $\mathbf{K}_0$)–$\mathbf{K}_5$), **a**), **b**), **c**): справедливость условий $\mathbf{K}_0$)–$\mathbf{K}_5$) с очевидностью следует из условий $\mathbf{M}_0$)–$\mathbf{M}_5$), так как $\mathcal{M}_0[w](.)\in W_p^{2,1}\subset L_q$; возможность говорить о локальных решениях НКЗ (2.1)–(2.3) на множествах вида $Q\times[0,\tau],\ \ 0\leq\tau\leq\sigma$, означает выполнение условия **a**) при указанной системе $\mathbf{T}$; условие **b**) справедливо в силу сформулированных выше леммы 2 и замечания 1 (существование у оператора A δ-малой по мере вольтерровой цепочки очевидно); выполнение условия **c**) обеспечивается, как легко показать, неравенством $q<q_{p,n}$, вложением $A[L_p]\subset L_{q_{p,n}}$ и неравенством Гёльдера.

Для ВФУ (0.1), эквивалентного НКЗ (2.1)–(2.3), выполняются все условия теорем 1–3. Поэтому для НКЗ (2.1)–(2.3) выполняется условие единственности (0.11), а множество $\mathcal{R}$ всех тех управлений $v(.)\in L_2$, для каждого из которых существует единственное в классе $W_p^{2,1}(\Pi)$ решение $x_v(.)$ НКЗ (2.1)–(2.3) (совпадающее с множеством Ω эквивалентного этой НКЗ уравнения (0.1)), открыто в L_2.

Пусть $\mathbf{D}$ — выпуклое замкнутое множество в L_2. Рассмотрим задачу оптимизации вида

$$J[v]\equiv F_0[x_v,v]\to\min,\quad v(.)\in\mathbf{D}\cap\mathcal{R}, \tag{2.9}$$

где

$$F_0[x,v]\equiv\int\limits_{\Pi}G_0(x(t),v(t))dt,\quad x\in L_q,\quad v\in L_2, \tag{2.10}$$

— интегральный функционал, дифференцируемый по Фреше над $L_q \times L_2$, причем интегрант $G_0(\mathbf{p},\mathbf{v}) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таков, что производная Фреше $F_0'(x,v)$ функционала F_0 в точке $\{x,v\} \in L_q \times L_2$ описывается формулой

$$F_0'(x,v)[\Delta x,\Delta v] = \int\limits_{\Pi} \left\{G'_{0\mathbf{p}}(x,v)\cdot\Delta x + G'_{0\mathbf{v}}(x,v)\cdot\Delta v\right\} dt, \quad \Delta x\in L_q, \quad \Delta v \in L_2;$$

здесь $G'_{0\mathbf{p}}(x,v)\in L_{q'}$, $G'_{0\mathbf{v}}(x,v)\in L_2$.

Рассмотрим вопрос о дифференцировании функционала (2.9) в смысле L_2. Заменой (2.5) функционал (2.9) приводится к виду (1.5), где

$$F[x,v] \equiv F_0[x+\mathcal{M}_0[w],v], \quad x\in L_q, \quad v\in L_2.$$

Выполняются все условия теоремы 4. Имеем

$$\sigma[y,v] = G'_{0\mathbf{p}}(y+\mathcal{M}_0[w],v), \quad \tau[y,v] = G'_{0\mathbf{v}}(y+\mathcal{M}_0[w],v),$$

функция Рисса производной Фреше $J'(v)\in L_2^*$ функционала (2.9) имеет вид (1.6)

$$\pi[v](t) \equiv G'_{0\mathbf{v}}(x_v(t),v(t)) + g'_{\mathbf{v}}(t,x_v(t),v(t))\psi(t), \quad t\in\Pi, \tag{2.11}$$

где ψ — единственное в $L_{p'}$ решение уравнения (1.7)

$$\psi(t) = A^*\left[g'_{\mathbf{p}}(.,x_v(.),v(.))\psi(.) + G'_{0\mathbf{p}}(x_v(.),v(.))\right](t), \quad t\in\Pi. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) можно переписать в форме, эквивалентной НКЗ. Действительно, так как оператор $A: L_p\to L_q$ имеет интегральное представление (2.6) с ядром в виде функции Грина НКЗ (2.2)–(2.4), то сопряженный оператор $A^* : L_{q'}\to L_{p'}$ $\left(p^{-1}+(p')^{-1}=1,\ q^{-1}+(q')^{-1}=1\right)$ является “разрешающим” для НКЗ

$$\mathcal{L}^*[\psi](t) \equiv -\frac{\partial\psi}{\partial t^{n+1}} - \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(t)\psi'_{t^i}\right)'_{t^j} = y(t), \quad t\in\Pi, \tag{2.13}$$

$$\psi(\hat t,\sigma) = 0, \quad \hat t\in Q, \tag{2.14}$$

$$\psi(t) = 0, \quad t\in\Gamma. \tag{2.15}$$

Здесь $y(.)\in L_{q'}$, т. е. решение НКЗ (2.13)–(2.15), которое понимается как п.в.-решение из $W^{2,1}_{q'}(\Pi)$, представляется в виде $\psi(t) = A^*[y](t)$, $t\in\Pi$, $y(.)\in L_{q'}$. Таким образом, уравнение (2.12) эквивалентно НКЗ с начальным и граничным условиями (2.14), (2.15) для уравнения

$$\mathcal{L}^*[\psi](t) = g'_{\mathbf{p}}(t,x_v,v)\psi(t) + G'_{0\mathbf{p}}(x_v,v), \quad t\in\Pi. \tag{2.16}$$

Подведем итоги.

Теорема 5. *Пусть функционал* (2.10) *удовлетворяет указанным для него условиям дифференцируемости, а функция g — условиям* $\mathbf{M}_0$)–$\mathbf{M}_5$) *при некоторых p,q, подчиняющихся неравенствам* (2.8). *Тогда функционал* (2.9), *в котором $x_v\in W^{2,1}_p(\Pi)$ — решение* НКЗ (2.1)–(2.3), *дифференцируем по Фреше над $\mathcal{R}$ в смысле L_2. Функция Рисса его производной Фреше имеет вид* (2.11), *где ψ — решение из $W^{2,1}_{q'}(\Pi)$* НКЗ (2.14)–(2.16).

Теорема 5 обеспечивает (учитывая открытость множества $\mathcal{R}$ НКЗ (2.1)–(2.3) и выпуклость множества $\mathbf{D}$) возможность вывода НУО в задаче (2.9), (2.1)–(2.3) классическим варьированием. Этим НУО будет, как очевидно, интегральный принцип максимума с сопряженной системой вида (2.14)–(2.16). Не выписывая этот интегральный принцип максимума в общем виде для задачи (2.9), (2.1)–(2.3), рассмотрим конкретный пример применения теоремы 5.

3. Пример

Покажем как, используя результаты разд. 2, можно получить лемму 1 способом классического варьирования.

Рассмотрим на множестве пар $\{v, x\} \in \mathbf{D} \times L_6$ оптимизационную задачу (0.3)–(0.6). НКЗ (0.3)–(0.5) есть частный случай НКЗ (2.1)–(2.3) при $g(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{p}^3 + \mathbf{v}$, $l = m = 1$. Функция g удовлетворяет, как показано ниже, условиям $\mathbf{M}_0$)–$\mathbf{M}_5$) при $p = 2$, $q = 6$, если $n \in \{1, 2, 3\}$. Решение НКЗ (0.3)–(0.5) понимаем как решение в смысле п.в. из класса $W(\Pi) \equiv W_2^{2,1}(\Pi) \subset L_6$. Как доказано в разд. 2, НКЗ (0.3)–(0.5) обладает свойством единственности (0.11). Поэтому задача (0.3)–(0.6) эквивалентна оптимизационной задаче в классической форме

$$I[v] \equiv 6^{-1}\|x_v - \overline{x}\|_6^6 + 2^{-1}\mathcal{N}\|v\|_2^2 \to \min, \quad v \in \mathbf{D} \cap \mathcal{R}, \tag{3.1}$$

где класс $\mathcal{R} \subset L_2$ соответствует НКЗ (0.3)–(0.5).

Проверим для задачи (0.3)–(0.5), (3.1) выполнение условий теоремы 5. Условия, не использующие чисел p, q, очевидно, выполняются. Перечислим в общем виде остальные условия:

0) Функционал $F_0[x, v] \equiv 6^{-1}\|x - \overline{x}\|_6^6 + 2^{-1}\mathcal{N}\|v\|_2^2$ должен быть дифференцируем по Фреше над $L_q \times L_2$ с указанным представлением производной Фреше;

1) (условие (2.8) для p) $1 < p \le 2$;

2) (условие (2.8) для q) $p < q < q_{p,n}$, $q < \infty$;

3) (условие $\mathbf{M}_1$) для g) формула $\mathbf{g}[y, v] \equiv y^3 + v$ определяет оператор $\mathbf{g}[.,.] : L_q \times L_2 \to L_p$;

4) (условие $\mathbf{M}_2$) для $g'_{\mathbf{p}} \equiv 3\mathbf{p}^2$) формула $\mathbf{g}_1[y, v] \equiv 3y^2$ определяет ограниченный оператор $\mathbf{g}_1[.,.] : L_q \times L_2 \to L_r$ $(r^{-1} + q^{-1} = p^{-1})$;

5) (условие $\mathbf{M}_4$) для $g'_{\mathbf{p}}$) для любого $v \in L_2$ формула $\mathbf{g}_2(v)[y] \equiv 3y^2$ определяет непрерывный оператор $\mathbf{g}_2(v)[.] : L_q \to L_r$;

6) (условие $\mathbf{M}_5$) для $g'_{\mathbf{v}} \equiv 1$) для любого $y \in L_q$ формула $\mathbf{g}_3(y)[v] \equiv 1$ определяет ограниченный и непрерывный оператор $\mathbf{g}_3(y)[.] : L_2 \to L_e$.

В терминах p, q условия 0), 3)–6) записываются следующим образом: 0) $q \ge 6$; 3) $p \le \min\{\frac{q}{3}, 2\}$; 4) $r \le \frac{q}{2}$; 5) $r \le \frac{q}{2}$; 6) $1 \le p \le 2$. Система условий 0)–6) несовместна при $n \ge 4$, а при $n \in \{1, 2, 3\}$ имеет, в частности, решение $q = 6$, $p = 2$.

Взяв в теореме 5 числа $p = 2, q = 6$, получаем, что функционал (5) дифференцируем по Фреше в смысле L_2 над $\mathcal{R}$. Его производная в точке $v_0 \in \mathcal{R}$ имеет вид (2.11)

$$\pi[v_0](t) \equiv \mathcal{N} \cdot v_0(t) + \psi(t), \quad t \in \Pi.$$

Здесь ψ — единственное в L_2 решение из $W_{6/5}^{2,1}$ НКЗ (2.14)–(2.16), в которой нужно взять $v = v_0$, $x_v = x_{v_0}$ и которая совпадает в данном случае с НКЗ (0.8)–(0.9), где $x_0 \equiv x_{v_0}$. Теперь, пользуясь открытостью множества $\mathcal{R}$ НКЗ (0.3)–(0.5) и выпуклостью множества $\mathbf{D}$, классическим варьированием получаем НУО управления v_0 в задаче (3.1), совпадающие с НУО пары $\{v_0, x_0\}$ в задаче (0.3)–(0.6), приведенными в лемме 1.

Таким образом, мы доказали лемму 1 (т. е. теорему [4, гл. 1, теорема 3.2], полученную в [4] методом адаптированного штрафа) с помощью классического варьирования, воспользовавшись тем, что задача оптимизации (0.3)–(0.6), первоначально рассматривавшаяся на классе пар “управление-состояние”, может быть сведена к классической форме (3.1), а также тем, что множество $\mathcal{R}$ НКЗ (0.3)–(0.5) открыто, а множество $\mathbf{D}$ выпукло.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.
2. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
3. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

4. **Лионс Ж.-Л.** Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.
5. **Сумин В.И.** Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 9. С. 1587–1595.
6. **Сумин В.И.** К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. III // Вестн. ННГУ. Мат. моделирование и оптимальное управление. 2002. Вып. 1(25). с. 164–174.
7. **Сумин В.И.** Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, №1. С. 262–278. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278 .
8. **Сумин В.И.** Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме устойчивости существования глобальных решений распределенных управляемых систем // Вестн. российских университетов. Математика. 2020. Т. 25, № 132. С. 422–440. doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-132-422-440 .
9. **Тихонов А.Н.** О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. МГУ. Сек. А. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1–25.
10. **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.
11. **Чернов А.В.** О преодолении сингулярности распределенных систем управления // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Третьей Всерос. научн. конф. Ч. 2. Самара: СамГТУ, 2006. С. 171–174.
12. **Barbu V.** Necessary conditions for distributed control problems governed by parabolic variational inequalities // SIAM J. Control Optim. 1981. Vol. 19, no. 1. P. 64–68. doi: 10.1137/0319006 .
13. **Fursikov A.V.** Lagrange principle for problems of optimal control of ill posed or singular distributed systems // J. Math. Pures Appl. 1992. Vol. 71, no. 2. P. 139–195.
14. **Rota G.-C., Strang G.C.** A note on the joint spectral radius // Indag. Math. 1960. Vol. 22. P. 379–381. doi: 10.1016/S1385-7258(60)50046-1 .
15. **Shulman V.S., Turovskii Y.V.** Joint spectral radius, operator semigroups, and a problem of W. Wojtynski // J. Funct. Anal. 2000. Vol. 17, no. 2. P. 383–441. doi: 10.1006/jfan.2000.3640 .
16. **Sumin V.** Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems // IFAC PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 759–764. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.454 .

Поступила 15.06.2022
После доработки 15.07.2022
Принята к публикации 18.07.2022

Сумин Владимир Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
г. Нижний Новгород
Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: v_sumin@mail.ru

REFERENCES

1. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators. I. General theory.* NY: Interscience Publishers, 1958, 858 p. ISBN: 0470226056 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya*, Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 896 p.
2. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Amsterdam; NY; Oxford: North-Holland, 1979, 460 p. doi: 10.1016/s0168-2024(09)x7002-5 . Original Russian text published in Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow: Nauka Publ., 1974, 480 p.
3. Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type.* Providence: AMS, 1968, 648 p. doi: 10.1090/mmono/023 . Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa*, Moscow: Nauka Publ., 1967, 736 p.
4. Lions J. *Control of distributed singular systems.* Paris: Gauthier-Villars, 1985, 552 p. ISBN: 9782040157487 . Translated to Russian under the title *Upravlenie singulyarnymi raspredelennymi sistemami*, Moscow: Nauka Publ., 1987, 368 p.

5. Sumin V.I. Stability of the existence of a global solution to the first boundary value problem for a controllable parabolic equation. *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 9, pp. 1587–1595 (in Russian).
6. Sumin V.I. On the problem of singularity of controllable distributed parameter systems. III. *Vestn. Nizhegorod. Univ., Mat. Model. Optim. Upr.*, 2003, vol. 1(25), pp. 164–174 (in Russian).
7. Sumin V.I. Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 26, no. 1, pp. 262–278 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278 .
8. Sumin V.I. Volterra functional equations in the stability problem for the existence of global solutions of distributed controlled systems. *Vestn. Ross. Univ. Matem.*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 422–440 (in Russian). doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-132-422-440 .
9. Tikhonov A.N. On functional equations of Volterra type and their applications to certain problems of mathematical physics. *Byulleten' MGU. Sektsiya A*, 1938, vol. 1, no. 8, pp. 1–25 (in Russian).
10. Fursikov A.V. *Optimal control of distributed systems: Theory and applications.* Providence: AMS, 2000, 305 p. doi: 10.1090/MMONO/187187 . Original Russian text published in Fursikov A.V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami: Teoriya prilozheniya*, Novosibirsk: Nauchnaya kniga Publ., 1999, 352 p.
11. Chernov A.V. On overcoming the singularity of distributed control systems. In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference (29–31 May 2006) "Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi"*, part 2. Samara: Samara State Technical Univ., 2006, pp. 171–174 (in Russian).
12. Barbu V. Necessary conditions for distributed control problems governed by parabolic variational inequalities. *SIAM J. Control Optim.*, 1981, vol. 19, no. 1, pp. 64–86. doi: 10.1137/0319006 .
13. Fursikov A. Lagrange principle for problems of optimal control of ill-posed or singular distributed systems. *J. Math. Pures Appl.*, 1992, vol. 71, no. 2, pp. 139–195.
14. Rota G.-C., Strang W.G. A note on the joint spectral radius. *Indag. Math.*, 1960, vol. 63, pp. 379–381. doi: 10.1016/S1385-7258(60)50046-1 .
15. Shulman V.S., Turovskii Yu.V. Joint spectral radius, operator semigroups, and a problem of W. Wojtynski. *J. Funct. Anal.*, 2000, vol. 177, no. 2, pp. 383–441. doi: 10.1006/jfan.2000.3640 .
16. Sumin V. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 759–764. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.454 .

Received June 15, 2022
Revised July 15, 2022
Accepted July 18, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00199_a).

Vladimir Iosifovich Sumin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Nizhny Novgorod State University named after N. I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, 603950 Russia; Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: v_sumin@mail.ru .

Cite this article as: V. I. Sumin. Volterra functional equations in the theory of optimization of distributed systems. On the problem of singularity of controlled initial–boundary value problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 188–201.