ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 512.554.32

ОЦЕНКИ ЧИСЛА БОЛЬШИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ФАКТОРОВ В ОГРАНИЧЕНИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НА ПОДСИСТЕМНЫЕ ПОДГРУППЫ ТИПА A_2[1]

А. А. Осиновская

Описание ограничений неприводимых представлений алгебраических групп на подгруппы, т. е. правила ветвления представлений, является одной из основных проблем теории представлений. Классические правила ветвления были получены Г. Вейлем и Шуром и описывают ограничения представлений классических алгебраических групп ранга r на естественно вложенную классическую подгруппу ранга r или $r-1$ в характеристике 0. В положительной характеристике получение таких правил в явном виде в обозримом будущем маловероятно. Поэтому целесообразно развивать методы исследования модулярных представлений, которые не требуют знания их характеров. Одно из направлений таких исследований — поиск асимптотических аналогов правил ветвления на подгруппы малого ранга. Ограничения модулярных представлений алгебраических групп на подгруппы типа A_1 были описаны нами ранее. В данной работе исследуются ограничения неприводимых представлений специальной линейной группы над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики p на подсистемные подгруппы типа A_2. Получена оценка числа факторов, больших относительно подгруппы, для ограничений представлений групп ранга 3 и 4.

Ключевые слова: алгебраические группы, специальные линейные группы, модулярные представления, ограничения, композиционные факторы.

A. A. Osinovskaya. Estimates for the number of large composition factors in the restrictions of representations of special linear groups on subsystem subgroups of type A_2.

One of the main problems of representation theory is the description of the restrictions of irreducible representations of algebraic groups to subgroups, i.e., of the branching rules for representations. H. Weyl and I. Schur obtained the classical branching rules that describe the restrictions of representations of classical algebraic groups of rank r to a naturally embedded classical subgroup of rank r or $r-1$ in the characteristic 0. In a positive characteristic, obtaining such rules in explicit form in the nearest future is unlikely. Therefore it is reasonable to develop methods for studying the modular representations, which do not require the knowledge of the characters. One of the directions of such studies is finding asymptotic analogs of branching rules to subgroups of small rank. Earlier we described the restrictions of modular representations of algebraic groups to subgroups of type A_1. In the present paper we study the restrictions of irreducible representations of the special linear group over an algebraically closed field of positive characteristic p to subsystem subgroups of type A_2. An estimate is obtained for the number of factors that are large with respect to the subgroup for representations of groups of rank 3 and 4.

Keywords: algebraic groups, special linear groups, modular representations, restrictions, composition factors.

MSC: 20G05

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-155-165

Введение

В то время как размерности и характеры неприводимых представлений алгебраических групп в характеристике 0 известны, в положительной характеристике задача вычисления таких характеров и размерностей не решена и малоприступна. Существует гипотеза Люстига, описывающая такие характеры. Андерсен, Янцен и Соергел [1] доказали ее для всех p, больших некоторого значения. Но из их доказательства невозможно установить это значение. В 2008 г. Фибиг [2] нашел явную верхнюю границу, но это число оказалось невероятно большим.

[1]Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф21-054).

Целесообразно развивать методы исследования представлений, которые не требуют знания их характеров. Отметим статью В. Щиголева [3], в которой найдены условия существования подмодулей Вейля в ограничениях неприводимых модулярных представлений специальных линейных групп. Другое направление исследований — поиск асимптотических аналогов правил ветвления, рассматривающих ограничения представлений на подгруппы малого ранга. Ограничения модулярных представлений алгебраических групп на подгруппы типа A_1 были описаны нами в ряде статей, основной из которых является [4]. Ограничения представлений специальных линейных групп на подгруппы типа A_2 изучались для локально малых представлений относительно характеристики поля [5]. Данная статья продолжает эти исследования уже для произвольных представлений.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$, G — простая односвязная алгебраическая группа типа A_r над K, т.е. $G = SL_{r+1}(K)$, $r \geq 3$. Зафиксируем максимальный тор $T \subset G$ и подгруппу Бореля B, $T \subset B \subset G$. Обозначим символами α_i, $1 \leq i \leq r$, базис системы корней относительно T и B и символами ω_i, $1 \leq i \leq r$, — фундаментальные веса, соответствующие этим корням. Пусть $L(\omega)$ — неприводимый G-модуль со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$. Напомним, что вес ω и модуль $L(\omega)$ называются *p-ограниченными*, если $a_i < p$ для любого $1 \leq i \leq r$.

Если $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — корни группы G, то символ $G(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ обозначает подгруппу в G, порожденную корневыми подгруппами, ассоциированными с корнями $\pm\beta_1, \ldots, \pm\beta_s$. Заметим, что корни $\beta_1, \ldots, \beta_s$ выбираются таким способом, чтобы они составляли базис системы корней для $G(\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Такие подгруппы $G(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ называются подсистемными подгруппами. Положим

$$G(i_1, \ldots, i_s) = G(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}).$$

Мы обозначаем базис системы корней и фундаментальные веса подгруппы $\Gamma = G(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ относительно максимального тора $\Gamma \cap T$ и подгруппы Бореля $\Gamma \cap B$ просто символами α_i, $1 \leq i \leq s$, и ω_i, $1 \leq i \leq s$, поскольку подгруппа всегда очевидна из контекста.

Далее H — подсистемная подгруппа группы G типа A_2. Все такие подгруппы сопряжены в G, поэтому мы можем, например, положить $H = G(1, 2)$. Чтобы определить "большие" композиционные факторы в терминах коэффициентов весов, рассмотрим ограничение H-модуля на специальную подгруппу типа A_1.

Пусть $u \in H$ — регулярный унипотентный элемент из подгруппы H. Он имеет один блок Жордана размерности 3 и другие блоки размерности 1 в стандартной реализации группы G. Обозначим символом $A \subset H \subset G$ подгруппу типа A_1, замкнутую в топологии Зарисского и содержащую u. Так как $p > 2$, то u — это элемент порядка p и такая подгруппа A всегда существует.

Множество весов групп типа A_1 можно отождествить с множеством целых чисел с помощью следующего отображения $x\omega_1 \mapsto x$, а множество всех доминантных весов — с множеством $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел. Аналогичным образом, множество весов группы типа A_2 можно отождествить с парами целых чисел при помощи отображения $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 \mapsto (x_1, x_2)$, а множество всех доминантных весов — с множеством $\mathbb{N}^2$ пар неотрицательных целых чисел.

Далее символ $\operatorname{Irr} M$ обозначает множество старших весов композиционных факторов для G-модуля M, а $M|\Pi$ — ограничение M на подгруппу $\Pi \subset G$. Если λ — вес модуля M, то $\lambda|\Pi$ — его ограничение на подгруппу Π.

Лемма 1 [6, лемма 18]. *Пусть $p > 2$, $\mu = b_1\omega_1 + b_2\omega_2$ — доминантный вес подгруппы H и M — неприводимый H-модуль со старшим весом μ. Тогда $2b_1 + 2b_2 \in \operatorname{Irr} M|A$. Если λ — некоторый вес модуля M, то $b = \lambda|A$ четно и $b \leq 2b_1 + 2b_2$.*

Положим $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_r$. Тогда из леммы 1 и результатов об ограничениях $L(\omega)|H$ из [7] вытекает

Следствие 1. *Число* $2m \in \mathrm{Irr}\, L(\omega)|A$. *Если* λ *— некоторый вес модуля* $L(\omega)$, *то* $b = \lambda|A$ *четно и* $b \le 2m$.

Наиболее интересный случай — это $2m \ge p$, поскольку в противном случае ограничение $L|A$ вполне приводимо и, более того, устроено так же, как в характеристике 0. Композиционный фактор M ограничения модуля $L \in \mathrm{Irr}\, G$ на подгруппу H называется *большим* для H, если максимальный вес ограничения $M|A$ близок к $2m$.

Обозначим символом $\mathrm{mult}(\omega, a)$ число композиционных факторов ограничения $L(\omega)|H$ со старшим весом $\mu = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$, таким что $x_1 + x_2 = a$. Получены следующие результаты.

Предложение 1. *Пусть* $p > 3$, $G = A_3(K)$ *и* $\mu = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 \in \mathrm{Irr}\, L(\omega)|H$.

(1) *Если* $x_1 + x_2 = m$, *то* $\mathrm{mult}(\omega, m) = a_2 + 1$.
(2) *Предположим, что* $x_1 + x_2 = m - 1$.
  (a) *Если* $a_1a_2a_3 \ne 0$, *и* $a_1 + a_2 = p - 1$, $p < a_2 + a_3 + 2$ *или* $p < a_1 + a_2 + 2$, $a_2 + a_3 = p - 1$, *то* $\mathrm{mult}(\omega, m - 1) = a_2$.
  (b) *Если* $a_1 = 0$, $a_2 = p - 1$ *или* $a_2 = p - 1$, $a_3 = 0$, *то* $\mathrm{mult}(\omega, m - 1) = 2$.
  (c) *Если* a_1, a_2 *и* a_3 *не такие, как в п.* (2b) *и* $a_1a_2a_3 = 0$, *то* $\mathrm{mult}(\omega, m - 1) = a_2 + 2$.
  (d) *Во всех остальных случаях* $\mathrm{mult}(\omega, m - 1) = 2a_2 + 2$.

Предложение 2. *Пусть* $p > 2$, $G = A_4(K)$ *и* $\mu = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 \in \mathrm{Irr}\, L(\omega)|H$.

(1) *Если* $a_2 + a_3 + 2 > p$, $a_2 + 1 < p$ *и* $a_3 + 1 < p$, *то* $\mathrm{mult}(\omega, m) = (a_2 + a_3 + 2 - p)(2a_2a_3 - pa_2 - pa_3 + 2p^2 + 2a_2 + 2a_3 - 2p + 2)/2$.
(2) *В противном случае* $\mathrm{mult}(\omega, m) = (a_2 + a_3 + 2)(a_2 + 1)(a_3 + 1)/2$.

1. Свойства H-модулей

Введем обозначения. Модуль Вейля группы G со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$ обозначается символом $V(\omega)$. Положим $\mathrm{ch}(\mu) = \mathrm{ch}(L(\mu))$ (характер модуля $(L(\mu))$, $\chi(\mu) = \mathrm{ch}(V(\mu))$, $\mathrm{ch}(\mu|\Pi) = \mathrm{ch}(L(\mu)|\Pi)$ и $\chi(\mu|\Pi) = \mathrm{ch}(V(\mu)|\Pi)$. Как обычно, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, тогда обозначим $G_{\mathbb{C}} = SL_{r+1}(\mathbb{C})$, $H_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$ — подсистемная подгруппа типа A_2 и $L(\omega)_{\mathbb{C}}$ — неприводимый модуль над $G_{\mathbb{C}}$ со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$.

Лемма 2 [7, теорема 1.1 и лемма 2.2]. *Пусть* $r = 3$ *и* $n(\mu, \omega, H_{\mathbb{C}})$ *— кратность фактора* $L(\mu)_{\mathbb{C}}$ *в ограничении* $L(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}$. *Тогда*

$$\mathrm{Irr}(L(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}) = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \le a_1 + a_2,\ x_2 \le a_2 + a_3,\ a_2 \le x_1 + x_2 \le a_1 + a_2 + a_3\big\}.$$

Для любого $\mu = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 \in \mathrm{Irr}(L(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}})$ *имеем*

$$n(\mu, \omega, H_{\mathbb{C}}) = \min\big(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, a_1 + a_2 - x_1, a_2 + a_3 - x_2, x_1 + x_2 - a_2, m - x_1 - x_2\big) + 1.$$

Пусть σ_α — отражение относительно корня α, $(\ ,\ )$ — инвариантная относительно группы Вейля невырожденная симметричная билинейная форма на множестве всех весов, а $\langle \mu, \alpha\rangle = 2(\mu, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ для веса μ и корня α группы G.

Предложение 3 (Янцен [8, часть II, предложение 8.19]). *Пусть* Γ *— простая алгебраическая группа над полем характеристики* $p > 0$. *Для каждого доминантного веса* μ *группы* Γ *существует фильтрация* Γ*-модулей* $V(\mu) = V(\mu)^0 \supseteq V(\mu)^1 \supseteq V(\mu)^2 \supseteq \ldots$, *такая что*

$$\sum_{i>0} \mathrm{ch}\, V(\mu)^i = \sum_{\alpha>0} \sum_{0<kp<\langle\mu+\rho,\alpha\rangle} \nu_p(kp)\chi(\sigma_{\alpha,kp}.\mu)$$

и $V(\mu)/V(\mu)^1 \cong L(\mu)$. *Здесь* $\nu_p(kp)$ *— максимальная степень* p, *которая делит* kp, $\sigma_{\alpha,kp}.\mu = \sigma_\alpha(\mu + \rho) + kp\alpha - \rho$, *где* ρ *— полусумма положительных корней.*

Далее $\Sigma(\mu) = \sum_{i>0} \operatorname{ch} V(\mu)^i$.

Лемма 3. *Пусть $G = A_3(K)$ и $p > 3$. Тогда в таблице "Характеры A_3-модулей" приведены неприводимые характеры* $\operatorname{ch}(\omega)$. *Здесь*

$$\omega' = (p - a_2 - a_3 - 3)\omega_1 + a_2\omega_2 + (p - a_1 - a_2 - 3)\omega_3,$$

$$\omega'' = (p - a_2 - 2)\omega_1 + (p - a_1 - 2)\omega_2 + (m + 2 - p)\omega_3,$$

$$\omega''' = (m + 2 - p)\omega_1 + (p - a_3 - 2)\omega_2 + (p - a_2 - 2)\omega_3,$$

$$\omega^{iv} = (2p - a_2 - a_3 - 3)\omega_1 + a_2\omega_2 + (2p - a_1 - a_2 - 3)\omega_3,$$

$$\lambda' = (p - a_2 - a_3 - 3)\omega_1 + (p - a_1 - 2)\omega_2 + (a_1 + a_2 + 1 - p)\omega_3,$$

$$\lambda'' = (a_2 + a_3 + 1 - p)\omega_1 + (p - a_3 - 2)\omega_2 + (p - a_1 - a_2 - 3)\omega_3,$$

$$\mu' = a_3\omega_1 + (2p - m - 4)\omega_2 + a_1\omega_3,$$

$$\mu'' = (a_2 + a_3 + 1 - p)\omega_1 + (2p - m - 4)\omega_2 + (a_1 + a_2 + 1 - p)\omega_3,$$

$$\nu' = (2p - a_1 - a_2 - 3)\omega_1 + (m + 2 - 2p)\omega_2 + (2p - a_2 - a_3 - 3)\omega_3,$$

$$\nu'' = (p - a_1 - 2)\omega_1 + (m + 2 - 2p)\omega_2 + (p - a_3 - 2)\omega_3,$$

$$o' = (p - a_2 - 2)\omega_1 + (a_2 + a_3 + 1 - p)\omega_2 + (3p - m - 4)\omega_3,$$

$$o'' = (3p - m - 4)\omega_1 + (a_1 + a_2 + 1 - p)\omega_2 + (p - a_2 - 2)\omega_3.$$

Пункты **(i)**–**(iv)** *данной таблицы выполняются для произвольного* $p > 0$.

Доказательство. Решение в общем случае приведено в книге Янцена [8, 8.20]. Но там не рассмотрены ситуации, когда вес ω лежит на границах альковов, а это составляет большинство случаев. Рассмотрим их с помощью предложения 3. Случаи **(i)**–**(iv)** из указанной таблицы уже были приведены нами (но не доказаны) в работе [7, лемма 3.7].

(i) Пусть $m + 3 \le p$. Из предложения 3 следует, что $\Sigma(\omega) = 0$. Значит, $\operatorname{ch}(\omega) = \chi(\omega)$.

(ii) Предположим, что $a_1 + a_2 + 2, a_2 + a_3 + 2 \le p < m + 3$. Из предложения 3 вытекает, что $\Sigma(\omega) = \chi(\omega')$. При $a_1 + a_2 + 2 = p$ или $a_2 + a_3 + 2 = p$ один из коэффициентов веса ω' равен -1. Поэтому $\Sigma(\omega) = 0$ и $\operatorname{ch}(\omega) = \chi(\omega)$. В противном случае вес ω' доминантный и удовлетворяет условиям п. **(i)**. Следовательно, $\Sigma(\omega) = \chi(\omega') = \operatorname{ch}(\omega')$ и $V(\omega)^2 = V(\omega)^3 = \ldots = 0$. Получаем, что $\operatorname{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \chi(\omega')$.

(iii) Пусть теперь $a_2 + a_3 + 2 \le p < a_1 + a_2 + 2$. Тогда $\Sigma(\omega) = \chi(\omega') + \chi(\omega'')$. Вес ω' не является доминантным. При $a_2 + a_3 + 2 = p$ характер $\chi(\omega') = 0$, поскольку один из коэффициентов веса ω' равен -1. Если $a_2 + a_3 + 2 \ne p$, то $\sigma_3.\omega' = \lambda'$ и этот вес является доминантным при $a_1 + 1 \ne p$.

Если $a_1 + 1 = p$, то один коэффициент весов ω' и λ' равен -1. Отсюда следует, что $\Sigma(\omega) = 0$ и $\operatorname{ch}(\omega) = \chi(\omega)$.

Если $a_1 + 1 \ne p$ и $a_2 + a_3 + 2 = p$, то $\Sigma(\omega) = \chi(\omega'')$ и вес ω'' удовлетворяет условиям п. **(ii)**(a) таблицы. Значит, $\chi(\omega'') = \operatorname{ch}(\omega'')$ и $\operatorname{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \chi(\omega'')$.

Наконец, пусть $a_1 + 1 \ne p$ и $a_2 + a_3 + 2 \ne p$. Получаем $\Sigma(\omega) = \chi(\omega'') - \chi(\lambda')$, где веса ω'' и λ' доминантны. Вес ω'' удовлетворяет условиям п. **(ii)**(b) таблицы. Следовательно, $\operatorname{ch}(\omega'') = \chi(\omega'') - \chi(\lambda')$ и $\Sigma(\omega) = \operatorname{ch}(\omega'')$. Поэтому $V(\omega)^2 = V(\omega)^3 = \ldots = 0$ и $\operatorname{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \operatorname{ch}(\omega'') = \chi(\omega) - \chi(\omega'') + \chi(\lambda')$.

(iv) Этот случай рассматривается аналогично п. **(iii)**.

(v) Пусть $p < a_1 + a_2 + 2, a_2 + a_3 + 2$ и $m + 3 \le 2p$. Согласно предложению 3 $\Sigma(\omega) = \chi(\omega') + \chi(\omega'') + \chi(\omega''')$.

Если $a_1 + 1 = p$ или $a_2 + 1 = p$, то один из коэффициентов веса ω'' равен -1, поэтому $\chi(\omega'') = 0$. Аналогично, если $a_2 + 1 = p$ или $a_3 + 1 = p$, то один из коэффициентов веса ω''' равен -1, а значит, $\chi(\omega''') = 0$. Для других значений a_1, a_2, a_3 веса ω'' и ω''' доминантны.

Характеры A_3-модулей

Значения a_i	$\mathrm{ch}(\omega)$
(i) $m+3 \leq p$	$\chi(\omega)$
(ii) $a_1+a_2+2, a_2+a_3+2 \leq p < m+3$	
(a) $a_1+a_2+2=p$ или $a_2+a_3+2=p$	$\chi(\omega)$
(b) в противном случае	$\chi(\omega)-\chi(\omega')$
(iii) $a_2+a_3+2 \leq p < a_1+a_2+2$	
(a) $a_1+1=p$	$\chi(\omega)$
(b) $a_1+1 \neq p$, $a_2+a_3+2=p$	$\chi(\omega)-\chi(\omega'')$
(c) в противном случае	$\chi(\omega)-\chi(\omega'')+\chi(\lambda')$
(iv) $a_1+a_2+2 \leq p < a_2+a_3+2$	
(a) $a_3+1=p$	$\chi(\omega)$
(b) $a_3+1 \neq p$, $a_1+a_2+2=p$	$\chi(\omega)-\chi(\omega''')$
(c) в противном случае	$\chi(\omega)-\chi(\omega''')+\chi(\lambda'')$
(v) $p < a_1+a_2+2, a_2+a_3+2$ и $m+3 \leq 2p$	
(a) $a_1+1=p$ и $a_3+1=p$	$\chi(\omega)$
(b) $a_1+1 \neq p$, $a_2+1=p$, $a_3+1 \neq p$, $m+3=2p$	$\chi(\omega)$
(c) $a_1+1 \neq p$, $a_2+1=p$, $a_3+1 \neq p$, $m+3<2p$	$\chi(\omega)-\chi(\mu'')$
(d) $a_1+1=p$, $a_2+1 \neq p$, $a_3+1 \neq p$	$\chi(\omega)-\chi(\omega''')$
(e) $a_1+1 \neq p$, $a_2+1 \neq p$, $a_3+1=p$	$\chi(\omega)-\chi(\omega'')$
(f) $a_1+1 \neq p$, $a_2+1 \neq p$, $a_3+1 \neq p$, $m+3=2p$	$\chi(\omega)-\chi(\omega'')-\chi(\omega''')$
(g) в противном случае	$\chi(\omega)-\chi(\omega'')-\chi(\omega''')+$ $+\chi(\mu')-2\chi(\mu'')$
(vi) $p < a_1+a_2+2, a_2+a_3+2$ и $2p < m+3$	
(a) $a_1+1=a_2+1=p$ или $a_2+1=a_3+1=p$	$\chi(\omega)$
(b) $a_1+1=p$, $a_2+1 \neq p$, $a_3+1 \neq p$	$\chi(\omega)-\chi(\omega^{iv})-\chi(\omega''')$
(c) $a_1+1 \neq p$, $a_2+1=p$, $a_3+1 \neq p$	$\chi(\omega)-\chi(\omega^{iv})+\chi(\nu'')$
(d) $a_1+1 \neq p$, $a_2+1 \neq p$, $a_3+1=p$	$\chi(\omega)-\chi(\omega^{iv})-\chi(\omega'')$
(e) в противном случае	$\chi(\omega)-\chi(\omega^{iv})-\chi(\omega''')-$ $-\chi(\omega'')+\chi(o')+\chi(o'')-$ $-2\chi(\nu')+3\chi(\nu'')$

Веса ω', $\sigma_1.\omega'=\lambda''$ и $\sigma_3.\omega'=\lambda'$ не являются доминантными. Если $a_1+1=p$, то характер $\chi(\lambda')=0$, Если $a_3+1=p$, то $\chi(\lambda'')=0$. В противном случае $\mu''=\sigma_1.\lambda'$. Если $m+3=2p$, то $\chi(\mu'')=0$. Во всех случаях вес μ'' доминантный.

(a) Если $a_1+1=p$ и $a_3+1=p$, получаем $\Sigma(\omega)=0$ и $\mathrm{ch}(\omega)=\chi(\omega)$.

(b) Если $a_1+1 \neq p$, $a_2+1=p$, $a_3+1 \neq p$ и $m+3=2p$, то также $\Sigma(\omega)=0$.

(c) Пусть $a_1+1 \neq p$, $a_2+1=p$, $a_3+1 \neq p$ и $m+3 \neq 2p$. Тогда $\Sigma(\omega)=\chi(\mu'')$ и вес μ'' удовлетворяет условиям п. **(i)**. Поэтому $\mathrm{ch}(\mu'')=\chi(\mu'')$ и $\mathrm{ch}(\omega)=\chi(\omega)-\chi(\mu'')$.

(d) Предположим, что $a_1+1=p$, $a_2+1 \neq p$ и $a_3+1 \neq p$. Получаем $\Sigma(\omega)=\chi(\omega''')$ и вес ω''' удовлетворяет условиям п. **(iii)**(a). Значит, $\chi(\omega''')=\mathrm{ch}(\omega''')$ и $\mathrm{ch}(\omega)=\chi(\omega)-\chi(\omega''')$.

(e) Если $a_1+1\neq p$, $a_2+1\neq p$ и $a_3+1=p$, то $\Sigma(\omega)=\chi(\omega'')$. Рассуждая, как в п. (d), получаем $\mathrm{ch}(\omega)=\chi(\omega)-\chi(\omega'')$.

(f) Если $a_1+1\neq p$, $a_2+1\neq p$, $a_3+1\neq p$ и $m+3=2p$, то $\Sigma(\omega)=\chi(\omega'')+\chi(\omega''')$. Из п. **(iii)**(a) вытекает, что $\chi(\omega''')=\mathrm{ch}(\omega''')$. Согласно п. **(ii)**(a) $\chi(\omega'')=\mathrm{ch}(\omega'')$. Поэтому $\mathrm{ch}(\omega)=\chi(\omega)-\chi(\omega'')-\chi(\omega''')$.

(g) В остальных случаях $\Sigma(\omega)=\chi(\mu')+\chi(\omega'')+\chi(\omega''')$. Поскольку вес ω лежит не на границе алькова, мы получаем требуемое из [8, 8.20].

(vi) Наконец, предположим, что $p<a_1+a_2+2, a_2+a_3+2$ и $2p<m+3$. Из предложения 3 следует, что $\Sigma(\omega)=\chi(\omega')+\chi(\omega'')+\chi(\omega''')+\chi(\omega^{iv})$.

Вес ω^{iv} является доминантным, если только не $a_1+1=a_2+1=p$ или $a_2+1=a_3+1=p$. В этих случаях $\chi(\omega^{iv})=0$.

Если $a_1+1=p$ или $a_2+1=p$, то один из коэффициентов веса ω'' равен -1, поэтому $\chi(\omega'')=0$. В противном случае вес ω'' доминантный.

Аналогично, при $a_2+1=p$ или $a_3+1=p$, то характер $\chi(\omega''')=0$. В противном случае ω''' также доминантный.

Вес ω' не является доминантным. Действуя отражениями, получаем вес $\nu''=\sigma_2.\sigma_1.\sigma_3.\omega'$ и $\chi(\nu'')=0$ при $a_1+1=p$ или $a_3+1=p$. В противном случае ν'' доминантный.

(a) Следовательно, при $a_1+1=a_2+1=p$ или $a_2+1=a_3+1=p$ получаем $\Sigma(\omega)=0$ и $\chi(\omega)=\mathrm{ch}(\omega)$.

(b) Пусть теперь $a_1+1=p$, $a_2+1\neq p$ и $a_3+1\neq p$. Тогда $\Sigma(\omega)=\chi(\omega^{iv})+\chi(\omega''')$. Вес ω^{iv} удовлетворяет условиям п. **(iii)**(b), следовательно, $\chi(\omega^{iv})=\mathrm{ch}(\omega^{iv})+\mathrm{ch}(o'')$. Вес ω''' такой, как в п. **(iii)**(c), а значит, $\mathrm{ch}(\omega''')=\chi(\omega''')-\chi(\mu')+\chi(\mu'')=\chi(\omega''')-\mathrm{ch}(\mu')$. Имеем $\Sigma(\omega)=\mathrm{ch}(\omega^{iv})+\mathrm{ch}(\omega''')+\mathrm{ch}(o'')+\mathrm{ch}(\mu')$. Отсюда следует, что $V(\omega)^2=V(\omega)^3=\ldots=0$ и $\mathrm{ch}(\omega)=\chi(\omega)-\mathrm{ch}(\omega^{iv})-\mathrm{ch}(\omega''')-\mathrm{ch}(o'')-\mathrm{ch}(\mu')=\chi(\omega)-\chi(\omega^{iv})-\chi(\omega''')$.

(c) Если $a_1+1\neq p$, $a_2+1=p$ и $a_3+1\neq p$, то $\Sigma(\omega)=\chi(\omega^{iv})-\chi(\nu'')$. Вес ω^{iv} удовлетворяет условиям п. **(v)**(b), поэтому $\chi(\omega^{iv})=\mathrm{ch}(\omega^{iv})+\mathrm{ch}(\nu'')$. Вес ν'' такой, как в п. **(i)**, следовательно, $\chi(\nu'')=\mathrm{ch}(\nu'')$. Отсюда вытекает, что $\Sigma(\omega)=\mathrm{ch}(\omega^{iv})$ и $V(\omega)^2=V(\omega)^3=\ldots=0$. Наконец, мы получаем $\mathrm{ch}(\omega)=\chi(\omega)-\mathrm{ch}(\omega^{iv})=\chi(\omega)-\chi(\omega^{iv})+\chi(\nu'')$.

(d) Предположим, что $a_1+1\neq p$, $a_2+1\neq p$ и $a_3+1=p$. Тогда $\Sigma(\omega)=\chi(\omega^{iv})+\chi(\omega'')$. Вес ω^{iv} удовлетворяет п. **(iv)**(b). Отсюда следует, что $\chi(\omega^{iv})=\mathrm{ch}(\omega^{iv})+\mathrm{ch}(o''')$. Вес ω'' удовлетворяет п. **(iv)**(c), а значит, $\mathrm{ch}(\omega'')=\chi(\omega'')-\chi(\mu')+\chi(\mu'')$. Как в п. (b), получаем $\mathrm{ch}(\omega)=\chi(\omega)-\chi(\omega^{iv})-\chi(\omega'')$.

(e) Наконец, если $a_1+1\neq p$, $a_2+1\neq p$ и $a_3+1\neq p$, то $\Sigma(\omega)=\chi(\omega^{iv})+\chi(\omega'')+\chi(\omega''')-\chi(\nu'')$. Поскольку вес ω лежит в середине алькова, мы получаем требуемое из [8, 8.20].

Лемма 4 [5, лемма 2]. *Пусть $r\geq 3$ и $a_i<p$ при $2\leq i\leq r-1$. Тогда*

$$T=\big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2\mid x_1\leq a-a_r,\ x_2\leq a-a_1,\ x_1+x_2=a\big\}\subset \mathrm{Irr}(V(\omega)|H),$$

и для любого веса из T существует примитивный относительно подгруппы H вектор такого веса.

Предложение 4. (i) *При $G=A_3(K)$ кратность* $\mathrm{mult}(\omega,a)=0$*, за исключением случая, когда $a_2\leq a\leq m$.*

(ii) *При $G=A_r(K)$, $r>3$, кратность* $\mathrm{mult}(\omega,a)=0$ *при $a>m$.*

(iii) *Выполняется* $\mathrm{mult}(\omega,m)\geq a_2+a_3+\ldots+a_{r-1}+1$.

Доказательство. Пункты (i) и (ii) следуют из [7, предложение 1.2]. Пункт (iii) вытекает из леммы 4.

2. Представления групп $G = A_3(K)$ и $A_4(K)$

2.1. $G = A_3(K)$

Доказательство предложения 1. Пункт (1) следует из лемм 2 и 3, поскольку для всех весов ω'–o'' из леммы 3 сумма коэффициентов при ω_1, ω_2 и ω_3 меньше m.

Из леммы 3 вытекает, что для весов ω', ω^{iv}, λ', λ'', μ', μ'', ν', ν'', o' и o'' сумма коэффициентов при ω_1, ω_2 и ω_3 меньше $m-1$. Для ω'' сумма коэффициентов при ω_1, ω_2 и ω_3 равна $m-1$ только при $a_1+a_2+1=p$. Аналогично для ω''' сумма коэффициентов при ω_1, ω_2 и ω_3 равна $m-1$ только, если $a_2+a_3+1=p$. Поэтому, используя кратности из леммы 2, в случае (2)(c) получаем $\mathrm{mult}(\omega, m-1) = (a_2+2)\cdot 1 = a_2+2$, а для (2)(d) — $\mathrm{mult}(\omega, m-1) = 2\cdot 1 + a_2\cdot 2 = 2a_2+2$.

Пусть $a_1a_2a_3 \neq 0$, $p = a_1+a_2+1$ и $p < a_2+a_3+2$. Тогда по лемме 3 $\mathrm{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \chi(\omega'') + \chi(\lambda')$. Из леммы 2 следует, что $\mathrm{mult}(\omega, m-1) = 2a_2+2-(p-a_1-2+1) = a_1+2a_2-p+1 = a_2$.

Предположим, что $p < a_1+a_2+2$, $a_1a_2a_3 \neq 0$ и $p = a_2+a_3+1$. По лемме 3 $\mathrm{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \chi(\omega''') + \chi(\lambda')$. Из леммы 2 следует, что $\mathrm{mult}(\omega, m-1) = 2a_2+2-(p-a_3-2+1) = 2a_2+a_3-p+1 = a_2$. Пункт (2)(a) доказан.

Наконец, пусть теперь $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $p = a_1+a_2+1$, $p < a_2+a_3+2$, или $a_1 \neq 0, p-1$, $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$, $p = a_1+a_2+1$, $p < a_2+a_3+2$. Как и выше, из леммы 3 следует, что $\mathrm{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \chi(\omega'') + \chi(\lambda')$. Используя лемму 2 получаем, что в данном случае $\mathrm{mult}(\omega, m-1) = a_2+2-(p-a_1-2+1) = 2$. Аналогично решается случай $a_1 = 0$, $a_3 \neq 0, p-1$, $a_2 \neq 0$, $p < a_1+a_2+2$, $p = a_2+a_3+1$, или $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$, $p < a_1+a_2+2$, $p = a_2+a_3+1$, что завершает доказательство п. (2)(b).

Заметим, что из доказательства следует, что предложение справедливо и для $p = 3$, поскольку явной формулой для характеров мы пользовались только из пп. **(iii)** и **(iv)** леммы 3.

Предложение доказано.

2.2. $G = A_4(K)$

Согласно предложению 1 кратность $\mathrm{mult}(\omega, m)$ при $r = 3$ одинакова для характеристики $p > 0$ и для характеристики 0. Однако при $r > 3$ это не так.

Сначала мы сформулируем результат для ограничений $L(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}$. Нам понадобятся некоторые обозначения. Символами ε_i, $1 \leq i \leq l$, обозначим сигнатуры (веса стандартных $GL_l(\mathbb{C})$ и $SL_l(\mathbb{C})$-модулей). Если мы записываем веса $GL_l(\mathbb{C})$ и $SL_l(\mathbb{C})$ в терминах сигнатур, то строка $(b_1, \ldots, b_l)$ обозначает $\sum_{i=1}^{l} b_i\varepsilon_i$. Заметим, что $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l = 0$ для группы $SL_l(\mathbb{C})$. Хорошо известно, что $\omega_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, l-1$. Классические правила ветвления для общих линейных групп формулируются следующим образом.

Теорема 1 (Желобенко [9, гл. X, § 66, теорема 2]). *Для неприводимого $GL_{l+1}(\mathbb{C})$-модуля $L(b)_{\mathbb{C}}$ со старшим весом b*

$$L(b)_{\mathbb{C}}|GL_l(\mathbb{C}) \cong \oplus_{c<b} L(b)_{\mathbb{C}},$$

где $c < b$ означает

$$b_1 \geq c_1 \geq b_2 \geq c_2 \geq \ldots \geq b_l \geq c_l \geq b_{l+1}.$$

Лемма 5. *Пусть $G = A_4(\mathbb{C})$. Тогда* $\mathrm{mult}(\omega, m) = (a_2+a_3+2)(a_2+1)(a_3+1)/2$.

Доказательство. Сначала предположим, что $a_2 \geq a_3$. Используем теорему 1 для $l = 4$ и 3. Расширим SL_5-модуль $L(\omega)_{\mathbb{C}}$ до $GL_5(\mathbb{C})$-модуля со старшим весом $b = (m, a_2+a_3+a_4, a_3+a_4, a_4, 0)$ и рассмотрим естественные вложения

$$H_{\mathbb{C}} \subset GL_3(\mathbb{C}) \subset GL_4(\mathbb{C}) \subset GL_5(\mathbb{C}).$$

По теореме 1 $L(b)_{\mathbb{C}}|GL_4(\mathbb{C}) \cong \oplus_c L(c)_{\mathbb{C}}$, где суммирование производится по всем четверкам $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, для которых

$$m \geq c_1 \geq a_2 + a_3 + a_4 \geq c_2 \geq a_3 + a_4 \geq c_3 \geq a_4 \geq c_4 \geq 0.$$

Имеем $L(c)_{\mathbb{C}}|GL_3(\mathbb{C}) \cong \oplus_d L(d)_{\mathbb{C}}$, где суммирование производится по всем тройкам $d = (d_1, d_2, d_3)$, таким что

$$c_1 \geq d_1 \geq c_2 \geq d_2 \geq c_3 \geq d_3 \geq c_4.$$

Заметим, что $L(d)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}} \cong L(\mu)_{\mathbb{C}}$, где

$$\mu = (d_1 - d_2)\omega_1 + (d_2 - d_3)\omega_2,$$

поскольку $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ для $SL_3(\mathbb{C})$.

Нам нужно найти число факторов $L(\mu)_{\mathbb{C}}$, для которых $(d_1 - d_2) + (d_2 - d_3) = m$. Отсюда следует, что $d_1 = c_1 = m$ и $d_3 = c_4 = 0$. Другие коэффициенты, c_2, c_3 и d_2, — произвольные целые числа, удовлетворяющие неравенствам (2.1) и (2.2):

$$a_2 + a_3 + a_4 \geq c_2 \geq a_3 + a_4 \geq c_3 \geq a_4, \tag{2.1}$$

$$c_2 \geq d_2 \geq c_3. \tag{2.2}$$

Согласно этим неравенствам

$$\begin{aligned}
\mathrm{mult}(\omega, m) = [(a_2 + a_3 + 1) \cdot 1 + (a_2 + a_3) \cdot 2 + \ldots + (a_2 + 2)a_3] \\
+ [(a_2 + 1)(a_2 + 1) + \ldots + (a_3 + 1)(a_3 + 1)] + [a_3 \cdot a_3 + \ldots + 1 \cdot 1] \\
= (a_2 + a_3 + 1)[1 + 2 + \ldots + a_3] - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (a_3 - 1) \cdot a_3] \\
+(a_2 + a_3 + 2)(a_2 - a_3 + 1)(a_3 + 1)/2 + a_3(a_3 + 1)(2a_3 + 1)/6 \\
= (a_2 + a_3 + 1)(a_3 + 1)a_3/2 - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (a_3 - 1) \cdot a_3] \\
+(a_2 + a_3 + 2)(a_2 - a_3 + 1)(a_3 + 1)/2 + a_3(a_3 + 1)(2a_3 + 1)/6 \\
= (a_2 + a_3 + 1)(a_3 + 1)a_3/2 - [1^2 + 2^2 + 3^2 + a_3^2] + [1 + 2 + 3 + \ldots + a_3] \\
+(a_2 + a_3 + 2)(a_2 - a_3 + 1)(a_3 + 1)/2 + a_3(a_3 + 1)(2a_3 + 1)/6 \\
= (a_2 + a_3 + 1)(a_3 + 1)a_3/2 + (a_3 + 1)a_3/2 + (a_2 + a_3 + 2)(a_2 - a_3 + 1)(a_3 + 1)/2 \\
= (a_2 + a_3 + 2)(a_3 + 1)a_3/2 + (a_2 + a_3 + 2)(a_2 - a_3 + 1)(a_3 + 1)/2 \\
= (a_2 + a_3 + 2)(a_2 + 1)(a_3 + 1)/2.
\end{aligned}$$

Если $a_3 > a_2$, то рассуждая аналогичным образом, мы получаем ту же формулу.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $G = A_4(K)$ и вес ω является p-ограниченным. Тогда*

(i) *Если $a_2 + a_3 + 2 > p$, $a_2 + 1 < p$ и $a_3 + 1 < p$, то $\mathrm{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \chi(\nu) - \sum_j k_j\chi(\mu_j)$, где*

$$\nu = (a_1 + a_2 + a_3 + 2 - p)\omega_1 + (p - a_3 - 2)\omega_2 + (p - a_2 - 2)\omega_3 + (a_2 + a_3 + a_4 + 2 - p)\omega_4,$$

$$k_j \in \mathbb{Z},\ \mu_j = m_1^j\omega_1 + m_2^j\omega_2 + m_3^j\omega_3 + m_4^j\omega_4 \text{ и } m_1^j + m_2^j + m_3^j + m_4^j < a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

(ii) *Во всех остальных случаях $\mathrm{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \sum_j k_j\chi(\mu_j)$, где $k_j \in \mathbb{Z}$, $\mu_j = m_1^j\omega_1 + m_2^j\omega_2 + m_3^j\omega_3 + m_4^j\omega_4$ и $m_1^j + m_2^j + m_3^j + m_4^j < a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\langle\omega+\rho,\alpha_i\rangle\le p$ при $1\le i\le 4$, суммирование в правой части формулы Янцена (предложение 3) производится по корням $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_4$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ и $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$.

Имеем

$$\langle\omega+\rho,\alpha_i+\alpha_{i+1}\rangle=a_i+a_{i+1}+2\le 2p,\quad 1\le i\le 3,$$

$$\langle\omega+\rho,\alpha_j+\alpha_{j+1}+\alpha_{j+2}\rangle=a_j+a_{j+1}+a_{j+2}+3\le 3p,\quad j=1,2,$$

$$\langle\omega+\rho,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\rangle=a_1+a_2+a_3+a_4+4\le 4p,$$

$$\omega^{1,k}=\sigma_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,kp}.\omega=\omega-(kp-a_1-a_2-a_3-a_4-4)(\omega_1+\omega_4),\quad k=1,2,3,$$

$$\omega^{2,k}=\sigma_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,kp}.\omega=\omega-(kp-a_1-a_2-a_3-3)(\omega_1+\omega_3-\omega_4),\quad k=1,2,$$

$$\omega^{3,k}=\sigma_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,kp}.\omega=\omega-(kp-a_2-a_3-a_4-3)(-\omega_1+\omega_2+\omega_4),\quad k=1,2,$$

$$\omega^{4,1}=\sigma_{\alpha_1+\alpha_2,p}.\omega=\omega-(p-a_1-a_2-2)(\omega_1+\omega_2-\omega_3),$$

$$\omega^{5,1}=\sigma_{\alpha_2+\alpha_3,p}.\omega=\omega-(p-a_2-a_3-2)(-\omega_1+\omega_2+\omega_3-\omega_4),$$

$$\omega^{6,1}=\sigma_{\alpha_3+\alpha_4,p}.\omega=\omega-(p-a_3-a_4-2)(-\omega_2+\omega_3+\omega_4).$$

Следовательно,

$$\Sigma(\omega)=\sum_{i=1}^{6}\sum_k c_{i,k}\chi(\omega^{i,k}),$$

где $k=1,2,3$ для $i=1$, $k=1,2$ для $i=2$ и 3, а также $k=1$ во всех остальных случаях. Коэффициенты $c_{i,k}$ — неотрицательные целые числа и $c_{i,1}\in\{0,1\}$.

Предположим, что $c_{i,j}\ne 0$ для некоторых i,j. Вес $\mu=\omega^{i,k}$ не всегда будет доминантным. Если один из его коэффициентов равен -1, то $\chi(\mu)=0$. В противном случае мы можем применить к весу μ некоторые из отражений σ_s, $s=1,2,3,4$, и сделать его доминантным.

Для $\mu=m_1\omega_1+m_2\omega_2+m_3\omega_3+m_4\omega_4$ имеем

$$\sigma_1.\mu=\sigma_1(\mu+\rho)-\rho=(-m_1-2)\omega_1+(m_1+m_2+1)\omega_2+m_3\omega_3+m_4\omega_4,$$

$$\sigma_2.\mu=(m_1+m_2+1)\omega_1+(-m_2-2)\omega_2+(m_2+m_3+1)\omega_3+m_4\omega_4,$$

$$\sigma_3.\mu=m_1\omega_1+(m_2+m_3+1)\omega_2+(-m_3-2)\omega_3+(m_3+m_4+1)\omega_4,$$

$$\sigma_4.\mu=m_1\omega_1+m_2\omega_2+(m_3+m_4+1)\omega_3+(-m_4-2)\omega_4.$$

Следовательно, для любого $s=1,2,3,4$ сумма коэффициентов веса $\sigma_s.\mu$ будет $\le m_1+m_2+m_3+m_4$. Значит,

$$\Sigma(\omega)=\chi(\omega)-\sum_j k_j\chi(\mu_j),\tag{2.3}$$

где $k_j\in\mathbb{Z}$, $\mu_j=m_1^j\omega_1+m_2^j\omega_2+m_3^j\omega_3+m_4^j\omega_4$ и $m_1^j+m_2^j+m_3^j+m_4^j<a_1+a_2+a_3+a_4$, за исключением случая $c_{5,1}\ne 0$. Последнее верно тогда и только тогда, когда $a_2+a_3+2>p$. Тогда $\omega^{5,1}=(a_1+a_2+a_3+2-p)\omega_1+(p-a_3-2)\omega_2+(p-a_2-2)\omega_3+(a_2+a_3+a_4+2-p)\omega_4$. Имеем $\chi(\omega^{5,1})=0$ для $a_2+1=p$ или $a_3+1=p$. В противном случае характер $\chi(\omega^{5,1})$ ненулевой и этот вес доминантный. Полагая $\nu=\omega^{5,1}$, получаем при $a_2+a_3+2>p$, $a_2+1<p$ и $a_3+1<p$

$$\Sigma(\omega)=\chi(\omega)-\chi(\nu)-\sum_j k_j\chi(\mu_j),\tag{2.4}$$

где $\nu=(a_1+a_2+a_3+2-p)\omega_1+(p-a_3-2)\omega_2+(p-a_2-2)\omega_3+(a_2+a_3+a_4+2-p)\omega_4$, $k_j\in\mathbb{Z}$. Теперь из формул (2.3) и (2.4) следует искомое.

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 2. Пусть сначала $a_2 + a_3 + 2 > p$, $a_2 + 1 < p$ и $a_3 + 1 < p$. По лемме 6(i) $\mathrm{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \chi(\nu) - \sum_j k_j \chi(\mu_j)$, где

$$\nu = (a_1 + a_2 + a_3 + 2 - p)\omega_1 + (p - a_3 - 2)\omega_2 + (p - a_2 - 2)\omega_3 + (a_2 + a_3 + a_4 + 2 - p)\omega_4,$$

$k_j \in \mathbb{Z}$, $\mu_j = m_1^j\omega_1 + m_2^j\omega_2 + m_3^j\omega_3 + m_4^j\omega_4$ и $m_1^j + m_2^j + m_3^j + m_4^j < a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Ограничивая модуль $L(\omega)$ на подгруппу H, мы получаем, что для всех μ_j и для всех $\nu_{j,k} = n_1^{j,k}\omega_1 + n_2^{j,k}\omega_2 \in \mathrm{Irr}\, V(\mu_j)|H$ выполняется следующее неравенство

$$n_1^{j,k} + n_2^{j,k} \leq m_1^j + m_2^j + m_3^j + m_4^j < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = m.$$

Ограничивая модули $V(\omega)$ и $V(\nu)$ на подгруппу H и применяя лемму 5, получаем $\mathrm{mult}(\omega, m) = (a_2 + a_3 + 2)(a_2 + 1)(a_3 + 1)/2 - (2p - a_2 - a_3 - 2)(p - a_2 - 1)(p - a_3 - 1)/2 = (a_2 + a_3 + 2 - p)(2a_2a_3 - pa_2 - pa_3 + 2p^2 + 2a_2 + 2a_3 - 2p + 2)/2$.

Теперь предположим, что коэффициенты a_i не удовлетворяют условиям п. (1). Тогда из леммы 6(ii) следует, что $\mathrm{ch}(\omega) = \chi(\omega) - \sum_j k_j\chi(\mu_j)$, где $k_j \in \mathbb{Z}$, $\mu_j = m_1^j\omega_1 + m_2^j\omega_2 + m_3^j\omega_3 + m_4^j\omega_4$ и $m_1^j + m_2^j + m_3^j + m_4^j < a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Рассуждая, как в п. (1), мы получаем искомое.

Предложение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Andersen H.H., Jantzen J.C., Soergel W.** Representations of quantum groups at a pth root of unity and of semisimple groups in characteristic p: independence of p. Paris: Astérisque. 1994. No. 220. 321 p. doi : 10.24033/ast.251 .
2. **Fiebig P.** An upper bound on the exceptional characteristics for Lusztig's character formula // J. Reine Angew. Math. 2012. Vol. 673. P. 1–31. doi: 10.1515/CRELLE.2011.170 .
3. **Shchigolev V.** Weyl submodules in restrictions of simple modules // J. Algebra. 2009. Vol. 321, no. 5. P. 1453–1462. doi: 10.1016/j.jalgebra.2008.11.034 .
4. **Osinovskaya A.A.** Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1-subgroups // Commun. in Algebra. 2003. Vol. 31, no. 5. P. 2357–2379. doi: 10.1081/AGB-120019001 .
5. **Осиновская А.А.** Ограничения представлений специальной линейной группы на подсистемные подгруппы типа A_2 // Записки научных семинаров ПОМИ. 2017. Т. 455. С. 130–153.
6. **Osinovskaya A.A., Suprunenko I.D.** On the Jordan block structure of images of some unipotent elements in modular irreducible representations of the classical algebraic groups // J. Algebra. 2004. Vol. 273, no. 2. P. 586–600. doi: 10.1016/j.jalgebra.2003.06.001 .
7. **Osinovskaya A.A.** On the restrictions of modular irreducible representations of algebraic groups of type A_n to naturally embedded subgroups of type A_2 // J. Group Theory. 2005. Vol. 8, no. 1. P. 43–92. doi: 10.1515/jgth.2005.8.1.43 .
8. **Jantzen J.C.** Representations of algebraic groups. 2nd ed. Providence: Americ. Math. Soc., 2003. 576 p. (Ser. Math. Surveys and Monogr.; vol. 107.)
9. **Желобенко Д.П.** Компактные группы Ли и их представления. 2-е издание, дополненное. М.: МЦНМО, 2007. 552 с.

Поступила 12.05.2022
После доработки 18.07.2022
Принята к публикации 25.07.2022

Осиновская Анна Александровна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
г. Минск
e-mail: anna@im.bas-net.by

REFERENCES

1. Andersen H.H., Jantzen J.C., Soergel W. *Representations of quantum groups at a* pth *root of unity and of semisimple groups in characteristic* p*: independence of* p. Paris: Société mathématique de France. Astérisque, no. 220. 1994, 321 p.
2. Fiebig P. An upper bound on the exceptional characteristics for Lusztig's character formula. *J. Reine Angew. Math.*, 2012, vol. 673, pp. 1–31. doi: 10.1515/CRELLE.2011.170 .
3. Shchigolev V. Weyl submodules in restrictions of simple modules. *J. Algebra*, 2009, vol. 321, no. 5, pp. 1453–1462. doi: 10.1016/j.jalgebra.2008.11.034 .
4. Osinovskaya A.A. Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1-subgroups. *Comm. Algebra*, 2003, vol. 31, no. 5, pp. 2357–2379. doi: 10.1081/AGB-120019001 .
5. Osinovskaya A.A. The restrictions of representations of the special linear group to subsystem subgroups of type A_2. *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 234, no. 2, pp. 203–218. doi: 10.1007/s10958-018-3997-4 .
6. Osinovskaya A., Suprunenko I. On the Jordan block structure of images of some unipotent elements in modular irreducible representations of the classical algebraic groups. *J. Algebra*, 2004, vol. 273, no. 2, pp. 586–600. doi: 10.1016/j.jalgebra.2003.06.001 .
7. Osinovskaya A.A. On the restrictions of modular irreducible representations of algebraic groups of type A_n to naturally embedded subgroups of type A_2. *J. Group Theory*, 2005, vol. 8, no. 1, pp. 43–92. doi: 10.1515/jgth.2005.8.1.43 .
8. Jantzen J.C. *Representations of algebraic groups*, Second edition. Providence: Americ. Math. Soc., 2003, Ser. Math. Surveys and Monogr., vol. 107, 576 p. ISBN: 978-0-8218-4377-2 .
9. Želobenko D.P. Compact Lie groups and their representations. Providence: Americ. Math. Soc., 1973, Ser. Trans. Math. Monogr., vol. 40, 448 p. doi: 10.1090/mmono/040 . Original Russian text published in Zhelobenko D.P. *Kompaktnye gruppy Li i ikh predstavleniya.* Moscow: MTsNMO Publ., 2007, 552 p.

Received May 12, 2022
Revised July 18, 2022
Accepted July 25, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Basic Research (project no. F21-054).

Anna Aleksandrovna Osinovskaya, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220119 Belarus, e-mail: anna@im.bas-net.by .

Cite this article as: A. A. Osinovskaya. Estimates for the number of large composition factors in the restrictions of representations of special linear groups on subsystem subgroups of type A_2. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 155–165.