ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.444

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ СОВПАДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

В. В. Напалков (мл.), А. А. Нуятов

В работе рассматривается следующая задача. Пусть H — некоторое гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных на множестве $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, и $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ — некоторые полные системы функций в H, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^m$, $m \geq 1$. Обозначим

$$\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} (e_1(\cdot,z),f)_H \, \forall z\in\Omega_1, \quad \widetilde{H}=\{\widetilde{f},\, f\in H\},$$
$$(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}} \overset{def}{=} (f_2,f_1)_H,\ \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}}=\|f_1\|_H \quad \forall \widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2\in\widetilde{H},$$
$$\widehat{f}(z) \overset{def}{=} (e_2(\cdot,z),f)_H \, \forall z\in\Omega_1, \quad \widehat{H}=\{\widehat{f},\, f\in H\},$$
$$(\widehat{f}_1,\widehat{f}_2)_{\widehat{H}} \overset{def}{=} (f_2,f_1)_H,\ \|\widehat{f}_1\|_{\widehat{H}}=\|f_1\|_H \quad \forall \widehat{f}_1,\widehat{f}_2\in\widehat{H}.$$

Необходимо найти условие, при выполнении которого пространства $\widehat{H}$ и $\widetilde{H}$ совпадают, т. е. $\widehat{H}$ и $\widetilde{H}$ состоят из одних и тех же функций и

$$\|f\|_{\widehat{H}} = \|f\|_{\widetilde{H}} \quad \forall f\in\widehat{H}=\widetilde{H}.$$

Также изучается вопрос: при каких условиях пространства $\widehat{H}$ и $\widetilde{H}$ эквивалентны? В случае, когда системы функций $\{e_j(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $j=1,2$, являются ортоподобными системами разложения в пространстве H с одной и той же мерой μ, заданной на Ω_1, в этой статье установлен критерий; найдено условие, которое является необходимым и достаточным для того, чтобы пространства $\widehat{H}$ и $\widetilde{H}$ совпадали (были эквивалентны). Отметим, что в случае произвольного пространства H и произвольных полных в H систем функций $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ найденное условие всегда является необходимым, т. е. если пространства $\widehat{H}$ и $\widetilde{H}$ совпадают (эквивалентны), то это условие выполнено. В случае когда системы функций $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ являются ортоподобными системами разложения в пространстве H с разными мерами μ_1 и μ_2, соответственно, заданными на Ω_1, в этой статье построены примеры конкретных пространств H, конкретных полных в H систем функций $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ таких, что указанное условие выполнено, однако пространства $\widehat{H}$ и $\widetilde{H}$ не совпадают (не эквивалентны).

Ключевые слова: системы разложения, подобные ортогональным, гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, базис Рисса, задача описания сопряженного пространства.

V. V. Napalkov (jr.), A. A. Nuyatov. On a condition for the coincidence of transform spaces for functionals in a Hilbert space.

The paper considers the following problem. Let H be some reproducing kernel Hilbert space consisting of functions given on a set $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, and let $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ and $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ be some complete systems of functions in H, where $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^m$, $m \geq 1$. Define

$$\widetilde{f}(z) \overset{\text{def}}{=} (e_1(\cdot,z),f)_H \, \forall z\in\Omega_1, \quad \widetilde{H}=\{\widetilde{f},\, f\in H\},$$
$$(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}} \overset{\text{def}}{=} (f_2,f_1)_H,\ \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}}=\|f_1\|_H \quad \forall \widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2\in\widetilde{H},$$
$$\widehat{f}(z) \overset{\text{def}}{=} (e_2(\cdot,z),f)_H \, \forall z\in\Omega_1, \quad \widehat{H}=\{\widehat{f},\, f\in H\},$$
$$(\widehat{f}_1,\widehat{f}_2)_{\widehat{H}} \overset{\text{def}}{=} (f_2,f_1)_H,\ \|\widehat{f}_1\|_{\widehat{H}}=\|f_1\|_H \quad \forall \widehat{f}_1,\widehat{f}_2\in\widehat{H}.$$

It is required to find a condition under which the spaces $\widehat{H}$ and $\widetilde{H}$ coincide, i.e., $\widehat{H}$ and $\widetilde{H}$ consist of the same functions and

$$\|f\|_{\widehat{H}} = \|f\|_{\widetilde{H}} \quad \forall f\in\widehat{H}=\widetilde{H}.$$

We also study the question of conditions under which the spaces $\widehat{H}$ and $\widetilde{H}$ are equivalent. In the case when the systems of functions $\{e_j(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $j=1,2$, are orthosimilar decomposition systems in the space H with the same measure μ given on Ω_1, a criterion is established; more exactly, a condition is found that is necessary and sufficient for the coincidence (equivalence) of the spaces $\widehat{H}$ and $\widetilde{H}$. Note that, in the case of an arbitrary space H and arbitrary systems of functions $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ and $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ that are complete in H, the found condition is always necessary; i.e., if the spaces $\widehat{H}$ and $\widetilde{H}$ coincide (are equivalent), then this condition is fulfilled. In the case when the systems of functions $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ and $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ are orthosimilar decomposition systems in the space H with different measures μ_1 and μ_2, respectively, given on Ω_1, we construct specific examples of spaces H and systems of functions $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ and $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ complete in H and such that the specified condition is met, but the spaces $\widehat{H}$ and $\widetilde{H}$ are not the same (not equivalent).

Keywords: orthosimilar decomposition systems, reproducing kernel Hilbert space, Riesz basis, problem of describing the dual space.

MSC: 46E22, 47B32, 30H05, 32A38

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-142-154

Введение

В различных задачах комплексного анализа часто возникает необходимость сравнить два гильбертова пространства, состоящие из функций или последовательностей. Такие вопросы возникают, например, при решении задач теории уравнений свертки, задач интерполяции аналитических функций, в теории инвариантных подпространств и т. д. Представленные в статье вопросы имеют самостоятельный интерес. Например, как отмечено в книге [1, задача 39], существует неограниченное линейное преобразование гильбертова пространства, которое ограничено на элементах базиса. Частным случаем рассматриваемых в работе ортоподобных систем разложения являются ортонормированные и ортогональные базисы.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных на некотором множестве точек $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, $n\ge 1$. Пусть $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2,$ — две полные системы в пространстве H, где $\Omega_1\subset\mathbb{C}^m$, $m\ge 1$, — некоторое множество точек. Определим пространства $\widehat{H}$, $\widetilde{H}$:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(z) &\stackrel{def}{=} (e_1(\cdot,z),f)_H && \forall z\in\Omega_1,\ \widetilde{H}=\{\widetilde{f},\ f\in H\};\\
(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}} &\stackrel{def}{=} (f_2,f_1)_H,\ \ \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}}=\|f_1\|_H && \forall \widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2\in\widetilde{H};\\
\widehat{f}(z) &\stackrel{def}{=} (e_2(\cdot,z),f)_H && \forall z\in\Omega_1,\ \widehat{H}=\{\widehat{f},\ f\in H\};\\
(\widehat{f}_1,\widehat{f}_2)_{\widehat{H}} &\stackrel{def}{=} (f_2,f_1)_H,\ \ \|\widehat{f}_1\|_{\widehat{H}}=\|f_1\|_H && \forall \widehat{f}_1,\widehat{f}_2\in\widehat{H}.
\end{aligned}
$$

Всюду ниже предполагается, что пространство H — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром. Нетрудно показать, что пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ являются также пространствами с воспроизводящим ядром. Мы изучаем вопрос: при каких условиях гильбертовы пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ совпадают, т. е. пространства состоят из одних и тех же функций и нормы этих пространств равны? Также мы исследуем ситуацию, когда гильбертовы пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ эквивалентны, т. е. когда пространства состоят из одних и тех же функций и нормы этих пространств эквивалентны. В этой работе вводится понятие систем функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2,$ согласованных с некоторым линейным непрерывным взаимно однозначным оператором $\mathcal{T}$, осуществляющим автоморфизм пространства H. Доказано, что условие согласованности систем функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2,$ является необходимым условием для того, чтобы пространства $\widehat{H}$ и $\widetilde{H}$ совпадали или были эквивалентны. В общем случае, это условие не является достаточным. По этому поводу в данной работе сконструированы различные примеры. Однако если предположить, что системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2,$ суть ортоподобные системы разложения с одной и той же мерой μ, заданной на Ω_1, то согласованность систем функций$\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2,$ с некоторым линейным непрерывным взаимно однозначным оператором является необходимым и достаточным условием для того, чтобы пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ совпадали или были эквивалентны. Заметим, что ортоподобные системы разложения были введены в работах Т. П. Лукашенко [2]. Нам понадобится

О п р е д е л е н и е 1. Системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2,$ принадлежащие гильбертову пространству H называются согласованными с оператором $\mathcal{T}\colon H\to H$, если выполнено соотношение

$$
(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2))_H=\overline{(e_1(\cdot,z_2),\mathcal{T}e_2(\cdot,z_1))_H}\ \ \forall z_1,z_2\in\Omega_1. \tag{0.1}
$$

1. Основные результаты

Сформулируем и докажем следующее

Утверждение 1. *Пусть* $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$ *— две полные системы в гильбертовом пространстве* H. *Если пространства* $\widetilde{H}$ *и* $\widehat{H}$ *совпадают, то найдется линейный непрерывный взаимно однозначный унитарный оператор* $\mathcal{T}$, *осуществляющий автоморфизм пространства* H, *такой, что системы* $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, *согласованы с оператором* $\mathcal{T}$, *т. е. выполняется соотношение* (0.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ совпадают, то по теореме из работы [3] найдется линейный непрерывный взаимно однозначный унитарный оператор $\mathcal{A}\colon H \longrightarrow H$ такой, что

$$\mathcal{A}\colon e_1(\cdot,z)\mapsto e_2(\cdot,z) \quad \forall z\in\Omega_1. \tag{1.1}$$

Поскольку оператор $\mathcal{A}$ унитарный, $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^{-1}$ и

$$\mathcal{A}^*\colon e_2(\cdot,z)\mapsto e_1(\cdot,z) \quad \forall z\in\Omega_1. \tag{1.2}$$

Из соотношений (1.1), (1.2) вытекает

$$(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2))_H=(\mathcal{A}^{-1}e_2(\cdot,z_1),\mathcal{A}e_1(\cdot,z_2))_H$$
$$=((\mathcal{A}\circ\mathcal{A})^{-1}e_2(\cdot,z_1),e_1(\cdot,z_2))_H=\overline{(e_1(\cdot,z_2),\mathcal{T}e_2(\cdot,z_1))_H} \quad \forall z_1,z_2\in\Omega_1,$$

где оператор $\mathcal{T}$ определен как $\mathcal{T}\overset{def}{=}(\mathcal{A}\circ\mathcal{A})^{-1}$. Таким образом, выполнено условие (0.1); системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, согласованы с оператором $\mathcal{T}$.

Утверждение доказано.

В случае эквивалентности пространств $\widehat{H}$ и $\widetilde{H}$ верен аналогичный утверждению 1 результат, только здесь не требуется, чтобы оператор $\mathcal{T}$ был унитарным.

Утверждение 2. *Пусть* $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$ *— две полные системы функций в гильбертовом пространстве* H. *Если пространства* $\widetilde{H}$ *и* $\widehat{H}$ *эквивалентны, то найдется линейный непрерывный взаимно однозначный оператор* $\mathcal{T}$, *осуществляющий автоморфизм пространства* H, *такой, что системы* $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, *согласованы с оператором* $\mathcal{T}$, *т. е. выполняется соотношение* (0.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ эквивалентны, то по теореме из работы [3] найдется линейный непрерывный взаимно однозначный оператор $\mathcal{A}\colon H\longrightarrow H$ такой, что выполнено соответствие (1.1). Далее, повторяя почти дословно рассуждения из доказательства утверждения 1, мы получаем, что справедливо равенство

$$(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2))_H=\overline{(e_1(\cdot,z_2),\mathcal{T}e_2(\cdot,z_1))_H} \quad \forall z_1,z_2\in\Omega_1,$$

где оператор $\mathcal{T}$ определен как $\mathcal{T}\overset{def}{=}\mathcal{A}^*\circ\mathcal{A}^{-1}$. Таким образом, системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, согласованы с оператором $\mathcal{T}$.

Утверждение доказано.

Возникает следующий вопрос: верны ли утверждения, обратные утверждению 1 и утверждению 2? Например, допустим, что в гильбертовом пространстве H имеются две полные системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, и, как и выше, определены два гильбертовых пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$. Пусть системы $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, согласованы с некоторым линейным непрерывным взаимно однозначным унитарным оператором $\mathcal{T}$, т. е. соотношение (0.1) выполнено. Будет ли отсюда следовать, что пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ совпадают? Ниже приведены примеры, которые показывают, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицательный.

Однако можно наложить дополнительные условия на системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, такие, что будут верны утверждения, обратные утверждению 1 и утверждению 2. Пусть $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, — две ортоподобные системы разложения в пространстве H, Ω_1 — пространство с мерами μ_1,μ_2 [2; 6]; любая функция $f\in H$ представляется в виде

$$f(t)=\int_{\Omega_1}(f,e_j(\cdot,z))_H\cdot e_j(t,z)\,d\mu_j(z)\quad\forall f\in H,\forall t\in\Omega,\quad j=1,2.$$

Далее мы считаем, что Ω_1 счетно-конечно, т. е. может быть представлено в виде счетного объединения подмножеств конечной меры μ_1 и μ_2. Докажем следующие утверждения, предполагая, что меры μ_1 и μ_2 совпадают, т. е. $\mu_1=\mu_2=\mu$.

Утверждение 3. *Пусть $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, — две ортоподобные системы разложения в пространстве H с одной и той же мерой μ. Предположим, что найдется линейный непрерывный взаимно однозначный унитарный оператор $\mathcal{T}$, осуществляющий изометрию пространства H, такой,что системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, согласованы с оператором $\mathcal{T}$, т. е. выполнено соотношение* (0.1). *Тогда пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, — две ортоподобные системы разложения в пространстве H, которые согласованы с оператором $\mathcal{T}$, т. е. выполнено соотношение (0.1):

$$(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2))_H=\overline{(e_1(\cdot,z_2),\mathcal{T}e_2(\cdot,z_1))_H}\quad\forall z_1,z_2\in\Omega_1,$$

или, что то же самое

$$(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2))_H=(\mathcal{T}e_2(\cdot,z_1),e_1(\cdot,z_2))_H\quad\forall z_1,z_2\in\Omega_1.$$

Последнее равенство влечет соотношение

$$\Big(\sum_{k=1}^m c_ke_1(\cdot,z_k),e_2(\cdot,\xi)\Big)_H=\Big(\sum_{k=1}^m c_k\mathcal{T}e_2(\cdot,z_k),e_1(\cdot,\xi)\Big)_H\quad\forall\xi\in\Omega_1.\tag{1.3}$$

Здесь $\{z_k\}_{k=1}^m$ — произвольный набор точек из Ω_1, а $\{c_k\}_{k=1}^m$ — произвольный набор комплексных чисел. Пусть $p(t)\stackrel{def}{=}\sum_{k=1}^m c_ke_1(t,z_k)$, $t\in\Omega$, — произвольная функция из линейной оболочки системы функций $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, и $q(t)\stackrel{def}{=}\sum_{k=1}^m c_k\mathcal{T}e_2(t,z_k)$, $t\in\Omega$, — функция из линейной оболочки системы функций $\{\mathcal{T}e_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$. Функции p,q принадлежат пространству H, системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, — ортоподобные системы разложения в H, поэтому

$$p(t)=\int\limits_{\Omega_1}(p,e_2(\cdot,\xi))_He_2(t,\xi)\,d\mu(\xi)\quad\forall t\in\Omega,$$

$$q(t)=\int\limits_{\Omega_1}(q,e_1(\cdot,\xi))_He_1(t,\xi)\,d\mu(\xi)\quad\forall t\in\Omega.$$

В силу аналога равенства Парсеваля [2, теорема 1] и соотношения (1.3) справедливо равенство

$$\|p\|_H^2=\int\limits_{\Omega_1}|(p,e_2(\cdot,\xi))|^2\,d\mu(\xi)=\int\limits_{\Omega_1}|(q,e_1(\cdot,\xi))|^2\,d\mu(\xi)=\|q\|_H^2$$

или $\|p\|_H=\|q\|_H$. Определим оператор $\mathcal{A}$ по следующему правилу: $\mathcal{A}\colon p\mapsto q$. По теореме Банаха [4, с. 240, теорема 2] $\mathcal{A}$ продолжается до линейного непрерывного взаимно однозначного унитарного оператора, действующего из H на H. Тогда оператор $\mathcal{A}_1\stackrel{def}{=}\mathcal{T}^{-1}\circ\mathcal{A}$ — изометрия пространства H и $\mathcal{A}_1\colon e_1(\cdot,\xi)\mapsto e_2(\cdot,\xi)$ $\forall\xi\in\Omega_1$. Применяя [3, теорема 1], мы получаем $\widehat{H}=\widetilde{H}$.

Утверждение доказано.

Также справедливо

Утверждение 4. *Пусть* $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, *— две ортоподобные системы разложения в пространстве* H *с одной и той же мерой* μ. *Предположим, что найдется линейный непрерывный взаимно однозначный оператор* $\mathcal{T}$, *осуществляющий автоморфизм пространства* H, *такой, что системы функций* $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, *согласованы с оператором* $\mathcal{T}$, *т. е. выполнено соотношение* (0.1). *Тогда пространства* $\widetilde{H}$ *и* $\widehat{H}$ *эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится аналогично доказательству утверждения 3; отличие здесь в том, что в данном случае строится оператор $\mathcal{A}_1' \stackrel{def}{=} \mathcal{T}^{-1}\circ\mathcal{A}$, который является автоморфизмом (а не изометрией, как было в доказательстве утверждения 3) пространства H. Тогда в силу [3, теорема 2] пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ эквивалентны. Комбинируя утверждения 1, 2, а также утверждения 3, 4, мы формулируем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$ *— две ортоподобные системы разложения в гильбертовом пространстве* H *с одной и той же мерой* μ. *Для того чтобы пространства* $\widetilde{H}$ *и* $\widehat{H}$ *совпадали, необходимо и достаточно, чтобы нашелся линейный непрерывный взаимно однозначный унитарный оператор* $\mathcal{T}$, *осуществляющий изометрию пространства* H, *такой, что системы функций* $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, *согласованы с оператором* $\mathcal{T}$, *т. е. выполняется соотношение*

$$(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2))_H=\overline{(e_1(\cdot,z_2),\mathcal{T}e_2(\cdot,z_1))_H}\quad \forall z_1,z_2\in\Omega_1.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$ *— две ортоподобные системы разложения в гильбертовом пространстве* H *с одной и той же мерой* μ. *Для того чтобы пространства* $\widetilde{H}$ *и* $\widehat{H}$ *были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы нашелся линейный непрерывный взаимно однозначный оператор* $\mathcal{T}$, *осуществляющий автоморфизм пространства* H, *такой, что системы функций* $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, *согласованы с оператором* $\mathcal{T}$, *т. е. выполняется соотношение*

$$(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2))_H=\overline{(e_1(\cdot,z_2),\mathcal{T}e_2(\cdot,z_1))_H}\quad \forall z_1,z_2\in\Omega_1.$$

2. Примеры

Ниже приводятся примеры, иллюстрирующие, что утверждения 3, 4 неверны, если не накладывать дополнительные условия на системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$. Действительно, мы покажем, что если $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$ — две ортоподобные системы разложения в гильбертовом пространстве H с мерами μ_1,μ_2 и $\mu_1\neq\mu_2$, то утверждения 3, 4 могут оказаться неверными; из условия согласованности систем функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j=1,2$, с некоторым оператором $\mathcal{T}$, вообще говоря, не следует, что пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ совпадают (или эквивалентны).

2.1. Случай конечномерного пространства

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ — некоторый фиксированный набор различных комплексных чисел. Рассмотрим набор целых функций от переменной $t\in\mathbb{C}$: $e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\ldots,e^{\lambda_n t}$. Пусть H — линейная оболочка системы экспонент $\{e^{\lambda_k t}\}_{k=1}^n$, т. е. совокупность всех функций вида

$$f(t)=\sum_{k=1}^n c_k^f e^{\lambda_k t},\quad t\in\mathbb{C},$$

где c_k^f, $k=1,2,\ldots,n$, — некоторые комплексные числа. На H введем скалярное произведение: если

$$f(t)=\sum_{k=1}^n c_k^f e^{\lambda_k t},\quad g(t)=\sum_{k=1}^n c_k^g e^{\lambda_k t},\quad t\in\mathbb{C},$$

то

$$(f,g)_H \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} c_k^f \cdot \overline{c_k^g}.$$

С введенным по этому правилу скалярным произведением H является конечномерным унитарным пространством. Более того, из определения скалярного произведения в H следует, что $(e^{\lambda_k t}, e^{\lambda_j t}) = \delta_{k,j}$, $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Также нетрудно подсчитать, что $c_k^f = (f(t), e^{\lambda_k t})_H$. Так что система $\{e^{\lambda_k t}\}_{k=1}^n$ является ортонормированным базисом в H. Значит, любая функция $f \in H$ представляется в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k^f e^{\lambda_k t} = \sum_{k=1}^{n} (f(\tau), e^{\lambda_k \tau})_H e^{\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Тем самым, конечно, система $\{e^{\lambda_k t}\}_{k=1}^n$ — ортоподобная система разложения в пространстве H. Зафиксируем произвольное число $t_0 \in \mathbb{C}$. Пусть f — произвольная функция из H. Из оценки

$$|f(t_0)| = \Big|\sum_{k=1}^{n} c_k^f e^{\lambda_k t_0}\Big| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |c_k^f|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |e^{\lambda_k t_0}|^2}$$

$$\le \|f\|_H \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \exp\big(\max_{1\le k\le n} 2Re(\lambda_k t_0)\big)} = \|f\|_H \cdot \sqrt{n \cdot \exp\big(\max_{1\le k\le n} 2Re(\lambda_k t_0)\big)}$$

$$= C_{t_0}\,\|f\|_H$$

вытекает, что пространство H является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ — некоторый фиксированный набор не равных нулю комплексных чисел. Введем обозначения

$$e_1(t,k) \stackrel{def}{=} e^{\lambda_k t}, \quad e_2(t,k) \stackrel{def}{=} a_k\, e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Тогда система функций $\{e_1(\cdot,k)\}_{k=1}^n$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 в пространстве H (даже ортонормированным базисом). В качестве меры μ_1 здесь выступает считающая мера, т. е. в качестве Ω_1 берется множество точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$; под мерой μ_1 подмножества $A \subset \{\lambda_k\}_{k=1}^n$ понимаем количество точек λ_k, попавших в множество A.

Далее, нетрудно проверить, что справедливо равенство

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|a_k|^2}\,(f(\cdot), e_2(\cdot,k))_H e_2(t,k) \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Значит, система функций $\{e_2(\cdot,k)\}_{k=1}^n$ также является ортоподобной системой разложения с некоторой мерой μ_2 заданной на $\Omega_1 = \{\lambda_k\}_{k=1}^n$ в пространстве H. Заметим, что мера μ_2 отлична от меры μ_1. С каждой точкой λ_k здесь связывается вес $\dfrac{1}{|a_k|^2}$; если A — некоторое подмножество точек из $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, $A = \{\lambda_{k_j}\}_{j=1}^p$, $0 < p \le n$, то

$$\mu_2(A) = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{|a_k|^2}.$$

Рассмотрим пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$. В данном случае эти пространства будут состоять из n-мерных векторов $\{\widetilde{f}(\lambda_k)\}_{k=1}^n$ и $\{\widehat{f}(\lambda_k)\}_{k=1}^n$ соответственно. Здесь

$$\widetilde{f}(\lambda_k) \stackrel{def}{=} (e_1(\cdot,k), f(\cdot))_H = (e^{\lambda_k\cdot\tau}, f(\tau))_H, \quad f \in H, \quad k = 1, \ldots, n; \tag{2.1}$$

$$\widehat{f}(\lambda_k) \stackrel{def}{=} (e_2(\cdot,k), f(\cdot))_H = a_k\,(e^{\lambda_k\cdot\tau}, f(\tau))_H, \quad f \in H, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

При этом

$$\left(\{\widetilde{f}_1(\lambda_k)\}_{k=1}^n, \{\widetilde{f}_2(\lambda_k)\}_{k=1}^n\right)_{\widetilde{H}} \stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_H = \sum_{k=1}^n c_k^{f_2} \cdot \overline{c_k^{f_1}} = \sum_{k=1}^n \widetilde{f}_1(\lambda_k) \cdot \overline{\widetilde{f}_2(\lambda_k)}. \tag{2.3}$$

Мы воспользовались равенством (см. (2.1)): $c_k^f = \overline{\widetilde{f}(\lambda_k)},\ k = 1, \ldots, n,\ \forall f \in H$. Далее

$$\left(\{\widehat{f}_1(\lambda_k)\}_{k=1}^n, \{\widehat{f}_2(\lambda_k)\}_{k=1}^n\right)_{\widehat{H}} \stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_H = \sum_{k=1}^n c_k^{f_2} \cdot \overline{c_k^{f_1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|a_k|^2} \widehat{f}_1(\lambda_k) \cdot \overline{\widehat{f}_2(\lambda_k)}. \tag{2.4}$$

Здесь мы использовали равенство (см. (2.2)): $c_k^f = \dfrac{1}{a_k}\overline{\widehat{f}(\lambda_k)}\ \forall f \in H,\ k = 1, \ldots, n$. Как видно, в данном случае пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ разные. Конечно, $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ состоят из одних и тех же векторов, но скалярные произведения в пространствах $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ вычисляются по разным правилам, поэтому пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ разные.

Тем не менее можно проверить, что системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$, согласованы с некоторым унитарным оператором $\mathcal{T}$. Действительно, в данном случае это означает, что найдется линейный непрерывный взаимно однозначный унитарный оператор $\mathcal{T}\colon H \to H$ такой, что выполнено равенство

$$(e_1(\cdot, k), e_2(\cdot, j))_H = \overline{(e_1(\cdot, j), \mathcal{T} e_2(\cdot, k))}_H \quad \forall k = 1, \ldots, n, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

На самом деле, так как система функций $\{e^{\lambda_k t}\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис в пространстве H, справедливы равенства

$$(e_1(\cdot, k), e_2(\cdot, j))_H = 0, \quad k \neq j, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq j \leq n;$$

$$(e_1(\cdot, k), e_2(\cdot, k))_H = (e^{\lambda_k t}, a_k \cdot e^{\lambda_k t})_H = \overline{(a_k \cdot e^{\lambda_k t}, e^{\lambda_k t})}_H = \overline{(e^{\lambda_k t}, \overline{a_k} \cdot e^{\lambda_k t})}_H$$
$$= \overline{\left(e^{\lambda_k t}, \frac{\overline{a_k}}{a_k} \cdot a_k \cdot e^{\lambda_k t}\right)}_H = \overline{\left(e_1(\cdot, k), \frac{\overline{a_k}}{a_k} \cdot e_2(\cdot, k)\right)}_H \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Как нетрудно здесь увидеть, оператор $\mathcal{T}$ выражается в базисе $\{e^{\lambda_k t}\}_{k=1}^n$ следующей диагональной матрицей:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{a_1}}{a_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{\overline{a_2}}{a_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{\overline{a_n}}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Так как оператор умножения на комплексное число, модуль которого равен 1, есть унитарный оператор в пространстве $\mathbb{C}$, то оператор $\mathcal{T}$ является линейным непрерывным взаимно однозначным унитарным оператором, осуществляющим изометрию пространства H.

Таким образом, системы функций $\{e_j(\cdot, k)\}_{1\leq k\leq n}$, $j = 1, 2$, согласованы с унитарным оператором $\mathcal{T}$, однако пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ разные. Этот пример показывает, что утверждение 3 становится неверным, если мы не требуем, чтобы системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$, являлись ортоподобными системами разложения с одной и той же мерой μ, заданной на Ω_1.

2.2. Случай пространства Смирнова

Пространство H состоит из тех же функций, что и пространство Смирнова. В пространстве Смирнова $E_2(G)$, G — выпуклый многоугольник, имеется базис Рисса из экспонент [5, теорема 3.1]; обозначим его как $\{e_1(\cdot,k)\}_{k=1}^{\infty}$. Это означает, что любая функция $f(z)\in E_2(G)$ единственным образом представляется в виде

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^f\cdot e_1(z,k),\quad z\in G, \tag{2.5}$$

где $\{c_k^f\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность комплексных чисел; при этом справедливо соотношение

$$C_1\|f\|^2_{E_2(G)}\le\sum_{k=1}^{\infty}|c_k^f|^2\le C_2\|f\|^2_{E_2(G)}\ \ \forall f\in E_2(G), \tag{2.6}$$

где константы $C_1,C_2>0$ не зависят от f.

На элементах пространства $E_2(G)$ определим скалярное произведение

$$(f,g)_H\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{\infty}c_k^f\cdot\overline{c_k^g}.$$

Введенное по данному правилу скалярное произведение определяется корректно в силу неравенства Коши — Буняковского и соотношений (2.5), (2.6). Это скалярное произведение порождает норму $\|f\|_H\overset{def}{=}\sqrt{(f,f)_H}$. В силу соотношения (2.6) норма $\|\cdot\|_H$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_{E_2(G)}$. Можно даже сказать, что существует линейный непрерывный самосопряженный взаимно однозначный оператор S, действующий из $E_2(G)$ на $E_2(G)$ такой, что

$$(f,g)_H=(f,Sg)_{E_2(G)}\ \ \forall f,g\in E_2(G).$$

Последнее вытекает, например, из [6, лемма 1]. Поэтому H, состоящее из элементов пространства $E_2(G)$, само является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(f,g)_H, f,g\in H$. Конечно, система экспонент $\{e_1(\cdot,k)\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит пространству H и полна там. Далее нетрудно показать (в силу определения скалярного произведения в H), что система $\{e_1(\cdot,k)\}_{k=1}^{\infty}$ — это ортонормированный базис в пространстве H. Пространство $\widetilde{H}$ по определению состоит из элементов

$$\widetilde{f}(k)\overset{def}{=}(e_1(\cdot,k),f)_H,\quad k=1,2,\dots,\ \ \forall f\in H.$$

Как видно, $\{\widetilde{f}(k)\}_{k=1}^{\infty}$ — это последовательности комплексных чисел. Также в силу полноты системы функций $\{e^1(\cdot,k)\}_{k=1}^{\infty}$ соответствие $f\to\widetilde{f}$ инъективно, т. е. последовательность $\{\widetilde{f}(k)\}_{k=1}^{\infty}$ однозначно определяет функцию $f\in H$.

На множестве последовательностей $\widetilde{H}=\Big\{\{\widetilde{f}(k)\}_{k=1}^{\infty}\colon f\in H\Big\}$ вводится скалярное произведение по правилу

$$(\{\widetilde{f}(k)\}_{k=1}^{\infty},\{\widetilde{g}(k)\}_{k=1}^{\infty})_{\widetilde{H}}\overset{def}{=}(g,f)_H\ \ \forall\widetilde{f},\widetilde{g}\in\widetilde{H}.$$

С введенным по такому правилу скалярным произведением $\widetilde{H}$ становится гильбертовым пространством. Рассмотрим пространство $\widehat{H}$. Определим систему

$$\{e_2(\cdot,k)\}_{k=1}^{\infty}\colon e_2(\cdot,k)\overset{def}{=}a_k\cdot e_1(\cdot,k),\quad k=1,2,\dots,$$

где $\{a_k\}_{k\ge1}$ — некоторая последовательность не равных нулю комплексных чисел, такая, что, например, $\lim_{k\to\infty}|a_k|=+\infty$. Пространство $\widehat{H}$ состоит из элементов

$$\widehat{f}(k)\overset{def}{=}(e_2(\cdot,k),f)_H,\quad k=1,2,\dots,\ \ \forall f\in H,$$

и

$$(\{\widehat{f}(k)\}_{k=1}^{\infty},\{\widehat{g}(k)\}_{k=1}^{\infty})_{\widehat{H}}\overset{def}{=}(g,f)_H\ \ \forall\widehat{f},\widehat{g}\in\widehat{H}.$$

Применяя рассуждения, как было сделано в предыдущем подразделе, (см. (2.3), (2.4)) мы можем аналогично показать, что

$$\widehat{f}(k) = a_k \widetilde{f}(k), \quad k = 1, 2, \dots, \qquad \forall f \in H;$$

$$\left(\{\widetilde{f}_1(k)\}_{k=1}^{\infty}, \{\widetilde{f}_2(k)\}_{k=1}^{\infty}\right)_{\widetilde{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_1(k) \cdot \overline{\widetilde{f}_2(k)} \qquad \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H};$$

$$\left(\{\widehat{f}_1(k)\}_{k=1}^{\infty}, \{\widehat{f}_2(k)\}_{k=1}^{\infty}\right)_{\widehat{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^2} \widehat{f}_1(k) \cdot \overline{\widehat{f}_2(k)} \quad \forall \widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in \widehat{H}.$$

Пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$, в данном случае, — отличающиеся друг от друга пространства последовательностей, поскольку $\lim_{k\to\infty} |a_k| = +\infty$. Рассуждая аналогично, как в предыдущем подразделе, можно доказать, что

$$(e_1(\cdot, k), e_2(\cdot, j))_H = 0, \quad k \neq j, \quad k, j = 1, 2, \dots;$$

$$(e_1(\cdot, k), e_2(\cdot, k))_H = \overline{\left(e_1(\cdot, k), \frac{\overline{a_k}}{a_k} \cdot e_2(\cdot, k)\right)_H} \quad \forall k = 1, 2, \dots.$$

Это значит, что системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $j = 1, 2$, согласованы с линейным непрерывным взаимно однозначным унитарным оператором $\mathcal{T}\colon H \to H$, который выражается в базисе $\{e_1(\cdot, k)\}_{k=1}^{\infty}$ следующей бесконечной диагональной матрицей:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{a_1}}{a_1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\overline{a_2}}{a_2} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\overline{a_n}}{a_n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Мы построили пример, когда системы функций $\{e_j(\cdot, k)\}_{k\geq 1}$, $j = 1, 2$, согласованы с линейным непрерывным взаимно однозначным унитарным оператором $\mathcal{T}\colon H \to H$, однако меры ортоподобных систем $\{e_1(\cdot, k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{e_2(\cdot, k)\}_{k=1}^{\infty}$ разные и пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ состоят из разных элементов. Таким образом, условие равенства мер в утверждениях 3, 4 существенно и его нельзя убрать.

Заметим, что аналогичные рассуждения можно провести и для пространства, эквивалентного пространству Бергмана в многоугольниках. Для пространства Бергмана в многоугольниках построены базисы Рисса из экспонент [7]. Однако следует заметить, что существование базисов Рисса из экспонент — довольно редкий случай [8]. Этот факт служит мотивацией на исследование других систем функций, которыми можно заменить базисы.

2.3. Случай весового пространства последовательностей и пространства Бергмана в круге

Пространство l_w^2 состоит из последовательностей комплексных чисел $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|\mathbf{x}\|_{l_w^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k+1}} < \infty.$$

Весовое пространство последовательностей l_w^2 (здесь $w = \{w_k^2\}_{k=0}^{\infty}$, $w_k = \sqrt{1/(k+1)}$, $k = 0, 1, 2 \dots$ — вес) является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{l_w^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k \cdot \overline{y_k}}{k+1}, \quad \mathbf{x} = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad \mathbf{y} = \{y_k\}_{k=0}^{\infty}.$$

Рассмотрим семейство последовательностей, зависящих от комплексного параметра $z \in D$ (D — единичный круг с центром в нуле):

$$e_1(k,z) \stackrel{def}{=} z^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad |z| < 1.$$

Пространство Бергмана $B_2(D)$ состоит из функций, голоморфных в единичном круге $D = \{z\colon |z| < 1\}$ и суммируемых с квадратом модуля по площади:

$$\|f\|^2_{B_2(G)} = \frac{1}{\pi} \int_D |f(z)|^2 \, dv(z) < \infty \ \ \forall f \in B_2(D).$$

Система мономов $\{e_1(k,\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве $B_2(D)$ (см., например, [9, с. 17]). При этом справедливо равенство Парсеваля

$$(f,g)_{B_2(D)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k \cdot \overline{g_k}}{k+1} \ \ \forall f, g \in B_2(D);$$

$$f_k \stackrel{def}{=} (f, e_1(k,\cdot))_{B_2(D)}, \quad g_k \stackrel{def}{=} (g, e_1(k,\cdot))_{B_2(D)}. \tag{2.7}$$

Система мономов $\{e_1(k,\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$, очевидно, полна в пространстве $B_2(D)$. Каждому линейному непрерывному функционалу на $B_2(D)$, порожденному функцией $f \in B_2(D)$, поставим в соответствие последовательность

$$\check{f}_k \stackrel{def}{=} (e_1(k,\cdot), f)_{B_2(D)} = \overline{f}_k, \quad k = 0, 1, \dots, \ \ \forall f \in B_2(D). \tag{2.8}$$

Введем пространство последовательностей

$$\check{B}_2(D) \stackrel{def}{=} \left\{ \{\check{f}_k\}_{k=0}^{\infty} \colon f \in B_2(D) \right\}, \quad \left(\{\check{f}_k\}_{k=0}^{\infty}, \{\check{g}_k\}_{k=0}^{\infty}\right)_{\check{B}_2(D)} \stackrel{def}{=} (g,f)_{B_2(D)}$$

$$\forall \, \{\check{f}_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad \{\check{g}_k\}_{k=0}^{\infty} \in \check{B}_2(D).$$

Из равенств (2.7), (2.8) вытекает соотношение

$$\left(\{\check{g}_k\}_{k=0}^{\infty}, \{\check{f}_k\}_{k=0}^{\infty}\right)_{\check{B}_2(D)} = (f,g)_{B_2(D)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k \cdot \overline{g_k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\check{g}_k \cdot \overline{\check{f}_k}}{k+1} \ \ \forall \{\check{g}_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad \{\check{f}_k\}_{k=0}^{\infty} \in \check{B}_2(D). \tag{2.9}$$

Равенство (2.9) показывает, что пространства $\check{B}_2(D)$ и l_w^2 совпадают (поскольку нормы пространств $\check{B}_2(D)$ и l_w^2 совпадают). Согласно теоремам 1, 2 из работы [10] семейство последовательностей $\{e(\cdot,z)\}_{z\in D}$ — ортоподобная система в l_w^2 с мерой $(1/\pi) \cdot dv(z)$; любую последовательность $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k\geq 0} \in l_w^2$ можно представить в виде

$$x_k = \frac{1}{\pi} \int_D (\mathbf{x}, e_1(\cdot,z))_{l_w^2} e_1(k,z) \, dv(z), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $dv(z)$ — мера Лебега.

Пусть a — некоторое произвольное фиксированное комплексное число, отличное от нуля. Определим систему последовательностей из пространства l_w^2:

$$\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in D} \colon e_2(\cdot,z) \stackrel{def}{=} a \cdot e_1(\cdot,z) \ \ \forall z \in D.$$

Система последовательностей $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in D}$ будет также ортоподобной системой разложения в пространстве l_w^2. Из определения $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in D}$ нетрудно видеть, что любая последовательность $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k\geq 0} \in l_w^2$ может быть представлена в виде

$$x_k = \int\limits_D (\mathbf{x}, e_2(\cdot,z))_{l_w^2} e_2(k,z) \, \frac{1}{|a|^2} dv(z), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

В отличие от системы $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in D}$ (которая является ортоподобной системой разложения с мерой $1/(\pi)\cdot dv(z)$), система $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in D}$ будет ортоподобной системой разложения с мерой $1/(\pi|a|^2)\cdot dv(z)$ в пространстве l^2_w. Обозначим

$$\widetilde{\mathbf{x}}(z) \stackrel{def}{=} (e_1(\cdot,z),\mathbf{x})_{l^2_w} \quad \forall z\in D, \quad \widetilde{l}^2_w=\{\widetilde{\mathbf{x}},\,\mathbf{x}\in l^2_w\};$$
$$(\widetilde{\mathbf{x}}_1,\widetilde{\mathbf{x}}_2)_{\widetilde{l}^2_w} \stackrel{def}{=} (\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)_{l^2_w}, \quad \|\widetilde{\mathbf{x}}_1\|_{\widetilde{l}^2_w}=\|\mathbf{x}_1\|_{l^2_w} \quad \forall\widetilde{\mathbf{x}}_1,\widetilde{\mathbf{x}}_2\in\widetilde{l}^2_w;$$
$$\widehat{\mathbf{x}}(z) \stackrel{def}{=} (e_2(\cdot,z),\mathbf{x})_{l^2_w} \quad \forall z\in D, \quad \widehat{l}^2_w=\{\widehat{\mathbf{x}},\,\mathbf{x}\in l^2_w\};$$
$$(\widehat{\mathbf{x}}_1,\widehat{\mathbf{x}}_2)_{\widehat{l}^2_w} \stackrel{def}{=} (\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)_{l^2_w}, \quad \|\widehat{\mathbf{x}}_1\|_{\widehat{l}^2_w}=\|\mathbf{x}_1\|_{l^2_w} \quad \forall\widehat{\mathbf{x}}_1,\widehat{\mathbf{x}}_2\in\widehat{l}^2_w.$$

Заметим, что здесь $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ — последовательности из l^2_w, а $\widetilde{\mathbf{x}}_1,\widetilde{\mathbf{x}}_2,\widehat{\mathbf{x}}_1,\widehat{\mathbf{x}}_2$ — это функции, заданные в единичном круге. По теореме 1 из статьи [10] пространство $\widetilde{l}^2_w$ совпадает с пространством $B_2(D)$. Далее, пространство $\widehat{l}^2_w$ состоит из тех же функций, что и пространство $\widetilde{l}^2_w=B_2(D)$. Нетрудно видеть, что, поскольку $e_2(\cdot,z)=a\cdot e_1(\cdot,z)\,\forall z\in D$, выполняется равенство $\widehat{\mathbf{x}}(z)\equiv a\cdot\widetilde{\mathbf{x}}(z)$, $z\in D\,\forall\mathbf{x}\in l^2_w$. Из определения пространств $\widetilde{l}_w$ и $\widehat{l}_w$ вытекает

$$(a\cdot\widetilde{\mathbf{x}}_1,a\cdot\widetilde{\mathbf{x}}_2)_{\widehat{l}^2_w}=(\widehat{\mathbf{x}}_1,\widehat{\mathbf{x}}_2)_{\widehat{l}^2_w}=(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)_{l^2_w}=(\widetilde{\mathbf{x}}_1,\widetilde{\mathbf{x}}_2)_{\widetilde{l}^2_w}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_D\widetilde{\mathbf{x}}_1(z)\cdot\overline{\widetilde{\mathbf{x}}_2(z)}\,dv(z) \quad \forall\widetilde{\mathbf{x}}_1,\widetilde{\mathbf{x}}_2\in\widehat{l}^2_w.$$

Значит,

$$\|h\|^2_{\widehat{l}^2_w}=\frac{1}{\pi|a|^2}\int_D|h(z)|^2\,dv(z)=\frac{1}{|a|^2}\|h\|^2_{\widetilde{l}^2_w} \quad \forall h\in\widehat{l}^2_w.$$

Таким образом, пространства $\widehat{l}^2_w$ и $\widetilde{l}^2_w$ состоят из одних и тех же функций пространства $B_2(D)$, но нормы этих пространств разные. Поэтому $\widehat{l}^2_w$ и $\widetilde{l}^2_w$ — разные пространства.

Однако системы функций $\{e_j(\cdot,z),\}_{z\in D}$, $j=1,2$, согласованы с некоторым линейным непрерывным взаимно однозначным унитарным оператором $\mathcal{T}\colon H\to H$. Действительно,

$$\big(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2)\big)_{l^2_w}=\big(e_1(\cdot,z_1),a\cdot e_1(\cdot,z_2)\big)_{l^2_w}=\overline{\big(a\cdot e_1(\cdot,z_2),e_1(\cdot,z_1)\big)_{l^2_w}}$$
$$=\overline{\big(e_1(\cdot,z_2),\overline{a}\cdot e_1(\cdot,z_1)\big)_{l^2_w}}=\overline{\Big(e_1(\cdot,z_2),\frac{\overline{a}}{a}\cdot a\cdot e_1(\cdot,z_1)\Big)_{l^2_w}}$$
$$=\overline{\Big(e_1(\cdot,z_2),\frac{\overline{a}}{a}\cdot e_2(\cdot,z_1)\Big)_{l^2_w}}=\overline{\big(e_1(\cdot,z_2),\mathcal{T}e_2(\cdot,z_1)\big)_{l^2_w}} \quad \forall z_1,z_2\in D.$$

где в качестве оператора $\mathcal{T}$ мы взяли оператор умножения последовательности из l^2_w на комплексное число, по модулю, равное 1: $\overline{a}/a=e^{-i2arg(a)}$. Конечно, $\mathcal{T}$ — унитарный оператор, действующий из l^2_w на l^2_w. Здесь интересно следующее: если взять в качестве числа a вещественное число, то оператор $\mathcal{T}$ — тождественный оператор. Следовательно, условие совпадения мер существенно в формулировке утверждения 3.

Итак, мы привели пример, когда системы функций $\{e_j(\cdot,z)\}_{z\in D}$, $j=1,2$, согласованы с линейным непрерывным взаимно однозначным оператором $\mathcal{T}$; оператор $\mathcal{T}$ — есть унитарный оператор, но условие равенства мер не выполнено, и поэтому пространства $\widetilde{l}^2_w$ и $\widehat{l}^2_w$ только эквивалентны (но не совпадают, как должно бы быть по утверждению 3). Кстати, если a — комплексное число, по модулю равное 1, то все условия утверждения 3 выполняются (меры, соответствующие ортоподобным системам $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in D}$, $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in D}$ совпадают). Оператор $\mathcal{T}$ в данном случае есть оператор умножения на число $e^{-i2arg(a)}=1/a^2$, и пространства $\widehat{l}^2_w$ и $\widetilde{l}^2_w$ совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Халмош П.** Гильбертово пространство в задачах. М: Мир, 1970, 351 с.
2. **Лукашенко Т.П.** О свойствах систем разложения подобных ортогональным // Изв. РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 5. С. 187–206.
3. **Напалков В. В., Напалков В. В. (мл.)** Об изоморфизме гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 6. С. 665–667
4. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984, 752 с.
5. **Левин Б. Я., Любарский Ю. И.** Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент// Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1975. Т. 39, №3. С. 657–702.
6. **Напалков В. В. (мл.)** Об ортоподобных системах разложения в пространстве аналитических функций и задаче описания сопряженного пространства, Уфим. мат. журн. 2011. Т. 3, №1. С. 31–42.
7. **Исаев К.П.** Безусловные базисы из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых областях: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН. Уфа: 2004. 173 с.
8. **Исаев К. П., Юлмухаметов Р.С.** Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками // Изв. РАН. Сер. математическая. 2007. Т. 71, №6. С. 69–90.
9. **Гайер Д.** Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М: Мир, 1986. 216 с.
10. **Напалков В. В., Напалков В. В. (мл.)** К вопросу о совпадении гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами, связанных специальным преобразованием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т.25, № 2. С.149–159. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-149-159 .

Поступила 28.04.2022
После доработки 10.08.2022
Принята к публикации 15.08.2022

Напалков Валерий Валентинович
д-р физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН
г. Уфа
e-mail: vnap@mail.ru

Нуятов Андрей Александрович
канд. физ.-мат. наук, преподаватель
ННГУ имени Н. И. Лобачевского
г. Нижний Новгород
e-mail: nuyatov1aa@rambler.ru

REFERENCES

1. Halmos P.R. *A Hilbert space problem book.* NY,: Springer, 1982, 373 p. doi: 10.1007/978-1-4684-9330-6 . Translated to Russian under the title *Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh*, Moscow: Mir Publ., 1970, 351 p.
2. Lukashenko T.P. Properties of expansion systems similar to orthogonal ones. *Izv. Math.*, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 1035–1054. doi: 10.1070/IM1998v062n05ABEH000215 .
3. Napalkov V.V., Napalkov V.V. (jr.) On isomorphism of reproducing kernel Hilbert spaces. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 95, no. 3, pp. 270–272. doi: 10.1134/S1064562417030243 .
4. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional analysis*, 2nd ed. Pergamon, 1982, 604 p. ISBN: 9781483138251 . Original Russian text published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz*, Moscow: Nauka Publ., 1984, 752 p.
5. Levin B.Ya., Lyubarskii Yu.I. Interpolation by means of special classes of entire functions and related expansions in series of exponentials. *Math. USSR Izv.*, 1975, vol. 9, no. 3, pp. 621–662. doi: 10.1070/IM1975v009n03ABEH001493 .
6. Napalkov V.V. (jr.) On orthosimilar systems in a space of analytical functions and the problem of describing the dual space. *Ufa Math. J.*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 30–41.

7. Isaev K.P. *Bezuslovnye bazisy iz eksponent v prostranstvah Bergmana na vypuklyh oblastyah* [Unconditional bases of exponentials in Bergman spaces on convex domains]. Dissertation, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Ufa: IMVTs UNTs RAN, 2004, 173 p.
8. Isaev K.P., Yulmukhametov R.S. The absence of unconditional bases of exponentials in Bergman spaces on non-polygonal domains. *Izv. Math.*, 2007, vol. 71, no. 6, pp. 1145–1166. doi: 10.1070/IM2007v071n06ABEH002385 .
9. Gaier D. *Lectures on complex approximation.* Boston: Birkhauser, 1987, 196 p. doi: 10.1007/978-1-4612-4814-9 . Translated to Russian under the title *Lektsii po teorii approksimatsii v kompleksnoi oblasti.* Moscow: Mir Publ., 1986, 216 p.
10. Napalkov V.V., Napalkov V.V. (jr.) On the equivalence of reproducing kernel Hilbert spaces connected by a special transform. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 200–215 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-149-159 .

Received April 28, 2022
Revised August 10, 2022
Accepted August 15, 2022

Valerii Valentinovich Napalkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre RAS, Ufa, 450077 Russia, e-mail: vnap@mail.ru

Andrey Alexandrovich Nuyatov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, 603950 Russia, e-mail: nuyatov1aa@rambler.ru .

Cite this article as: V. V. Napalkov (jr.), A. A. Nuyatov. On a condition for the coincidence of transform spaces for functionals in a Hilbert space. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 142–154.