ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.977

ТРАНСФИНИТНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ АБСТРАКТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

Д. А. Серков

Рассматривается игровая задача сближения движений абстрактной динамической системы с заданным целевым множеством внутри фазовых ограничений. В качестве “интервала” управления выступает произвольное подмножество вещественных чисел. Целевое множество $\mathcal{M}$ и фазовые ограничения $\mathcal{N}$ подчиняются вложению $\mathcal{M}\subset\mathcal{N}$. В качестве допустимых стратегий управления рассматриваются неупреждающие мультифункции от истории помехи. Приводятся описание множества разрешимости и конструкции разрешающих стратегий управления, построенные на основе метода программных итераций. При этом, увеличивая “количество” итераций оператора программного поглощения, удается расширить (по сравнению с оригинальной версией) области применимости метода, ослабляя или полностью отказываясь от топологических требований на динамику системы, целевое множество и фазовые ограничения. В предлагаемых конструкциях и их обосновании используется техника неподвижных точек монотонных отображений в частично упорядоченных множествах.

Ключевые слова: игровая задача сближения, программные итерации, абстрактная динамическая система, неупреждающие стратегии.

D. A. Serkov. Transfinite version of the program iteration method in a convergence game problem for an abstract dynamical system.

The game problem of convergence of motions is considered for an abstract dynamical system with a given target set inside the phase constraints. An arbitrary subset of real numbers acts as a time “interval.” The target set $\mathcal{M}$ and the phase constraints $\mathcal{N}$ obey the $\mathcal{M}\subset\mathcal{N}$ embedding. Nonanticipating multifunctions defined on the histories of disturbances are considered as admissible control strategies. A description of the solvability set and the construction of resolving control strategies based on the method of program iterations are given. At the same time, by increasing the “number” of iterations of the program absorption operator, it is possible to expand (compared to the original version of the method) the areas of applicability due to the weakening or complete rejection of the topological requirements to the system dynamics, the target set, and phase constraints. The proposed constructions and their justification use the technique of fixed points of monotone mappings in partially ordered sets.

Keywords: convergence game problem, program iterations, abstract dynamical system, non-anticipating strategies.

MSC: 37N35, 65J15, 47J25, 91A25

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-176-187

К 75-летию А.Г.Ченцова

Введение

В работе обсуждается игровая задача сближения [1; 2] движений динамической системы с целевым множеством в пределах фазовых ограничений; при этом “интервал” управления не предполагается конечным. Приводятся конструкции множества разрешимости задачи и разрешающих стратегий управления, построенные на основе метода программных итераций (см. [3–5], а также [6; 7]). Метод программных итераций, предложенный в середине 70-х годов прошлого века в пионерских работах А.Г. Ченцова и развитый другими исследователями,

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2022-874).

применяется в нескольких вариантах: для построения множества разрешимости в задачах качества, для построения цены в задачах оптимизации функционала, а также для построения разрешающих неупреждающих стратегий управления (прямая версия метода). В данной работе изучается игровая задача сближения для абстрактной динамической системы [8] (см. также [9–11]) при этом целью рассмотрения является ослабление условий применимости метода посредством привлечения трансфинитных итераций. Поводом для развития такого подхода и его распространения на задачи с ослабленными топологическими свойствами послужил факт существования неподвижных точек изотонных и сужающих операторов независимо от их топологических характеристик.

Данный подход был использован в игровой задаче удержания движений в заданных фазовых ограничениях [12]. Как видно из настоящей работы, формального переноса результатов [12] на задачу сближения получить не удалось, в частности, возникло дополнительное требование топологического характера (см. условие 4). В статье мы постарались сохранить преемственность в обозначениях с указанной работой, а также ограничились ссылками на содержащиеся в ней вспомогательные конструкции и результаты о неподвижных точках.

Дальнейший материал организован следующим образом. Вначале даются определение абстрактной динамической системы и ее основных свойств, используемых в утверждениях (условия 1–3), постановка задачи сближения — определяются допустимые процедуры управления (неупреждающие стратегии), целевое множество, множества фазовых ограничений и разрешимости задачи сближения (разд. 2); здесь же сформулировано условие 4 (топологического характера), связывающее динамику системы и целевое множество. Затем рассматриваются основные конструкций метода программных итераций: многозначное отображение Π (пучки движений, удовлетворяющих условию сближения), оператор программного поглощения и его степени (разд. 3), представление неподвижных точек этих операторов (лемма 3) и построенных на их основе неупреждающих стратегий (разд. 4); в разд. 5 доказывается теорема 1 о представлении множества разрешимости в задаче сближения и виде разрешающей стратегии.

1. Динамическая система

Обозначим через $\mathbb{R}$ — вещественную прямую; через B^A — отображения из A в B; через $\mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{P}'(X)$) — семейство всех (всех непустых) подмножеств всякого множества X. В качестве пространства позиций выберем непустое множество пар $D \triangleq \mathbf{I} \times X$, где $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ — аналог временного интервала, а X представляет фазовое пространство системы. Отметим, что такой выбор временного измерения позволяет охватить одновременно дискретные и непрерывные по времени динамические системы.

Если $t \in \mathbf{I}$, то $\mathbf{I}^t \triangleq \{\xi \in \mathbf{I} \mid \xi \leqslant t\}$ и $\mathbf{I}_t \triangleq \{\xi \in \mathbf{I} \mid \xi \geqslant t\}$. Если $t \in \mathbf{I}$ и $\theta \in \mathbf{I}_t$, то полагаем, что $\mathbf{I}_t^\theta \triangleq \mathbf{I}^\theta \cap \mathbf{I}_t$.

Выберем непустое множество $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(X^{\mathbf{I}})$, рассматриваемое в качестве допустимых траекторий системы. Пусть $Y \neq \varnothing$ и $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^{\mathbf{I}})$ — множество допустимых помех. Динамику системы задает отображение
$$\mathcal{S} : D \times \Omega \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C}), \tag{1.1}$$
которое при $(t, x) \in D$ и $\omega \in \Omega$ определяет множество $\mathcal{S}((t, x), \omega)$ траекторий $h \in \mathbf{C}$, имеющих начальную позиции (t, x) $(h(t) = x)$ и согласованных с помехой ω.

Далее при $t \in \mathbf{I}$, $h \in \mathbf{C}$ и $h' \in \mathbf{C}$ отображение $(h \square h')_t : \mathbf{I} \mapsto X$ (склейка h и h' в момент t) устанавливается соотношениями
$$(h \square h')_t(\xi) \triangleq \begin{cases} h(\xi), & \xi \in \mathbf{I}^t, \\ h'(\xi), & \xi \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\}. \end{cases}$$

Для произвольных $t \in \mathbf{I}$, $\omega \in \Omega$ и $\omega' \in \Omega$ определим отображение $(\omega \square \omega')^t : \mathbf{I} \mapsto Y$ (склейка ω

и ω' в момент t):

$$(\omega\square\omega')^t(\xi) \triangleq \begin{cases}\omega(\xi), & \xi \in \mathbf{I}^t,\\ \omega'(\xi), & \xi \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\}.\end{cases}$$

В терминах операций склейки мы формулируем свойства динамической системы, которые будут использованы при обосновании результатов.

Условие 1 (допустимость склейки движений). *Для любых* $(t,x) \in D$, $\tau \in \mathbf{I}_t$, $\omega,\omega' \in \Omega$ *выполняется*

$$\Big(\big((\omega\,|\,\mathbf{I}^\tau) = (\omega'\,|\,\mathbf{I}^\tau)\big)\ \&\ \big(h \in \mathcal{S}((t,x),\omega)\big)\ \&\ \big(h' \in \mathcal{S}((\tau,h(\tau)),\omega')\big)\Big) \Rightarrow \big((h\square h')_\tau \in \mathcal{S}((t,x),\omega')\big).$$

Условие 2 (допустимость склейки помех). *Для любых* $t \in \mathbf{I}$, $\omega,\omega' \in \Omega$ *выполняется включение* $(\omega\square\omega')^t \in \Omega$.

Условие 3 (полугрупповое свойство). *Для любых* $(t,x) \in D$, $\tau \in \mathbf{I}_t$, $\omega,\omega' \in \Omega$ *выполняется импликация* $\big(h \in \mathcal{S}((t,x),(\omega\square\omega')^\tau)\big) \Rightarrow \big(h \in \mathcal{S}((\tau,h(\tau)),\omega')\big)$.

2. Задача сближения

Введем класс допустимых процедур управления. Для всякой пары $(t,x) \in D$ обозначим через $\mathbb{M}_{(t,x)}$ множество неупреждающих непустозначных отображений вида

$$\mathbb{M}_{(t,x)} \triangleq \Big\{\alpha \in \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{P}'\left(\mathcal{S}((t,x),\omega)\right) \mid \forall\omega,\omega' \in \Omega\ \forall\xi \in \mathbf{I}_t \\ \big((\omega\,|\,\mathbf{I}^\xi) = (\omega'\,|\,\mathbf{I}^\xi)\big) \Rightarrow \big((\alpha(\omega)\,|\,\mathbf{I}^\xi) = (\alpha(\omega')\,|\,\mathbf{I}^\xi)\big)\Big\}; \quad (2.1)$$

через $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ для произвольного семейства $\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ обозначено множество отображений вида $\big\{x \in \big(\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha\big)^A \;\big|\; \forall\alpha \in A\ \ x(\alpha) \in X_\alpha\big\}$.
Будем рассматривать элементы множества $\mathbb{M}_{(t,x)}$ в качестве допустимых процедур управления, отвечающих начальной позиции (t,x).

Объектом исследования в этой работе является задача сближения — одна из двух задач, составляющих игру сближения–уклонения [2].

Пусть $\mathcal{N} \subset D$ — заданные фазовые ограничения и $\mathcal{M} \subset D$ — заданное целевое множество таковы, что

$$\varnothing \neq \mathcal{M} \subset \mathcal{N}. \quad (2.2)$$

Скажем, что задача сближения с $\mathcal{M}$ внутри $\mathcal{N}$ (*задача* $(\mathcal{M},\mathcal{N})$*-сближения*) разрешима для позиции $(t,x) \in D$, если найдется стратегия управления $\alpha_0 \in \mathbb{M}_{(t,x)}$ такая, что для любых $\omega \in \Omega$ и $h \in \alpha_0(\omega)$ выполнены *условия встречи*: существует $\tau \in \mathbf{I}_t$, для которого

$$\big((\tau,h(\tau)) \in \mathcal{M}\big)\ \&\ \big(\forall s \in \mathbf{I}_t^\tau\ \ (s,h(s)) \in \mathcal{N}\big). \quad (2.3)$$

Указанную стратегию управления α_0 мы назовем *разрешающей* для начальной позиции (t,x), а множество всех начальных позиций, для которых существуют разрешающие стратегии, обозначим через $\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ и назовем *множеством разрешимости* задачи $(\mathcal{M},\mathcal{N})$-сближения.

Далее будет дано описание множества разрешимости $\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ и разрешающих стратегий управления в задаче $(\mathcal{M},\mathcal{N})$-сближения.

Следующая лемма вытекает из введенных определений (см. (2.2), (2.3)) и равенства $(t,h(t)) = (t,x)$ для любого $h \in \mathcal{S}((t,x),\omega)$.

Лемма 1. *Для всех* $(t,x) \in \mathcal{M}$ *задача* $(\mathcal{M},\mathcal{N})$*-сближения разрешима. Задача* $(\mathcal{M},\mathcal{N})$*-сближения разрешима для позиции* $(t,x) \in D$ *лишь в случае, когда* $(t,x) \in \mathcal{N}$*. Таким образом, выполняются соотношения*

$$\mathcal{M} \subset \mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}. \tag{2.4}$$

Кроме того, отображение $\mathbf{AP}(\mathcal{M},\cdot) \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)}$ *изотонно*: *для любых* $H, H' \in \mathcal{P}(D)$

$$(H \subset H') \Rightarrow \big(\mathbf{AP}(\mathcal{M},H) \subset \mathbf{AP}(\mathcal{M},H')\big). \tag{2.5}$$

Условие 4 (относительной замкнутости $\mathcal{M}$). *Для любых* $(t,x) \in D$*,* $\omega \in \Omega$ *и* $h \in \mathcal{S}((t,x),\omega)$ *справедливо, что если множество* $\tau((t,x),h,\mathcal{M})$ *вида* $\tau((t,x),h,\mathcal{M}) \triangleq \{\xi \in \mathbf{I}_t \mid h(\xi) \in \mathcal{M}\}$ *не пусто, то в нем существует наименьший элемент*:

$$\big(\tau((t,x),h,\mathcal{M}) \neq \varnothing\big) \Rightarrow \Big(\big(\exists \underline{\tau} \in \tau((t,x),h,\mathcal{M})\big)\ \big(\forall \xi \in \tau((t,x),h,\mathcal{M})\big)\ \underline{\tau} \leqslant \xi\Big).$$

З а м е ч а н и е. В классической постановке задачи $(\mathcal{M},\mathcal{N})$-сближения для динамики, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением (см., например, [2, гл. III]), выполнение условия 4 обеспечено замкнутостью целевого множества $\mathcal{M}$ и непрерывностью по времени движений управляемой системы.

3. Оператор программного поглощения в задаче сближения

Введем оператор Π следующим образом: при $H \in \mathcal{P}(D)$, $(t,x) \in D$ и $\omega \in \Omega$ положим

$$\Pi(\omega|(t,x),H) \triangleq \Big\{h \in \mathcal{S}((t,x),\omega) \mid \exists \tau \in \mathbf{I}_t\ ((\tau,h(\tau)) \in \mathcal{M})\ \&\ \big(\forall s \in \mathbf{I}_t^{\tau}\ (s,h(s)) \in H\big)\Big\}. \tag{3.1}$$

Говоря неформально, $\Pi(\omega|(t,x),H)$ есть множество всех движений из $\mathcal{S}((t,x),\omega)$, удовлетворяющих условию встречи (2.3) в задаче $(\mathcal{M},H)$-сближения. Значит, задача $(\mathcal{M},H)$-сближения разрешима для позиции (t,x), если и только если

$$\mathbb{M}_{(t,x)} \cap \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}'(\Pi(\omega|(t,x),H)) \neq \varnothing.$$

Таким образом, для множества разрешимости $\mathbf{AP}(\mathcal{M},H)$ задачи $(\mathcal{M},H)$-сближения имеем представление (см. также (2.4))

$$\mathbf{AP}(\mathcal{M},H) = \Big\{(t,x) \in H\ \Big|\ \mathbb{M}_{(t,x)} \cap \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}'\left(\Pi(\omega|(t,x),H)\right) \neq \varnothing\Big\}. \tag{3.2}$$

Далее мы рассмотрим свойства отображений вида

$$\Omega \ni \omega \mapsto \Pi(\omega|(t,x),H) \in \mathcal{P}(\mathbf{C}) \tag{3.3}$$

при различных значениях параметров (t,x) и H, а также конструкций на их основе. Отметим сразу *изотонность* семейства отображений вида (3.3) по отношению к аргументу H: для любых $H, H' \subset \mathcal{N}$, $\omega \in \Omega$, $(t,x) \in H$ имеет место импликация

$$(H \subset H') \Rightarrow \big(\Pi(\omega|(t,x),H) \subset \Pi(\omega|(t,x),H')\big). \tag{3.4}$$

В терминах отображения Π (3.1) введем *оператор программного поглощения* $\mathbf{A}$ *в задаче* $(\mathcal{M},H)$*-сближения*, $\mathbf{A} : \mathcal{P}(D) \mapsto \mathcal{P}(D)$, следующим образом:

$$\mathbf{A}(H) \triangleq \big\{(t,x) \in H \mid \Pi(\omega|(t,x),H) \neq \varnothing\ \forall \omega \in \Omega\big\}\ \ \forall H \in \mathcal{P}(D). \tag{3.5}$$

Из определений и свойства (3.4) следует, что $\mathbf{A}$ — это *сужающее и изотонное* преобразование в $(\mathcal{P}(D), \subset)$: для любых F, $H \in \mathcal{P}(D)$

$$\mathbf{A}(H) \subset H, \tag{3.6}$$

$$(F \subset H) \Rightarrow (\mathbf{A}(F) \subset \mathbf{A}(H)). \tag{3.7}$$

Для произвольного порядкового числа α (см., например, [13, гл. 7]) введем и обозначим через $\mathbf{A}^\alpha$ α-итерацию (композицию степени α) оператора $\mathbf{A}$, следуя методу трансфинитной индукции: при $\alpha = 0$ для любого $H \in \mathcal{P}(D)$ положим

$$\mathbf{A}^0(H) \triangleq H; \tag{3.8}$$

если α имеет предшественника, $\alpha = \gamma + 1$, то для всякого $H \in \mathcal{P}(D)$ примем

$$\mathbf{A}^\alpha(H) \triangleq \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\gamma(H)\right); \tag{3.9}$$

если α — предельное порядковое число, то для любого $H \in \mathcal{P}(D)$ положим

$$\mathbf{A}^\alpha(H) \triangleq \mathbf{A}\Big(\bigcap_{\beta \prec \alpha} \mathbf{A}^\beta(H)\Big) \tag{3.10}$$

(символ “$\prec$” обозначает отношение строгого порядка между ординалами).

В лемме 2 доказательство соотношений (3.11), (3.12) следует по индукции (см. (3.8)–(3.10)) из свойств сужаемости и изотонности преобразования $\mathbf{A}$ (см. (3.6), (3.7)). Импликация (3.13) также доказывается по индукции исходя из включения $\mathcal{M} \in \mathbf{Fix}(\mathbf{A})$ и импликации (3.12); здесь и далее $\mathbf{Fix}(\mathbf{A})$ обозначает множество всех неподвижных точек оператора $\mathbf{A}$.

Лемма 2. *Для любого порядкового числа α оператор $\mathbf{A}^\alpha$ — это сужающее изотонное отображение: для всех F, $H \in \mathcal{P}(D)$ выполнены соотношения*

$$\mathbf{A}^\alpha(H) \subset H, \tag{3.11}$$

$$(F \subset H) \Rightarrow (\mathbf{A}^\alpha(F) \subset \mathbf{A}^\alpha(H)) \tag{3.12}$$

и, кроме того,

$$(\mathcal{M} \subset H) \Rightarrow (\mathcal{M} \subset \mathbf{A}^\alpha(H)). \tag{3.13}$$

Следуя [12, предложение 2] и опираясь на соотношения (3.11), (3.12), лемма 3 дает конструкцию неподвижных точек оператора программного поглощения $\mathbf{A}$.

Лемма 3. *Если мощность порядкового числа σ строго больше, чем мощность множества D, то $\mathbf{Fix}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}^\sigma(H) \colon H \in \mathcal{P}(D)\}$. При этом для всякого $H \in \mathcal{P}(D)$ наибольший элемент семейства $\mathbf{Fix}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{P}(H)$ имеет вид $\mathbf{A}^\sigma(H)$.*

4. Неупреждающие стратегии в задаче сближения

Обратимся к построению разрешающих стратегий, опираясь на конструкции [8].

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* 1 *и множество $H \in \mathcal{P}(D)$ таково, что $H \in \mathbf{Fix}(\mathbf{A})$. Тогда для всякой позиции $(t, x) \in H$ отображение $\Pi(\cdot|(t,x), H) \in \mathcal{P}(\mathbf{C})^\Omega$ есть допустимая стратегия управления*

$$\Pi(\cdot|(t,x), H) \in \mathbb{M}_{(t,x)}. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы имеем

$$\mathbf{A}(H) = H. \tag{4.2}$$

Выберем произвольно $(t, x) \in H$. Для краткости полагаем

$$\alpha(\cdot) \triangleq \Pi(\cdot|(t, x), H). \tag{4.3}$$

В этом случае отображение $\alpha : \Omega \mapsto \mathcal{P}(\mathbf{C})$ для любых $\omega \in \Omega$ и $h \in \alpha(\omega)$ удовлетворяет условию

$$\exists \tau \in \mathbf{I}_t \ ((\tau, h(\tau)) \in \mathcal{M}) \ \& \ (\forall s \in \mathbf{I}_t^\tau \ (s, h(s)) \in H) \tag{4.4}$$

и условию

$$\alpha(\omega) \subset \mathcal{S}((t, x), \omega) \ \ \forall \omega \in \Omega. \tag{4.5}$$

С учетом выбора (t, x) и (4.2) получаем $(t, x) \in \mathbf{A}(H)$. Поэтому (см. (3.5), (4.3))

$$\alpha(\omega) \neq \varnothing \ \ \forall \omega \in \Omega. \tag{4.6}$$

Проверим, что α — отображение неупреждающее. Для этого выберем $\omega, \omega' \in \Omega$ и $\theta \in \mathbf{I}_t$, удовлетворяющие

$$(\omega \mid \mathbf{I}^\theta) = (\omega' \mid \mathbf{I}^\theta), \tag{4.7}$$

и покажем, что тогда будет выполняться вложение

$$\big(\alpha(\omega) \,|\, \mathbf{I}^\theta\big) \subset \big(\alpha(\omega') \,|\, \mathbf{I}^\theta\big). \tag{4.8}$$

Пусть $\gamma \in \big(\alpha(\omega) \,|\, \mathbf{I}^\theta\big)$, т. е. для некоторого $h \in \alpha(\omega)$ имеем равенство $\gamma = (h \,|\, \mathbf{I}^\theta)$. Согласно (4.3), (4.4) $h \in \Pi(\omega|(t, x), H)$, иначе говоря, для движения h найдется момент $\tau_h \in \mathbf{I}_t$ такой, что

$$((\tau_h, h(\tau_h)) \in \mathcal{M}) \ \& \ (\forall s \in \mathbf{I}_t^{\tau_h} \ (s, h(s)) \in H). \tag{4.9}$$

Рассмотрим случай $\theta \leqslant \tau_h$. Тогда из (4.9) следует, что

$$(\theta, h(\theta)) \in H. \tag{4.10}$$

С учетом (3.5), (4.2) и (4.10) для всех $\nu \in \Omega$ имеем $\Pi(\nu|(\theta, h(\theta)), H) \neq \varnothing$. В частности, $\Pi(\omega'|(\theta, h(\theta)), H) \neq \varnothing$. Пусть

$$\tilde{h} \in \Pi(\omega'|(\theta, h(\theta)), H). \tag{4.11}$$

Исходя из этого $h \in \mathcal{S}((t, x), \omega)$ и $\tilde{h} \in \mathcal{S}((\theta, h(\theta)), \omega')$. Ввиду (4.7) из условия 1 получим, что

$$h' \triangleq (h \square \tilde{h})_\theta \in \mathcal{S}((t, x), \omega'). \tag{4.12}$$

Согласно (3.1), (4.11) и (4.12) для h' найдется момент $\tau_{h'} \in \mathbf{I}_\theta \subset \mathbf{I}_t$ такой, что

$$((\tau_{h'}, h'(\tau_{h'})) \in \mathcal{M}) \ \& \ (\forall s \in \mathbf{I}_\theta^{\tau_{h'}} \setminus \{\theta\} \ (s, h'(s)) \in H). \tag{4.13}$$

Кроме того, из (4.9), (4.12) и неравенства $\theta \leqslant \tau_h$ имеем

$$(s, h'(s)) \in H \qquad \forall s \in \mathbf{I}_t^\theta. \tag{4.14}$$

Из (4.14) и (4.13) имеем: для h' найдется $\tau_{h'} \in \mathbf{I}_t$ такой, что

$$\big((\tau_{h'}, h'(\tau_{h'})) \in \mathcal{M}\big) \ \& \ \big(\forall s \in \mathbf{I}_t^{\tau_{h'}} \ (s, h'(s)) \in H\big). \tag{4.15}$$

Из (3.1), (4.12) и (4.15) вытекает, что $h' \in \Pi(\omega'|(t, x), H)$ и, следовательно (см. (4.3)), $h' \in \alpha(\omega')$.

Пусть теперь $\theta > \tau_h$. Пользуясь (1.1) выберем $\tilde{h} \in \mathbf{C}$ из условия $\tilde{h} \in \mathcal{S}((\theta, h(\theta)), \omega')$. Тогда в соответствии с (4.7) и включением $h \in \mathcal{S}((t, x), \omega)$ из условия 1 выводим (4.12). Положим

$\tau_{h'} \triangleq \tau_h$. Для этого момента в силу (4.9), (4.12) и неравенства $\theta > \tau_h$ выполняются соотношения (4.15). Из (3.1), (4.3), (4.12) и (4.15) вновь получим включение $h' \in \alpha(\omega')$ (теперь для случая $\theta > \tau_h$).

Используя включение $h' \in \alpha(\omega')$ и (4.12), имеем

$$\gamma = (h' \,|\, \mathbf{I}^\theta) \in \big(\alpha(\omega') \,|\, \mathbf{I}^\theta\big).$$

Так как γ выбиралось произвольно, получаем вложение (4.8). В силу симметрии участия ω, ω' в рассуждениях справедливо $\big(\alpha(\omega) \,|\, \mathbf{I}^\theta\big) = \big(\alpha(\omega') \,|\, \mathbf{I}^\theta\big)$. Так как выбор θ, ω, ω' был произволен, получаем свойство неупреждаемости отображения α: для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\xi \in \mathbf{I}_t$

$$\big((\omega_1 \,|\, \mathbf{I}^\xi) = (\omega_2 \,|\, \mathbf{I}^\xi)\big) \Rightarrow \big(\big(\alpha(\omega_1) \,|\, \mathbf{I}^\xi\big) = \big(\alpha(\omega_2) \,|\, \mathbf{I}^\xi\big)\big). \tag{4.16}$$

Из (2.1), (4.5), (4.6), (4.16) следует $\alpha \in \mathbb{M}_{(t,x)}$ и (см. (4.3)) включение (4.1). □

Иначе говоря, согласно лемме (см. (3.2), (2.4)) для всякого $H \in \mathbf{Fix}(\mathbf{A})$ выполняется равенство $H = \mathbf{AP}(\mathcal{M}, H)$. Учитывая свойства сужаемости (3.11) и изотонности (2.5), а также представление неподвижных точек оператора $\mathbf{A}$ (см. лемму 3), мы приходим к вложению $\mathbf{A}^\sigma(H) \subset \mathbf{AP}(\mathcal{M}, H)$ для всякого $H \in \mathcal{P}(D)$. Отсюда, возвращаясь к исходной задаче $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-сближения, получим

$$\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) \subset \mathbf{AP}(\mathcal{M}, \mathcal{N}). \tag{4.17}$$

При этом (см. лемму 3) элемент $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ — наибольший в семействе $\mathbf{Fix}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N})$.

Заметим также, что для $(t, x) \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ в виде $\Pi(\cdot|(t, x), \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}))$ мы имеем явное представление разрешающей стратегии управления. Множество $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ при наличии этих свойств называют *стабильным мостом* в задаче сближения [2].

5. Максимальный стабильный мост

Теорема 1 устанавливает, что вложение (4.17) на самом деле является равенством, т. е. за пределами стабильного моста $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ задача $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-сближения не разрешима. Такой стабильный мост обычно называют *максимальным.* Доказательство теоремы 1 в идейном плане следует доказательству утверждения [14, теорема 2], при этом требования топологического характера на целевое множество, фазовые ограничения и на динамику системы сводятся к условию 4. Условия 1–3 носят абстрактно-динамический характер, а условие на ординал σ отсылает к лемме 3.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1–4 *и ординал σ таков, что $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) \in \mathbf{Fix}(\mathbf{A})$. Тогда $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ есть множество разрешимости задачи $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-сближения:*

$$\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) = \mathbf{AP}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \Big\{(t, x) \in \mathcal{N} \mid \mathbb{M}_{(t,x)} \cap \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}'\left(\Pi(\omega|(t, x), \mathcal{N})\right) \neq \varnothing\Big\}; \tag{5.1}$$

при этом для всякой начальной позиции $(t, x) \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ отображение

$$\Pi(\cdot|(t, x), \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})) : \Omega \mapsto \mathbf{C}$$

есть разрешающая стратегия управления.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обоснование второй части теоремы содержит лемма 4.

С учетом вложения (4.17) для доказательства теоремы достаточно установить вложение

$$\mathbf{AP}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \subset \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}). \tag{5.2}$$

Так как $\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$, $\mathbf{A}^0(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ (см. (2.4), (3.8)), имеем

$$\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset \mathbf{A}^0(\mathcal{N}). \tag{5.3}$$

Пусть вообще ординал ζ таков, что для всех ординалов ξ, для которых $\xi \prec \zeta$, выполняется

$$\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset \mathbf{A}^\xi(\mathcal{N}). \tag{5.4}$$

Если ζ — предельный ординал, то с учетом (5.4) выводим $\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset \bigcap_{\xi\prec\zeta} \mathbf{A}^\xi(\mathcal{N})$ и остается показать (см. (3.10)), что

$$\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset \mathbf{A}\left(\bigcap_{\xi\prec\zeta} \mathbf{A}^\xi(\mathcal{N})\right) \triangleq \mathbf{A}^\zeta(\mathcal{N}). \tag{5.5}$$

Если же ζ имеет предшествующий ординал, $\zeta = \eta + 1$, то, исходя из $\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N})$, следует проверить (см. (3.9)), что выполнено вложение

$$\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset \mathbf{A}(\mathbf{A}^\eta(\mathcal{N})) \triangleq \mathbf{A}^\zeta(\mathcal{N}). \tag{5.6}$$

В обоих случаях надлежит в предположении

$$\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset F \subset \mathcal{N} \tag{5.7}$$

установить вложение $\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset \mathbf{A}(F)$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить импликацию

$$(\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset F \subset \mathcal{N}) \Rightarrow (\mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \subset \mathbf{A}(F)).$$

Отметим, что в силу (2.2) и (3.13) в дополнение к (5.7) выполнено также вложение

$$\mathcal{M} \subset F. \tag{5.8}$$

Рассуждая от противного, предположим, что справедливы соотношения (5.7), (5.8) и найдена позиция (t_*, x_*) такая, что

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \setminus \mathbf{A}(F). \tag{5.9}$$

Тогда из (5.7) вытекает, что $(t_*, x_*) \in F \setminus \mathbf{A}(F)$. Следовательно (см. (3.5)), для (t_*, x_*) и F найдется $\omega_* \in \Omega$ такая, что

$$\Pi(\omega_*|(t_*, x_*), F) = \varnothing. \tag{5.10}$$

Из (3.1) и (5.10) получим, что

$$\forall s \in \mathcal{S}((t_*, x_*), \omega_*)\ s \notin \Pi(\omega_*|(t_*, x_*), F). \tag{5.11}$$

С другой стороны (см. (5.9)), $(t_*, x_*) \in \mathbf{AP}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ и, значит (см. (3.2)), найдется отображение $\alpha_* \in \mathbf{C}^\Omega$ такое, что

$$\alpha_* \in \mathbb{M}_{(t_*,x_*)} \bigcap \prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{P}'\left(\Pi(\omega|(t_*, x_*), \mathcal{N})\right).$$

То есть отображение α_* есть допустимая процедура управления:

$$\alpha_* \in \mathbb{M}_{(t_*,x_*)} \tag{5.12}$$

и, одновременно, α_* разрешает задачу $(\mathcal{M},\mathcal{N})$-сближения для начальной позиции $(t_*, x_*) \in \mathcal{N}$:

$$\alpha_*(\omega) \subset \Pi(\omega|(t_*, x_*), \mathcal{N})\ \ \forall \omega \in \Omega. \tag{5.13}$$

В частности,

$$\alpha_*(\omega_*) \subset \Pi(\omega_*|(t_*, x_*), \mathcal{N}). \tag{5.14}$$

Так как (см. (5.12)) $\alpha_*(\omega_*) \neq \varnothing$, выберем произвольно

$$s_* \in \alpha_*(\omega_*). \tag{5.15}$$

Тогда (см. (2.1), (3.1), (5.14) и (5.15)) для некоторого момента $\tau \in \mathbf{I}_{t_*}$ имеем включение $(\tau, s_*(\tau)) \in \mathcal{M}$. Значит, множество $\boldsymbol{\tau}((t_*, x_*), s_*, \mathcal{M}) \subset \mathbf{I}_{t_*}$ не пусто и по условию 4 существует наименьший элемент τ_* множества $\boldsymbol{\tau}((t_*, x_*), s_*, \mathcal{M})$. Для момента τ_* по определению выполняется включение

$$(\tau_*, s_*(\tau_*)) \in \mathcal{M}. \tag{5.16}$$

Из (5.16) и соотношений (3.1), (5.11) следует, что существует момент $t^* \in \mathbf{I}_{t_*}^{\tau_*} \setminus \{\tau_*\}$, для которого выполнено

$$(t^*, s_*(t^*)) \in \mathcal{N} \setminus F. \tag{5.17}$$

При этом (см. (5.8), (5.17)), $(t^*, s_*(t^*)) \notin \mathcal{M}$ и, значит, верно неравенство $t^* < \tau_*$. Тогда, так как для всякого $\xi \in \boldsymbol{\tau}((t_*, x_*), s_*, \mathcal{M})$ справедливо $t^* < \tau_* \leqslant \xi$, имеем

$$(t, s_*(t)) \notin \mathcal{M} \quad \forall t \in \mathbf{I}^{t^*}. \tag{5.18}$$

Из (5.7) и (5.17) вытекает, что $(t^*, s_*(t^*)) \notin \mathbf{AP}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Тогда согласно определению $\mathbf{AP}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

$$\mathbb{M}_{(t^*, s_*(t^*))} \bigcap \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}'\left(\Pi(\omega|(t^*, s_*(t^*)), \mathcal{N})\right) = \varnothing. \tag{5.19}$$

С учетом условия 2 корректно определено отображение $\beta \in \mathcal{P}(\mathbf{C})^{\Omega}$ вида

$$\beta(\omega) \triangleq \left\{h \in \alpha_*((\omega_* \Box \omega)^{t^*}) \mid (h \,|\, \mathbf{I}^{t^*}) = (s_* \,|\, \mathbf{I}^{t^*})\right\} \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{5.20}$$

Покажем включение $\beta \in \mathbb{M}_{(t^*, s_*(t^*))}$. Для этого сначала проверим, что

$$\beta(\omega) \neq \varnothing \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{5.21}$$

Из (2.1), (5.12) и (5.15) следует, что для произвольного $\omega' \in \Omega$ найдется $h' \in \alpha_*((\omega_* \Box \omega')^{t^*})$ такое, что $(h' \,|\, \mathbf{I}^{t^*}) = (s_* \,|\, \mathbf{I}^{t^*})$. Это означает (см. (5.20)), что $h' \in \beta(\omega')$. Так как выбор ω' был произвольным, выполнено неравенство (5.21).

Для любых $\tilde{\omega} \in \Omega$ и $\tilde{h} \in \beta(\tilde{\omega})$ из определений α_*, β имеем (2.1), что $\tilde{h} \in \mathcal{S}((t_*, x_*), (\omega_* \Box \tilde{\omega})^{t^*})$. Тогда согласно условию 3 выводим $\tilde{h} \in \mathcal{S}((t^*, \tilde{h}(t^*)), \tilde{\omega})$. Отсюда, так как $\tilde{h}(t^*) = s_*(t^*)$, получим соотношения $\tilde{h} \in \mathcal{S}((t^*, s_*(t^*)), \tilde{\omega})$. В силу произвольного выбора $\tilde{\omega}$, $\tilde{h}$ из этих соотношений с учетом (5.21) следует

$$\beta(\omega) \in \mathcal{P}'\left(\mathcal{S}((t^*, s_*(t^*)), \omega)\right) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{5.22}$$

Проверим свойство неупреждаемости отображения β: зафиксируем произвольно $\theta \in \mathbf{I}_{t^*}$ и $\omega, \omega' \in \Omega$ такие, что $(\omega \,|\, \mathbf{I}^{\theta}) = (\omega' \,|\, \mathbf{I}^{\theta})$. Выберем $\gamma \in \boldsymbol{(}\beta(\omega) \,|\, \mathbf{I}^{\theta}\boldsymbol{)}$. Пусть $f \in \beta(\omega)$ таков, что $\gamma = (f \,|\, \mathbf{I}^{\theta})$. Тогда исходя из (5.20) $f \in \alpha((\omega_* \Box \omega)^{t^*})$ и

$$(f \,|\, \mathbf{I}^{t^*}) = (s_* \,|\, \mathbf{I}^{t^*}). \tag{5.23}$$

С учетом условия 2 имеем $(\omega_* \Box \omega)^{t^*} \in \Omega$ и $(\omega_* \Box \omega')^{t^*} \in \Omega$, причем справедливы равенства

$$((\omega_* \Box \omega)^{t^*} \,|\, \mathbf{I}^{\theta}) = ((\omega_* \Box \omega')^{t^*} \,|\, \mathbf{I}^{\theta}). \tag{5.24}$$

Из (5.24) в силу (5.12) получим

$$\boldsymbol{(}\alpha_*((\omega_* \Box \omega)^{t^*}) \,|\, \mathbf{I}^{\theta}\boldsymbol{)} = \boldsymbol{(}\alpha_*((\omega_* \Box \omega')^{t^*}) \,|\, \mathbf{I}^{\theta}\boldsymbol{)}.$$

Следовательно, для f найдется $f' \in \alpha_*((\omega_* \square \omega')^{t^*})$ такой, что

$$(f \,|\, \mathbf{I}^\theta) = (f' \,|\, \mathbf{I}^\theta). \tag{5.25}$$

В частности (см. (5.23)), поскольку $\theta \geqslant t^*$, имеем равенство $(f' \,|\, \mathbf{I}^{t^*}) = (s_* \,|\, \mathbf{I}^{t^*})$. Следовательно (см. (5.20)), $f' \in \beta(\omega')$ и при этом (см. (5.23), (5.25)) $\gamma = (f' \,|\, \mathbf{I}^\theta)$. Отсюда заключаем, что $\gamma \in \big(\beta(\omega') \,|\, \mathbf{I}^\theta\big)$, и ввиду произвольного выбора γ имеем вложение $\big(\beta(\omega) \,|\, \mathbf{I}^\theta\big) \subset \big(\beta(\omega') \,|\, \mathbf{I}^\theta\big)$. Из соображений симметрии выполнено также обратное вложение и, как следствие, равенство $\big(\beta(\omega) \,|\, \mathbf{I}^\theta\big) = \big(\beta(\omega') \,|\, \mathbf{I}^\theta\big)$. Так как выбор ω, ω' и θ был произвольным, имеем: для любых $\omega, \omega' \in \Omega$ и $t \in \mathbf{I}_{t^*}$ справедлива импликация

$$((\omega \,|\, \mathbf{I}^t) = (\omega' \,|\, \mathbf{I}^t)) \Rightarrow \Big(\big(\beta(\omega) \,|\, \mathbf{I}^t\big) = \big(\beta(\omega') \,|\, \mathbf{I}^t\big)\Big). \tag{5.26}$$

Из (2.1), (5.22) и (5.26) следует включение $\beta \in \mathbb{M}_{(t^*, s_*(t^*))}$.

Значит (см. (5.19)),

$$\beta \notin \prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}'\left(\Pi(\omega | (t^*, s_*(t^*)), \mathcal{N})\right),$$

т. е. найдутся $\bar{\omega} \in \Omega$ и $\bar{s} \in \beta(\bar{\omega})$ такие, что

$$\bar{s} \notin \Pi(\bar{\omega} | (t^*, s_*(t^*)), \mathcal{N}). \tag{5.27}$$

С другой стороны, по построению β (см. (5.20)) имеем $\bar{s} \in \alpha_*((\omega_* \square \bar{\omega})^{t^*})$, где $(\omega_* \square \bar{\omega})^{t^*} \in \Omega$. Тогда в соответствии с выбором α_* следует (см. (5.13)), что $\bar{s} \in \Pi((\omega_* \square \bar{\omega})^{t^*} | (t_*, x_*), \mathcal{N})$ и, в частности (см. (3.1)),

$$\exists \bar{\tau} \in \mathbf{I}_{t_*} \ ((\bar{\tau}, \bar{s}(\bar{\tau})) \in \mathcal{M}) \ \& \ (\forall t \in \mathbf{I}_{t_*}^{\bar{\tau}} \ (t, \bar{s}(t)) \in \mathcal{N}). \tag{5.28}$$

Учитывая (см. (5.20)), что $(\bar{s} \,|\, \mathbf{I}^{t^*}) = (s_* \,|\, \mathbf{I}^{t^*})$ из (5.18) получим $(t, \bar{s}(t)) \notin \mathcal{M}\ \forall t \in \mathbf{I}^{t^*}$. Тогда из соотношений (5.28) вытекает положение

$$\exists \bar{\tau} \in \mathbf{I}_{t^*} \ ((\bar{\tau}, \bar{s}(\bar{\tau})) \in \mathcal{M}) \ \& \ (\forall t \in \mathbf{I}_{t^*}^{\bar{\tau}} \ (t, \bar{s}(t)) \in \mathcal{N}). \tag{5.29}$$

Из включения $\bar{s} \in \beta(\bar{\omega})$ также следует (см. (5.22))

$$\bar{s} \in \mathcal{S}((t^*, s_*(t^*)), \bar{\omega}). \tag{5.30}$$

Соотношения (5.29), (5.30) в совокупности дают включение

$$\bar{s} \in \Pi(\bar{\omega} | (t^*, s_*(t^*)), \mathcal{N}),$$

которое противоречит утверждению (5.27).

Таким образом, предположение (5.9) было ложным и выполняется следствие искомой импликации, т. е. вложения (5.5) и (5.6). Из соотношений (5.3), (5.6) и (5.5) в силу принципа трансфинитной индукции вытекает, что вложение $\mathbf{AP}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \subset \mathbf{A}^\zeta(\mathcal{N})$ выполняется для произвольного ординала ζ. При $\zeta = \sigma$ получаем вложение (5.2) и, как следствие, искомое равенство (5.1). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Vol. 34, № 6. P. 1005–1022.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 p.
3. **Ченцов А.Г.** О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Vol. 224, № 6. P. 1272–1275.

4. **Ченцов А.Г.** К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Vol. 226, № 1. P. 73–76.
5. **Дятлов В.П., Ченцов А.Г.** Монотонные итерации множеств и их приложения к игровым задачам управления // Кибернетика. 1987. № 2. P. 92–99.
6. **Ухоботов В.И.** Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Vol. 41, № 2. P. 358–364.
7. **Чистяков С.В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Vol. 41, № 5. P. 825–832.
8. **Ченцов А.Г.** Метод программных итераций для решения абстрактной задачи удержания // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. P. 157–169.
9. **Барбашин Е.А.** К теории обобщенных динамических систем // Уч. записки Моск. ун-та. 1949. С. 110–133.
10. **Roxin E.** Stability in general control systems // J. Diff. Eq. 1965. Vol. 1. P. 115–150.
11. **Байдосов В.А.** О подходе к определению динамических игр на языке обобщенных динамических систем // Оптимальное управление системами с неопределенной информацией / ред. В. А. Байдосов, А. И. Субботин. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1980. С. 3–11.
12. **Серков Д.А.** Трансфинитные последовательности в методе программных итераций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Vol. 23, № 1. P. 228–240.
13. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 p.
14. **Серков Д.А., Ченцов А.Г.** Метод программных итераций и операторная выпуклость в абстрактной задаче удержания // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Vol. 25, № 3. P. 348–366.

Поступила 1.06.2022
После доработки 11.07.2022
Принята к публикации 18.07.2022

Серков Дмитрий Александрович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: serkov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9 .
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnye differencial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow: Nauka Publ., 1974, 458 p.
3. Chentsov A.G. The structure of a certain game-theoretic approach problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 224, no. 6, pp. 1272–1275 (in Russian).
4. Chentsov A.G. On a game problem of guidance. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
5. Dyatlov V.P., Chentsov A.G. Monotone iterations of sets and their applications to control games. *Cybernetics*, 1987, vol. 23, no. 2, pp. 259–268. doi: 10.1007/BF01071786 .
6. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354. doi: 10.1016/0021-8928(77)90021-1 .
7. Chistyakov S.V. On solutions for game problems of pursuit. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 825–832 (in Russian).
8. Chentsov A.G. An abstract confinement problem: a programmed iterations method of solution. *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 2, pp. 299–310. doi: 10.1023/B:AURC.0000014727.63912.45 .
9. Barbashin E.A. Towards the theory of generalized dynamical systems. *Uchenye Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 1949, pp. 110–133 (in Russian).
10. Roxin E. Stability in general control systems. *J. Diff. Eq.*, 1965, vol. 1, pp. 115–150.
11. Baidosov V.A. Approach to the definition of dynamical games in terms of generalized dynamical systems. In: *Optimal control of systems with uncertain information* , eds. V.A. Baidosov, A.I. Subbotin, Sverdlovsk: Ural. Nauchn. Tsentr Akad. Nauk SSSR Publ., 1980, pp. 3–11 (in Russian) .

12. Serkov D.A. Transfinite sequences in the method of programmed iterations. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 300, suppl. 1, pp. 153–164. doi: 10.1134/S0081543818020153 .
13. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* Warszawa: PWN — Polish Scientific Publishers, 1968, 417 p. ISBN: 9780444534170 . Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir Publ., 1970, 416 p.
14. Serkov D.A., Chentsov A.G. Programmed iteration method and operator convexity in an abstract retention problem. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 348–366 (in Russian).

Received June 1, 2022
Revised July 11, 2022
Accepted July 18, 2022

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2022-874).

Dmitrii Aleksandrovich Serkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: serkov@imm.uran.ru .

Cite this article as: D. A. Serkov. Transfinite version of the program iteration method in a convergence game problem for an abstract dynamical system. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 176–187.