ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.5

МНОГОЧЛЕНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ, С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ[1]

А. Э. Пестовская

Рассмотрена задача Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля на компакте K с ограничением на расположение корней многочленов, а именно, на множестве $\mathcal{P}_n(G)$ многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом, не обращающихся в нуль в открытом множестве G. Получено точное решение для $K = [-1, 1]$ и $G = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$, $R \geq \varrho_n$, где ϱ_n — определенная величина, такая что $\varrho_n^2 \leq (\sqrt{5} - 1)/2$. Для случая $\operatorname{Conv} K \subset \overline{G}$ проведена редукция задач к аналогичным задачам для множества алгебраических многочленов, имеющих все нули на границе ∂G множества G. Вводится понятие постоянной Чебышева $\tau(K, G)$ компакта K относительно открытого множества G, получены двусторонние оценки величины $\tau(K, G)$.

Ключевые слова: многочлен Чебышева компакта; постоянная Чебышева компакта; ограничения на нули многочлена.

A. E. Pestovskaya. Polynomials least deviating from zero with a constraint on the location of roots.

We consider Chebyshev's problem on polynomials least deviating from zero on a compact set K with a constraint on the location of their roots. More exactly, the problem is considered on the set $\mathcal{P}_n(G)$ of polynomials of degree n that have unit leading coefficient and do not vanish on an open set G. An exact solution is obtained for $K = [-1, 1]$ and $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $R \geq \varrho_n$, where ϱ_n is a number such that $\varrho_n^2 \leq (\sqrt{5} - 1)/2$. In the case $\operatorname{Conv} K \subset \overline{G}$, the problem is reduced to similar problems for the set of algebraic polynomials all of whose roots lie on the boundary ∂G of the set G. The notion of Chebyshev constant $\tau(K, G)$ of a compact set K with respect to a compact set G is introduced, and two-sided estimates are found for $\tau(K, G)$.

Keywords: Chebyshev polynomial of a compact set, Chebyshev constant of a compact set; constraints on the roots of a polynomial.

MSC: 30C10, 41A10, 30A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-166-175

1. Постановка и обсуждение задачи

Пусть K — непустое компактное множество комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\operatorname{Conv} K$ — его выпуклая оболочка; G — открытое множество, $G \neq \mathbb{C}$; $\overline{G}$ — замыкание множества G. Пусть $D_R := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ — открытый круг с центром в точке нуль радиуса $R > 0$. При $R = 1$ для открытого единичного круга используем обозначение D.

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество алгебраических многочленов (точной) степени n с комплексными коэффициентами и со старшим коэффициентом, равным единице. Многочлен p_n из $\mathcal{P}_n$ однозначно задается своими корнями z_k, $k = \overline{1, n}$, равенством $p_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$. Через $\mathcal{P}_n(G)$ обозначим множество алгебраических многочленов из $\mathcal{P}_n$, не обращающихся в нуль на множестве G: $\mathcal{P}_n(G) := \{p_n \in \mathcal{P}_n \colon p_n(z) \neq 0, z \in G\}$. Для равномерной нормы многочлена используем обозначение $\|p_n\| := \|p_n\|_{C(K)} = \max\{|p_n(z)|\colon z \in K\}$.

Существует и единственен (в случае, когда K содержит не менее $n+1$ точки) многочлен T_n с минимальной среди всех многочленов из $\mathcal{P}_n$ нормой на компакте K

$$\|T_n\| = \min\{\|p_n\|\colon p_n \in \mathcal{P}_n\}.$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00526, https://rscf.ru/project/22-21-00526/ .

Многочлен T_n называется *многочленом Чебышева степени n для компакта K*. Через $\tau_n(K)$ обозначим его норму, $\tau_n(K) := \|T_n\|$.

Задачу об алгебраических многочленах, наименее уклоняющихся от нуля на компакте в равномерной норме, поставил и решил П. Л. Чебышев в 1854 г. [1] в случае $K = [-1, 1]$. Задаче Чебышева посвящена обширная литература (см. монографии [2;3], статьи [4–7] и приведенную в них библиографию); в том числе ее обобщениям для различных норм, рациональных дробей, тригонометрических полиномов и для тригонометрических рациональных дробей.

С многочленами Чебышева связана важная характеристика компакта

$$\tau(K) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tau_n(K)} \tag{1.1}$$

— *постоянная Чебышева компакта K*. Для постоянной Чебышева компакта K имеют место замечательные равенства $\tau(K) = d(K) = c(K)$, связывающие ее с трансфинитным диаметром $d(K)$ и гармонической (логарифмической) емкостью $c(K)$ компакта K (теорема Фекете — Сеге; см. [2, гл. VII, §1,3]).

В настоящей работе исследуются многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на компакте K (имеющие минимальную норму на K) среди всех многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$, т. е. не обращающиеся в нуль на множестве G. Определим *величину наименьшего уклонения от нуля многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$ на компакте K* равенством

$$\tau_n(K, G) := \min\left\{\|p_n\| \colon p_n \in \mathcal{P}_n(G)\right\}. \tag{1.2}$$

Величину, аналогичную (1.1), описываемую равенством

$$\tau(K, G) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tau_n(K, G)}, \tag{1.3}$$

будем называть *постоянной Чебышева компакта K относительно множества G*. Задача состоит в нахождении величины (1.2) и многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$, наименее уклоняющихся от нуля на компакте K, т. е. многочленов, на которых в (1.2) достигается минимум, а также в вычислении величины (1.3) — постоянной Чебышева компакта K относительно множества G.

Корректность определений (1.2), (1.3) вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Для произвольных компакта K и открытого множества G справедливы утверждения*

(1) *минимум в* (1.2) *достигается*;

(2) *существует предел последовательности* $\sqrt[n]{\tau_n(K, G)}$.

Доказательство утверждений теоремы 1 проводится по известным схемам (см., например, [2, гл. VII, §1]) с учетом ограничений на расположение корней многочленов. Пусть $p_{n,k}$ — последовательность многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$, предел норм которых равен $\tau_n(K, G)$. Из представления $p_{n,k}$ по формуле Лагранжа

$$p_{n,k}(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{n,k}(\xi_s) l_s(z), \quad l_s(z) = \prod_{j=0, j\neq s}^{n} \frac{z - \xi_j}{\xi_s - \xi_j},$$

где ξ_j, $j = \overline{0, n}$, — фиксированный набор точек из K, следует равномерная ограниченность последовательности $p_{n,k}$ на любом ограниченном множестве из $\mathbb{C}$. По принципу компактности (сгущения) в теории аналитических функций существует равномерно сходящаяся внутри $\mathbb{C}$ подпоследовательность. Из сходимости коэффициентов многочленов подпоследовательности следует, что предельная аналитическая функция есть многочлен. Наконец, используя непрерывность корней многочленов как функций коэффициентов и замкнутость $\mathbb{C} \setminus G$, заключаем, что предельный многочлен принадлежит $\mathcal{P}_n(G)$. Утверждение (1) доказано.

Перейдем к доказательству существования предела последовательности $a_n := \sqrt[n]{\tau_n(K,G)}$. Последовательность a_n является ограниченной. Действительно, пусть $z_0 \in \partial G$, $d := d(z_0,K) = \max\{|z-z_0|\colon z \in K\}$ и $r_n(z) := (z-z_0)^n$. Тогда справедливы неравенства $0 \le a_n \le \sqrt[n]{\|r_n\|} = d$. Поскольку последовательность a_n ограничена, то у нее существуют конечные нижний $\alpha := \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ и верхний $\beta := \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ пределы. Ясно, что $\alpha \le \beta$. Покажем, что $\alpha \ge \beta$.

Для произвольных $k,l,n \in \mathbb{N}$ рассмотрим многочлен $q(z) := r_l(z)(p_n^*(z))^k$, где $p_n^*(z)$ — экстремальный в (1.2) многочлен из $\mathcal{P}_n(G)$ и $r_l(z) := (z-z_0)^l$. Тогда $q \in \mathcal{P}_{nk+l}(G)$ и верны соотношения

$$a_{nk+l}^{nk+l} \le \|q\| \le \|r_l\| a_n^{nk} = d^l a_n^{nk}.$$

Отсюда, извлекая корень степени $nk+l$, получим

$$a_{nk+l} \le d^{\frac{l}{nk+l}} a_n^{\frac{nk}{nk+l}}.$$

Так как α — это нижний предел последовательности a_n, то при любом положительном ε найдется номер $n = n(\varepsilon)$, для которого справедливо $a_n < \alpha+\varepsilon$. Соответственно, поскольку β — это верхний предел последовательности a_n, то найдется подпоследовательность a_{n_ν},такая, что $\beta = \lim\limits_{\nu\to\infty} a_{n_\nu}$. Поделив n_ν на $n = n(\varepsilon)$ с остатком, получим представление $n_\nu = nk_\nu + l_\nu$, $l_\nu < n$ и неравенство

$$a_{n_\nu} \le d^{\frac{l_\nu}{nk_\nu+l_\nu}} (\alpha+\varepsilon)^{\frac{nk_\nu}{nk_\nu+l_\nu}}.$$

Перейдем к пределу при $\nu \to \infty$ (тогда и $k_\nu \to \infty$). Ввиду того что n фиксировано, а l_ν ограниченная, для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем неравенство $\beta \le \alpha+\varepsilon$ и, следовательно, $\beta \le \alpha$.

Теорема полностью доказана.

Свойства наименее уклоняющихся от нуля многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$, величин наименьшего уклонения (1.2) и постоянной Чебышева (1.3) при ограничениях несколько отличны от классических. В частности, для конечных компактов при достаточно больших n можно утверждать, что $\tau_n(K) = 0$ и, как следствие, $\tau(K) = 0$. Для величин (1.2) и (1.3) уже в случае одноточечного компакта $K = \{\zeta_0\} \subset G$, как нетрудно понять, справедливы равенства

$$\tau_n(\zeta_0, G) = \rho^n(\zeta_0, \partial G), \quad \tau(\zeta_0, G) = \rho(\zeta_0, \partial G),$$

где $\rho(\zeta_0, \partial G) = \min\{|\zeta_0 - \zeta|\colon \zeta \in \partial G\}$ — расстояние от точки ζ_0 до границы множества G.

Заметим также, что в отличие от многочленов Чебышева компакта K экстремальный многочлен в (1.2) (как это будет видно из дальнейшего), вообще говоря, не единственный.

Известно [8, гл. I, § 3, п. 4], что корни многочленов Чебышева компакта K принадлежат его выпуклой оболочке $\operatorname{Conv} K$. Поэтому в случае, когда $\operatorname{Conv} K$ и G не пересекаются, имеют место равенства $\tau_n(K,G) = \tau_n(K)$ и $\tau(K,G) = \tau(K)$. Изучение величин (1.2) и (1.3) представляет интерес для случая $(\operatorname{Conv} K) \bigcap G \ne \varnothing$.

Исследования экстремальных свойств алгебраических многочленов с ограничением на расположение нулей начались, по-видимому, с работы П. Турана 1939 г. [9], посвященной неравенствам, дающим оценку снизу нормы производной многочлена через норму самого многочлена. Подробную историю исследований таких неравенств можно найти в статьях [10; 11].

В 1947 г. П. Лакс [12] доказал гипотезу П. Эрдеша. Утверждение состоит в том, что в классическом неравенстве Бернштейна

$$\|p_n'\|_{C(D)} \le n\,\|p_n\|_{C(D)}, \quad p_n \in \mathcal{P}_n,$$

рассмотренном на множестве $\mathcal{P}_n(D)$ многочленов, не обращающихся в нуль в единичном круге, точная (наименьшая) константа в два раза меньше (равна $n/2$), т. е. справедливо неравенство

$$\|p_n'\|_{C(D)} \le \frac{n}{2}\,\|p_n\|_{C(D)}, \quad p_n \in \mathcal{P}_n(D).$$

Неравенство обращается в равенство на произвольном многочлене, имеющем все свои корни на единичной окружности. Используя это неравенство и ($n-1$ раз) классическое неравенство Бернштейна без ограничений на корни, приходим к цепочке соотношений

$$\|p_n\|_{C(D)} \geq \frac{2}{n}\,\|p_n'\|_{C(D)} \geq \frac{2}{n(n-1)}\,\|p_n''\|_{C(D)} \geq \ldots \geq \frac{2}{n!}\,\|p_n^{(n)}\|_{C(D)} = \frac{2n!}{n!} = 2, \quad p_n \in \mathcal{P}_n(D).$$

Отсюда получаем равенства $\tau_n(\overline{D}, D) = 2$, $\tau(\overline{D}, D) = 1$. Здесь экстремальными являются многочлены вида $z^n + \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$.

В работе Р. Р. Акопяна [13, теорема 2] найдены многочлены из $\mathcal{P}_n(D_R)$, $R > 0$, наименее уклоняющиеся от нуля на единичной окружности относительно L^p-норм, $0 \leq p \leq \infty$ (средних, при $0 \leq p < 1$). Точнее, показано, что это многочлены вида $z^n + \varepsilon R^n$, $|\varepsilon| = 1$. Отсюда, в частности, следует, что для величин (1.2) и (1.3) справедливы равенства

$$\tau_n(\overline{D}, D_R) = 1 + R^n, \quad \tau(\overline{D}, D_R) = \max\{1, R\}, \quad R > 0.$$

Точное неравенство Бернштейна на множестве многочленов $\mathcal{P}_n(D)$ относительно L^p-норм на единичной окружности получено в работах П. Лакса [12] ($p = 2, \infty$), Н. Де Брюйна [14] ($1 \leq p < \infty$), К. Рахмана и Г. Шмайсера [15] ($0 \leq p < 1$); обобщение неравенства Бернштейна на множестве многочленов $\mathcal{P}_n(D)$ для достаточно широкого класса операторов выведено в статье В. В. Арестова [16]. Точное неравенство Бернштейна на множестве многочленов $\mathcal{P}_n(D_R)$ в случае $p = \infty$, $R > 1$, получено в работе М. А. Малика [17]; ряд результатов для $p = 2$ содержится в статье Р. Р. Акопяна [18].

Обозначим через $M_{n,m}(G)$ точную (наименьшую) константу в неравенстве братьев Марковых для многочленов $\mathcal{P}_n(G)$ на отрезке $I = [-1, 1]$

$$\|p_n^{(m)}\|_{C(I)} \leq M_{n,m}(G)\,\|p_n\|_{C(I)}, \quad p_n \in \mathcal{P}_n(G), \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Ясно, что в случае $m = n$ неравенство (1.4) связано с задачей (1.2), точнее, имеет место равенство $n! = M_{n,n}(G)\,\tau_n(I, G)$. (О результатах, связанных с неравенством братьев Марковых с ограничением на корни многочленов, см. статью [19] и приведенную там литературу.)

В настоящей работе представлены следующие результаты. В теореме 2 для случая $\mathrm{Conv}K \subset \overline{G}$ проведена редукция задачи (1.2) к аналогичной задаче для множества алгебраических многочленов, имеющих все n корней на границе ∂G множества G. В теореме 3 получено точное значение величин (1.2) и (1.3) для $K = [-1, 1]$ и $G = D_R$, $R \geq \varrho_n$, где ϱ_n — определенная величина такая, что $\varrho_n^2 \leq (\sqrt{5} - 1)/2$, и, как следствие, выписано точное значение константы $M_{n,n}(D_R)$ неравенства (1.4) при $m = n$. В завершающей части статьи приведены некоторые двусторонние оценки величины $\tau(K, G)$.

2. Редукция к многочленам с корнями на границе области

В этом разделе статьи будет предполагаться справедливость вложения $\mathrm{Conv}\,K \subset \overline{G}$. Для упрощения рассуждений примем, что G является областью — открытым связным множеством. Случай, когда множество несвязно, нетрудно сводится к рассматриваемому заменой G на его компоненту связности, содержащую $\mathrm{Conv}\,K$.

Для точек $z \in K$ и $z_0 \notin \mathrm{Conv}\,K$ рассмотрим множество $B(z, z_0) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < |z - z_0|\}$ точек, которые к точке z находятся ближе, чем точка z_0. Множество $B(z, z_0)$ является открытым кругом с центром в точке z радиуса $|z - z_0|$. Тогда $B(K, z_0) = \bigcap_{z \in K} B(z, z_0)$ есть множество точек комплексной плоскости, которые к любой точке компакта K ближе, чем точка z_0. Обозначим через $\widetilde{z}$ (единственный) ближайший элемент выпуклого компакта $\mathrm{Conv}\,K$ к точке z_0; т.е. $\rho(z_0, \mathrm{Conv}\,K) = \min\{|z - z_0| : z \in \mathrm{Conv}\,K\} = |\widetilde{z} - z_0|$.

В дальнейшем потребуется следующее геометрическое утверждение.

Лемма 1. *Пусть $z_0 \notin \operatorname{Conv} K$, тогда множество $B(K, z_0)$ не пусто. При этом $\widetilde{z}$ — элемент наилучшего приближения точки z_0 компактом $\operatorname{Conv} K$ и, более того, промежуток $[\widetilde{z}, z_0)$ принадлежат множеству $B(K, z_0)$.*

Доказательство. Ясно, что первая часть утверждения следует из второй. Покажем, что $\widetilde{z} \in B(K, z_0)$, т.е. любая точка z компакта K удовлетворяет неравенству $|z - \widetilde{z}| < |z - z_0|$. Рассмотрим полуплоскость $Q = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - \widetilde{z}| < |z - z_0|\}$. Достаточно показать вложение $K \subset Q$ или, что то же самое, $\operatorname{Conv} K \subset Q$. Граница Q — прямая, являющаяся серединным перпендикуляром отрезка $[\widetilde{z}, z_0]$, и $\widetilde{z} \in Q$.

Поскольку $\widetilde{z}$ — это ближайшая к z_0 точка из компакта $\operatorname{Conv} K$, то открытый круг с центром в точке z_0 радиуса $|\widetilde{z} - z_0|$ и компакт $\operatorname{Conv} K$ (выпуклые непересекающиеся множества в $\mathbb{C}$) отделимы прямой — касательной к граничной окружности.

Граница полуплоскости Q параллельна построенной прямой (опорной для круга и компакта $\operatorname{Conv} K$). Тогда полуплоскость Q содержит в себе $\operatorname{Conv} K$ и, соответственно, компакт K. Наконец, вложение $[\widetilde{z}, z_0) \subset B(K, z_0)$ следует из выпуклости $B(K, z_0)$ и принадлежности точек $\widetilde{z}$ и z_0 замыканию $B(K, z_0)$.

Лемма доказана.

Используя лемму 1, получим утверждение для многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$.

Лемма 2. *Пусть компакт K и область G такие, что $\operatorname{Conv} K \subset \overline{G}$. Тогда для произвольного многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n(G)$, имеющего хотя бы один корень, не принадлежащий границе ∂G области G, существует многочлен $q_n \in \mathcal{P}_n(G)$ такой, что для всех $z \in K$ справедливо строгое неравенство*

$$|q_n(z)| < |p_n(z)|. \tag{2.1}$$

Доказательство. Обозначим через z_0 корень многочлена p_n из $\mathcal{P}_n(G)$, который не принадлежит границе ∂G области G. Тогда для многочлена p_n имеет место представление

$$p_n(z) = p_{n-1}(z)(z - z_0), \quad p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}(G).$$

Согласно лемме 1 промежуток $[\widetilde{z}, z_0)$ будет содержаться во множестве $B(K, z_0)$. Поскольку $\widetilde{z} \in \operatorname{Conv} K \subset \overline{G}$, а $z_0 \notin \overline{G}$, то полуинтервал $[\widetilde{z}, z_0)$ пересекается с ∂G. Обозначим точку из пересечения через $\widetilde{z}_0$. Так как $\widetilde{z}_0 \in [\widetilde{z}, z_0) \subset B(K, z_0)$, то для всех $z \in K$ выполнено неравенство $|z - \widetilde{z}_0| < |z - z_0|$. Тогда в качестве многочлена $q_n \in \mathcal{P}_n(G)$ можно взять многочлен, определяемый равенством $q_n(z) = p_{n-1}(z)(z - \widetilde{z}_0)$.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть компакт K и область G такие, что $\operatorname{Conv} K \subset \overline{G}$. Тогда любой экстремальный многочлен в (1.2) имеет все n корней на границе ∂G области G.*

Доказательство. Пусть у многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n(G)$ хотя бы один из корней не принадлежит границе ∂G области G. Тогда по лемме 2 существует многочлен $q_n \in \mathcal{P}_n(G)$ такой, что для всех $z \in K$ справедливо строгое неравенство (2.1). Следовательно, справедливо строгое неравенство

$$\|q_n\| < \|p_n\|.$$

Отсюда вытекает, что многочлен p_n не является многочленом из $\mathcal{P}_n(G)$, наименее уклоняющимся от нуля на компакте K.

Теорема доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы 2 справедливо и для многочленов из $\mathcal{P}_n(G)$, наименее уклоняющихся от нуля относительно произвольной нормы, сохраняющей порядок, в частности для $L^p(K)$-средних. Это (аналогично доказательству теоремы 2) следует из леммы 2, так как неравенство (2.1) поточечное на компакте K.

3. Точное решение при $K = [-1;1]$ и $G = D_R$

Обозначим через ϱ_n число, равное $1/\sqrt{2}$, в случае, если $n = 2m$, и единственный в интервале $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt[4]{2})$ корень уравнения $(\varrho^2-1)^{2m}(\varrho^2+1) = \varrho^{4m+2}$, если $n = 2m+1$, $m \geq 1$. Отметим, что последовательность $\varrho_3, \varrho_5, \ldots$ монотонно убывает и $\lim_{m\to\infty} \varrho_{2m+1} = 1/\sqrt{2}$. Тогда при любом $m \geq 1$ получаем, что $\varrho_{2m+1} \in (1/\sqrt{2}, \varrho_3]$, где $\varrho_3 = ((\sqrt{5}-1)/2)^{1/2}$. В этом разделе найдем точное значение величин (1.2) и (1.3) в случае, когда компакт K есть отрезок $I = [-1;1]$, а область G — круг D_R с центром в нуле радиуса $R \geq \varrho_n$.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\tau_n(I, D_R) = \begin{cases} \sqrt{1+R^2}, & n = 1, \quad R \geq 0; \\ R^n, & n > 1, \quad R \geq \varrho_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

При этом минимум в (1.2) *достигается на многочленах* $p_n^*(x) = (x^2 - R^2)^m$, *при* $n = 2m$; $p_n^*(x) = (x^2 - R^2)^m(x \pm iR)$, *при* $n = 2m+1$.

Следовательно, справедливы соотношения

$$\tau(I, D_R) = R \ \text{ при } \ R \geq 1/\sqrt{2}; \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} M_{1,1}(D_R) &= (\sqrt{1+R^2})^{-1}, \quad R \geq 0; \\ M_{n,n}(D_R) &= n!R^{-n}, \ n > 1, \quad R \geq \varrho_n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Доказательство. Отдельно исследуем случай многочленов первой степени ($n = 1$). Рассмотрим многочлены вида $p(x) = x - z_0$, где $|z_0| = \rho$, $\rho \geq R$. Пусть, для определенности, $\Re z_0 = x_0 \leq 0$. Тогда нетрудно получить, что максимум функции $|p(x)| = (x^2 - 2xx_0 + \rho^2)^{1/2}$ на отрезке $[-1;1]$ достигается в точке $x = 1$. Значит, для нормы многочлена p имеем равенство $\|p\| = |p(1)| = (1 - 2x_0 + \rho^2)^{1/2}$. Ясно, что при условиях $x_0 \leq 0$, $\rho \geq R$ наименьшее значение $\|p\|$ достигнет при $x_0 = 0$ и $\rho = R$. Тогда из равенства $|z_0| = R$ выводим, что $z_0 = \pm iR$. Таким образом, справедливо равенство (3.1) при $n = 1$ и экстремальными являются многочлены $p_1^*(x) = x \pm iR$.

Пусть теперь $n > 1$. Нетрудно вычислить норму многочлена $p_{2m}^*(x) = (x^2 - R^2)^m$; для $R \geq 1/\sqrt{2} = \varrho_{2m}$ имеем

$$\|p_{2m}^*\| = \max_{x\in[-1;1]} |p_{2m}^*(x)| = \max_{x\in[0;1]} |R^2 - x^2|^m = \max\{|R^2-1|^m; R^{2m}\} = R^{2m}.$$

Для многочлена $p_{2m+1}^* = (x^2 - R^2)^m(x \pm iR)$ справедливо равенство

$$\|p_{2m+1}^*\|^2 = \max_{x\in[-1;1]} |p_{2m+1}^*(x)|^2 = \max_{x\in[0;1]} |R^2 - x^2|^{2m}|R^2 + x^2| = \max\{|R^2-1|^{2m}(R^2+1); R^{4m+2}\}.$$

Величина ϱ_{2m+1} является корнем уравнения $(\varrho^2-1)^{2m}(\varrho^2+1) = \varrho^{4m+2}$, и для $R \geq \varrho_{2m+1}$ получаем $\|p_{2m+1}^*\| = |p_{2m+1}^*(0)| = R^{2m+1}$.

Тогда непосредственно из определения при $R \geq \varrho_n$ вытекает оценка сверху величины (1.2):

$$\tau_n(I, D_R) \leq R^n. \tag{3.4}$$

Получим оценку снизу для величины наименьшего равномерного уклонения от нуля на отрезке $[-1;1]$ многочленов из множества $\mathcal{P}_n(D_R)$. Для любого многочлена p_n из $\mathcal{P}_n(D_R)$, который представим в виде $p_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - z_k)$, где $|z_k| \geq R$, $1 \leq k \leq n$, справедливы неравенства

$$\|p_n\| = \max_{x\in[-1;1]} |p_n(x)| \geq |p_n(0)| = \prod_{k=1}^n |z_k| \geq R^n. \tag{3.5}$$

Следовательно, верна следующая оценка снизу:

$$\tau_n(I, D_R) \geq R^n. \tag{3.6}$$

Неравенства (3.4) и (3.6) дают второе равенство в (3.1).

Согласно теореме 1 последовательность $\sqrt[n]{\tau_n(I, D_R)}$ сходится. Рассмотрим ее подпоследовательность с четными номерами. При $R \geq 1/\sqrt{2} = \varrho_{2m}$ она имеет предел, равный R. Это влечет за собой равенство (3.2). Наконец, равенство (3.3) есть простое следствие (3.1).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. 1. Из соотношений (3.5) вытекает, что многочлен p из $\mathcal{P}_n(D_R)$, $n > 1$, наименее уклоняется от нуля на $[-1, 1]$ и $\|p\| = R^n$ тогда и только тогда, когда это многочлен с корнями на окружности $|z| = R$, а его норма достигается в точке $z = 0$.

2. Приведенные в теореме многочлены из $\mathcal{P}_n(D_R)$, наименее уклоняющиеся от нуля на $[-1, 1]$, не единственны. Например, при четных n и $R \geq 1/\sqrt[2l]{2}$ экстремальными являются многочлены $p^{**}_{2ml}(x) = (x^{2l} - R^{2l})^m$, $l, m \in \mathbb{N}$.

3. При малых значениях R равенства (3.1), (3.2) неверны. Ясно, что $\tau_n(I, D_R) \geq \tau_n(I) = 2^{1-n}$ и, следовательно, при $R < 2^{(1-n)/n}$ и $n > 1$ равенства (3.1), (3.3) не имеют места; так же $\tau(I, D_R) \geq \tau(I) = 1/2$ и, следовательно, при $R < 1/2$ равенство (3.2) не имеет места.

4. В следствии теоремы 4 получено обобщение (3.2).

4. Оценки постоянной Чебышева $\tau(K, G)$

В завершающем разделе получим двусторонние оценки постоянной Чебышева компакта K относительно открытого множества G.

Лемма 3. *Верны следующие утверждения. Для двух произвольных компактов $K_1 \subset K_2$ и произвольного открытого множества G справедливо неравенство*

$$\tau(K_1, G) \leq \tau(K_2, G). \tag{4.1}$$

Для произвольных компакта K и двух открытых множеств $G_1 \subset G_2$ справедливо неравенство

$$\tau(K, G_1) \leq \tau(K, G_2). \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $K_1 \subset K_2$, то для произвольного многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n(G)$ справедливо неравенство $\|p_n\|_{C(K_1)} \leq \|p_n\|_{C(K_2)}$. Отсюда вытекает неравенство $\tau_n(K_1, G) \leq \tau_n(K_2, G)$ и неравенство (4.1).

Из вложения $G_1 \subset G_2$ следует, что при всех n $\mathcal{P}_n(G_2) \subset \mathcal{P}_n(G_1)$. Тогда $\tau_n(K, G_1) \leq \tau_n(K, G_2)$, что влечет неравенство (4.2).

Лемма доказана.

Напомним, что через $\tau(K)$ обозначается постоянная Чебышева компакта K. Хорошо известно (см. [2, гл. VII, теорема 1 и замечание к ней]):

$$\tau(K) = \tau(K, \mathbb{C} \setminus K) = \tau(\partial K). \tag{4.3}$$

Теорема 4. *Для произвольного компакта K и ограниченного открытого множества G справедливы следующие утверждения. Если $K \subset \overline{G}$, то имеют место неравенства*

$$\tau(K) \leq \tau(K, G) \leq \tau(\overline{G}). \tag{4.4}$$

Если $\operatorname{Conv} K \subset \overline{G}$, *то имеют место неравенства*

$$\max_{z \in K} \min_{\zeta \in \partial G} |z - \zeta| \leq \tau(K, G) \leq \min_{\zeta \in \partial G} \max_{z \in K} |z - \zeta|. \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся, что справедливо неравенство (4.4). Оценка снизу очевидна. Получим оценку сверху. Для произвольного многочлена p_n справедливо равенство $\|p_n\|_{C(\overline{G})} = \|p_n\|_{C(\partial G)}$ и, как следствие, имеем

$$\tau(\overline{G}, \mathbb{C} \setminus \partial G) = \tau(\partial G, \mathbb{C} \setminus \partial G). \tag{4.6}$$

Используя последовательно неравенства (4.2) и (4.1) леммы 3, равенства (4.6) и (4.3), приходим к цепочке соотношений

$$\tau(K, G) \le \tau(K, \mathbb{C} \setminus \partial G) \le \tau(\overline{G}, \mathbb{C} \setminus \partial G) = \tau(\partial G, \mathbb{C} \setminus \partial G) = \tau(\partial G) = \tau(\overline{G}).$$

Неравенство (4.4) доказано.

Обратимся к доказательству оценок (4.5). Покажем, что в (4.5) верно первое неравенство. Для каждого $z \in K$ по теореме 2 справедливы соотношения

$$\tau_n(K, G) \ge \min\Big\{ \prod_{k=1}^{n} |z - \zeta_k| \,:\, \zeta_k \in \partial G, k = \overline{1, n} \Big\} = \Big(\min_{\zeta \in \partial G} |z - \zeta| \Big)^n.$$

Извлекая корень степени n, рассмотрев максимум по $z \in K$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, выводим требуемое неравенство.

Теперь покажем, что в (4.5) справедлива оценка сверху. Для произвольного $\zeta \in \partial G$ многочлен $r_n(z) = (z - \zeta)^n$ принадлежит $\mathcal{P}_n(G)$. Отсюда имеем соотношение

$$\tau(K, G) \le \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|r_n\|} = \max_{z \in K} |z - \zeta|.$$

Взяв минимум по $\zeta \in \partial G$, получим второе неравенство в (4.5).

Теорема доказана.

Следствие. *Для произвольного компакта K, удовлетворяющего условию $K \subset \overline{D_R}$ и содержащего точку нуль*: $0 \in K$, *справедливо равенство*

$$\tau(K, D_R) = R, \quad R > 0. \tag{4.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из неравенства (4.4) вытекает оценка сверху $\tau(K, D_R) \le \tau(\overline{D_R}) = R$. С другой стороны, используя принадлежность нуля компакту K, аналогично (3.6) получаем оценку снизу $\tau_n(K, D_R) \ge R^n$. Отсюда следует равенство (4.7).

З а м е ч а н и е 3. Каждое из неравенств в (4.4) и (4.5) в зависимости от K и G может быть как равенством, так и строгим неравенством.

Действительно, например, в случае одноточечного компакта $K = \{\zeta_0\}$ и множества $G = D_R$ если $0 < |\zeta_0| < R$, то $0 < \tau(\zeta_0, D_R) = R - |\zeta_0| < R$. Таким образом, оба неравенства в (4.5) обращаются в равенства, при этом в (4.4) оба неравенства строгие. Если $K = \partial D_r$ и $G = D_R$, $0 < r < R$, то справедливы соотношения $R - r < \tau(\partial D_r, D_R) = R < R + r$. В этом случае оба неравенства строгие в (4.5). Наконец, при $K = \overline{G}$ обращаются в равенства оба неравенства в (4.4).

Благодарность. Автор выражает благодарность своему научному руководителю Р. Р. Акопяну за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чебышев П.Л.** Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. // Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева: в 5 т. Т. 2: Математический анализ. М.; Л.: АН СССР, 1947. С. 23–51.
2. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного: уч. пос. М.; Л.: Наука ГИТТЛ, 1952. 628 с.

3. **Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias T.M.** Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Comp., 1994. 821 p. ISBN: 981-02-0499-X.
4. **Fischer B.** Chebyshev polynomials for disjoint compact sets. // Constr. Approx. 1992. Vol. 8, no. 3. P. 309–329. doi: 10.1007/BF01279022 .
5. **Peherstorfer F.** Minimal polynomials for the compact sets of the complex plane // Constr. Approx. 1996. Vol. 12, no. 4. P. 481–488. doi: 10.1007/BF02437504 .
6. **Байрамов Э.Б.** Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на квадрате комплексной плоскости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, №3. С. 5–15. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-5-15 .
7. **Бородин П.А.** Об одном условии на многочлен, достаточном для минимальности его нормы на заданном компакте // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2006. № 4. P. 14–18.
8. **Смирнов В.И.** Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л. : Наука, 1964. 438 с.
9. **Turán P.** Über die Ableitung von Polynomen // Compositio Mathematica. 1939. Vol. 7. P. 89–95.
10. **Glazyrina P.Yu., Révész Sz.Gy.** Turán type oscillation inequalities in Lq norm on the boundary of convex domains // Math. Inequal. Appl. 2017. Vol. 20, no. 1. P. 149–180. doi: 10.7153/mia-20-11
11. **Глазырина П.Ю., Ревес С.Д.** Неравенства Турана — Эрёда, обратные к неравенству Маркова, для L_q-нормы по границе плоской выпуклой области // Тр. МИАН. 2018. Vol. 303. P. 87–115.
12. **Lax P.D.** Proof of the conjecture of P. Erdos on the derivative of a polynomial // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50, no. 8. P. 509–513. doi: 10.1090/S0002-9904-1944-08177-9 .
13. **Akopyan R.R.** Certain extremal problems for algebraic polynomials which do not vanish in a disk // East J. Approx. 2003. Vol. 9, no. 2. P. 139–150.
14. **De Bruyn N.G.** Inequalities concerning polynomials in the complex domain // Nederl. Akad. Watensh. Proc. 1947. Vol. 50. P. 1265–1272.
15. **Rahman Q.I. and Schmeisser G.** L^p inequalities for polynomials // J. Approx. Theory. 1988. Vol. 53, no. 1. P. 26–33. doi: 10.1016/0021-9045(88)90073-1 .
16. **Arestov V.V.** Integral inequalities for algebraic polynomials with a restriction on their zeros // Anal. Math. 1991. Vol. 17, no. 1. 1. P.11–20. doi: 10.1007/BF02055084 .
17. **Malik M.A.** On the derivative of a polynomial // J. London. Math. Soc. 1969. Vol. s2-1, no. 1. P. 57–60. doi: 10.1112/jlms/s2-1.1.57 .
18. **Akopyan R.R.** Turan's inequality in H2 for algebraic polynomials with restrictions to their zeros // East J. Approx. 2000. Vol. 6, no. 1. P. 103–124.
19. **Erdélyi T.** Markov-type inequalities for constrained polynomials with complex coefficients // Illinois J. Math. 1998. Vol. 42, no. 4. P. 544–563. doi: 10.1215/ijm/1255985460 .

Поступила 8.04.2022
После доработки 28.06.2022
Принята к публикации 4.07.2022

Пестовская Алена Эдуардовна
магистрант
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: a.e.pestovskaya@mail.ru

REFERENCES

1. Chebyshev P.L. Theory of the mechanisms known as parallelograms. In: Chebyshev P. L. *Collected works. Vol. II. Mathematical analysis.* Moscow; Leningrad: Acad. Sci. USSR, 1947, pp. 23–51 (in Russian).
2. Goluzin G.M. *Geometric theory of functions of a complex variable.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 26, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1969, 676 p. doi: 10.1090/mmono/026 . Original Russian text published in Goluzin G.M. *Geometricheskaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo: Uchebnoe posobie.* Moscow; Leningrad: Nauka GITTL Publ., 1952, 628 p.
3. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias T.M. *Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros.* Singapore: World Scientific Publ. Comp., 1994, 821 p. ISBN: 981-02-0499-X .

4. Fischer B. Chebyshev polynomials for disjoint compact sets. *Constr. Approx.*, 1992, vol. 8, no. 3, pp. 309–329. doi: 10.1007/BF01279022 .
5. Peherstorfer F. Minimal polynomials for compact sets of the complex plane. *Constr. Approx.*, 1996, vol. 12, no. 4, pp. 481–488. doi: 10.1007/BF02437504 .
6. Bayramov E.B. Polynomials least deviating from zero on a square of the complex plane. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 5–15. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-5-15 (in Russian).
7. Borodin P.A. On a condition for a polynomial that is sufficient for its norm to be minimal on a given compactum. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2006, no. 4, pp. 14–18 (in Russian).
8. Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Functions of a complex variable. Constructive theory.* London: Iliffe Books Ltd., 1968, 488 p. Original Russian text published in Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Konstruktivnaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo.* Moscow; Leningrad: Nauka Publ., 1964, 438 p.
9. Turán P. Über die Ableitung von Polynomen. *Compositio Mathematica*, 1939, vol. 7, pp. 89–95.
10. Glazyrina P.Yu., Révész Sz.Gy. Turán type oscillation inequalities in L^q norm on the boundary of convex domains. *Math. Inequal. Appl.*, 2017, vol. 20, no. 1, pp. 149–180. doi: 10.7153/mia-20-11 .
11. Glazyrina P.Yu., Révész Sz.Gy. Turán–Erőd type converse Markov inequalities on general convex domains of the plane in the boundary L^q norm. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 303, no. 1, pp. 78–104. doi: 10.1134/S0081543818080084 .
12. Lax P.D. Proof of a conjecture of P. Erdős on the derivative of a polynomial. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1944, vol. 50, no. 8, pp. 509–513. doi: 10.1090/S0002-9904-1944-08177-9 .
13. Akopyan R.R. Certain extremal problems for algebraic polynomials which do not vanish in the disk. *East J. Approx.*, 2003, vol. 9, no. 2, pp. 139–150.
14. De Bruyn N.G. Inequalities concerning polynomials in the complex domain. *Nederl. Akad. Watensh. Proc.*, 1947, vol. 50, pp. 1265–1272.
15. Rahman Q., Schmeisser G. L^p inequalities for polynomials. *J. Approx. Theory*, 1988, vol. 53, no. 1, pp. 26–32. doi: 10.1016/0021-9045(88)90073-1 .
16. Arestov V.V. Integral inequalities for algebraic polynomials with a restriction on their zeros. *Anal. Math.*, 1991, vol. 17, no. 1, pp. 11–20. doi: 10.1007/BF02055084 .
17. Malik M.A. On the derivative of a polynomial. *J. London Math. Soc.*, 1969, vol. s2-1, no. 1, pp. 57–60. doi: 10.1112/jlms/s2-1.1.57 .
18. Akopyan R.R. Turan's inequality in H_2 for algebraic polynomials with restrictions to their zeros. *East J. Approx.*, 2000, vol. 6, no. 1, pp. 103–124.
19. Erdélyi T. Markov-type inequalities for constrained polynomials with complex coefficients. *Illinois J. Math.*, 1998, vol. 42, no. 4, pp. 544–563. doi: 10.1215/ijm/1255985460 .

Received April 8, 2022
Revised June 28, 2022
Accepted July 4, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00526).

Alena Eduardovna Pestovskaya, graduate student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: a.e.pestovskaya@mail.ru .

Cite this article as: A. E. Pestovskaya. Polynomials least deviating from zero with a constraint on the location of roots. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 166–175.