ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.977

К ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ[1]

А. И. Мачтакова, Н. Н. Петров

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая системой

$$D^{(\alpha_i)}z_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V,$$

где $D^{(\alpha)}f$ — производная по Капуто порядка α функции f. Множество допустимых управлений игроков — выпуклые компакты. Терминальное множество состоит из цилиндрических множеств M_i вида

$$M_i = M_i^1 + M_i^2,$$

где M_i^1 — линейное подпространство фазового пространства, M_i^2 — выпуклый компакт из ортогонального дополнения к M_i^1. Предложены два подхода к решению задачи, обеспечивающие окончание игры за определенное гарантированное время в классе квазистратегий. При первом подходе преследователи строят свои управления так, чтобы терминальные множества “покрывали” область неопределенности убегающего. При втором подходе преследователи строят свои управления, используя разрешающие функции. Теоретические результаты иллюстрируются на модельных примерах.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, дробная производная.

A. I. Machtakova, N. N. Petrov. On a linear group pursuit problem with fractional derivatives.

A problem of pursuit of one evader by a group of pursuers is considered in a finite-dimensional Euclidean space. The dynamics is described by the system

$$D^{(\alpha_i)}z_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V,$$

where $D^{(\alpha)}f$ is the Caputo derivative of order α of a function f. The sets of admissible controls of the players are convex and compact. The terminal set consists of cylindrical sets M_i of the form $M_i = M_i^1 + M_i^2$, where M_i^1 is a linear subspace of the phase space and M_i^2 is a convex compact set from the orthogonal complement of M_i^1. We propose two approaches to solving the problem, which ensure the termination of the game in a certain guaranteed time in the class of quasi-strategies. In the first approach, the pursuers construct their controls so that the terminal sets “cover” the evader’s uncertainty region. In the second approach, the pursuers construct their controls using resolving functions. The theoretical results are illustrated by model examples.

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader, fractional derivative.

MSC: 49N79, 49N70, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-129-141

Введение

В работах Р. Айзекса [1] были заложены основы теории дифференциальных игр преследования-убегания двух лиц, которая к настоящему времени представляет собой фундаментальную содержательную теорию [2;3]. Естественным обобщением теории преследования-убегания двух лиц являются задачи конфликтного взаимодействия группы преследователей и одного или нескольких убегающих [4–6]. Следует отметить, что методы решения задач группового преследования создавались заново; при этом не использовалась теория дифференциальных игр двух лиц. К числу ключевых направлений современного развития теории группового

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 21-71-10070).

преследования-уклонения относится поиск новых задач, для решения которых можно применить ранее разработанные подходы.

В статьях [7;8] изучались дифференциальные игры двух лиц, описываемые уравнениями с дробными производными. Задачи группового преследования-уклонения с дробными производными при условии, что все участники обладают равными возможностями, рассматривались в [9;10].

В данной работе исследуется задача о поимке убегающего группой преследователей в линейной дифференциальной игре с дробными производными без предположения о равенстве всех возможностей у участников конфликта. Предложены два подхода к решению этой задачи. При первом подходе преследователи строят свои управления так, чтобы терминальные множества "покрывали" область неопределенности убегающего. При втором подходе преследователи строят свои управления, используя разрешающие функции.

1. Постановка задачи

О п р е д е л е н и е 1. Пусть q — натуральное число, $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ — функция, такая, что функция $f^{(q)}$ абсолютно непрерывна на $[0,\infty)$, $\alpha \in (q-1, q)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$\big(D^{(\alpha)}f\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(q-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f^{(q)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-q}}\,ds, \quad \text{где} \quad \Gamma(\beta) = \int\limits_0^\infty e^{-s}s^{\beta-1}\,ds.$$

Рассматривается конфликтно-управляемый процесс (дифференциальная игра $G(n+1)$) с участием n преследователей $\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_n$ и одного убегающего $\mathbf{E}$, описываемый системой

$$D^{(\alpha_i)}z_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V. \tag{1.1}$$

Здесь $i \in I = \{1,\ldots,n\}$; $z_i \in \mathbb{R}^{k_i}$; $\alpha_i \in (p_i-1, p_i)$; p_i — натуральные числа; A_i — квадратные матрицы порядка $k_i \times k_i$; B_i, C_i — прямоугольные матрицы порядка $k_i \times q_i$, $k_i \times q$ соответственно; $U_i \subset \mathbb{R}^{q_i}$, $V \subset \mathbb{R}^q$ — выпуклые компакты.

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$z_i^{(l)} = z_{il}^0, \quad l = 0,\ldots,p_i-1, \quad i \in I. \tag{1.2}$$

Терминальные множества $M_i, i \in I$, имеют вид $M_i = M_i^1 + M_i^2$, где M_i^1 — линейное подпространство $\mathbb{R}^{k_i}$, M_i^2 — выпуклый компакт из L_i^1 — ортогонального дополнения к M_i^1 в $\mathbb{R}^{k_i}$. Считаем, что $z_{i0}^0 \notin M_i$ для всех $i \in I$.

Пусть $v : [0,+\infty) \to V$ — измеримая функция. Предысторией $v_t(\cdot)$ в момент t функции v будем называть сужение функции v на $[0,t]$. Измеримая функция $v\colon [0,+\infty) \to V$ называется *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \in [0,+\infty)$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя $\mathbf{P}_i$, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальным данным $z^0 = (z_{il}^0, i \in I, l = 0,\ldots,p_i-1)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего $\mathbf{E}$ измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в U_i.

О п р е д е л е н и е 3. В игре $G(n+1)$ происходит *поимка*, если существует момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_n$ преследователей $\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_n$ такие, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0,T_0]$ найдутся номер $j \in I$ и момент $\tau \in [0,T_0]$, для которых $z_j(\tau) \in M_j$.

О п р е д е л е н и е 4. Разностью по Минковскому множеств A и B называется множество

$$A \overset{*}{-} B = \{c \mid c + B \subset A\}.$$

Введем следующие обозначения:
$\pi_i : \mathbb{R}^{k_i} \to L_i^1$ — оператор ортогонального проектирования;
ν_i — размерность L_i^1;

$$E_\rho(B,\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{\Gamma(l\rho^{-1}+\mu)}$$

— обобщенная функция Миттаг-Леффлера, $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{R}^1$;

$$\xi_i(t) = \sum_{l=0}^{p_i-1} t^l E_{1/\alpha_i}\big(A_i t^{\alpha_i}, l+1\big) z_{il}^0, \quad F_i(t,\tau) = (t-\tau)^{\alpha_i-1} E_{1/\alpha_i}\big(A_i(t-\tau)^{\alpha_i}, \alpha_i\big),$$

$$\Delta = \big\{(t,\tau) \bigm| t \geqslant 0, \tau \in [0,t]\big\}.$$

2. Достаточные условия поимки

Предположение 1. *Существуют матричные функции $D_i(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta$, порядка $k_i \times k_i$ измеримые по (t,τ) такие, что для всех $(t,\tau) \in \Delta$ непусты множества*

$$W_i(t,\tau) = \pi_i F_i(t,\tau) B_i U_i \overset{*}{-} \pi_i D_i(t,\tau) F_i(t,\tau) C_i V.$$

Введем многозначные отображения

$$W_i^*(t,\tau,v) = \pi_i F_i(t,\tau) B_i U_i - \pi_i D_i(t,\tau) F_i(t,\tau) C_i v,$$

$$M_i^2(t) = M_i^2 \overset{*}{-} \int_0^t \pi_i\big(D_i(t,s) - \mathbb{E}\big) F_i(t,s) C_i V\, ds,$$

где $\mathbb{E}$ — единичная матрица.

Предположение 2. *Для всех $i \in I$, $t \geqslant 0$ имеет место*

$$M_i^2(t) \neq \varnothing.$$

Возьмем измеримый селектор $\gamma_i(t,\tau) \in W_i(t,\tau)$. Определим далее

$$\eta_i(t) = \pi_i \xi_i(t) + \int_0^t \gamma_i(t,\tau)\, d\tau.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1, 2 и существуют номер $l \in I$ и момент $T > 0$, для которых существует $\gamma_l(T,\tau) \in W(T,\tau)$, что $\eta_l(T) \in M_l^2(T)$. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим многозначные отображения

$$U_l^2(\tau,v) = \big\{u_l \in U_l \colon \pi_l F_l(T,\tau) B_l u_l - \pi_l D_l(T,\tau) F_l(T,\tau) C_l v - \gamma_l(T,\tau) = 0\big\}.$$

Из предположения 1 следует, что $U_l^2(\tau,v) \neq \varnothing$ для всех $\tau \in [0,T]$, $v \in V$. В силу теоремы измеримого выбора [11] в $U_l(\tau,v)$ существует хотя бы один измеримый селектор $u_l(\tau,v)$. Задаем управление преследователя $\mathbf{P}_l$, полагая

$$u_l(t) = u_l^2(t, v(t)), \quad t \in [0,T].$$

Управления остальных преследователей задаем произвольным образом. Получаем

$$\pi_l z_l(T) = \pi_l \xi_l(T) + \int\limits_0^T \big(\pi_l F_l(T,s) B_l u_l(s) - \pi_l F_l(T,s) C_l v(s)\big) ds$$

$$= \eta_l(T) + \int\limits_0^T \big(\pi_l F_l(T,s) B_l u_l(s) - \pi_l D_l(T,s) F_l(T,s) C_l v(s) - \gamma_l(T,s)\big) ds$$

$$+ \int\limits_0^T \big(\pi_l D_l(T,s) F_l(T,s) C_l v(s) - \pi_l F_l(T,s) C_l v_l(s)\big) ds$$

$$= \eta_l(T) + \int\limits_0^T \big(\pi_l D_l(T,s) F_l(T,s) C_l v(s) - \pi_l F_l(T,s) C_l v_l(s)\big) ds$$

$$\subset M_l^2(T) + \int\limits_0^T \big(\pi_l D_l(T,s) F_l(T,s) C_l v(s) - \pi_l F_l(T,s) C_l v_l(s)\big) ds = M_l^2.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем будем считать, что $\eta_i(t) \notin M_i^2(t)$ для всех $i \in I$, $t \geqslant 0$.

Рассмотрим далее произвольную диагональную матрицу $\mathcal{L}_i$ порядка $\nu_i \times \nu_i$ вида

$$\mathcal{L}_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{i\nu_i} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{i\nu_i}).$$

Будем отождествлять матрицу $\mathcal{L}_i$ с вектором $(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{i\nu_i})$. Неравенство $\mathcal{L}_i \geqslant 0$ будем понимать покоординатно. Введем многозначные отображения

$$\mathcal{M}_i(t,\tau,v) = \big\{\mathcal{L}_i \colon \mathcal{L}_i \geqslant 0, (W_i^*(t,\tau,v) - \gamma_i(t,\tau)) \cap \mathcal{L}_i\big(M_i^2(t) - \eta_i(t)\big) \neq \varnothing\big\}.$$

В силу предположений о параметрах игры отображения $\mathcal{M}_i(t,\tau,v)$ являются замкнутозначными и $0 \in \mathcal{M}_i(t,\tau,v)$ для всех $i \in I$. Пусть далее $J_s = (1, \ldots, \nu_s)$. Определим скалярные функции

$$\lambda_i^0(t,\tau,v) = \sup_{\mathcal{L}_i \in \mathcal{M}_i(t,\tau,v)} \min_{j \in J_i} \lambda_{ij}(t,\tau,v). \tag{2.1}$$

В предположении, что в (2.1) точная верхняя грань достигается, определим множества

$$\mathcal{M}_i^*(t,\tau,v) = \big\{\mathcal{L}_i(t,\tau,v) \in \mathcal{M}_i(t,\tau,v) \colon \lambda_i^0(t,\tau,v) = \min_{j \in J_i} \lambda_{ij}(t,\tau,v)\big\}.$$

Из [11] следует, что при сделанных предположениях множества $\mathcal{M}_i(t,\tau,v)$, $\mathcal{M}_i^*(t,\tau,v)$ являются измеримыми по (τ, v). Селекторы отображения $\mathcal{M}_i^*(t,\tau,v)$ будем называть экстремальными. Среди них по теореме измеримого выбора [11] найдется хотя бы один селектор, измеримый по (τ, v) при любом $t \geqslant t_0$. Возьмем произвольный измеримый по (τ, v) экстремальный селектор $\mathcal{L}_i$, зафиксируем его и обозначим $\mathcal{L}_i^*(t,\tau,v) = \mathrm{diag}(\lambda_{i1}^*(t,\tau,v), \ldots, \lambda_{i\nu_i}^*(t,\tau,v))$. Определим функции

$$\lambda_i^*(t,\tau,v) = \min_{j \in J_i} \lambda_{ij}^*(t,\tau,v)$$

и момент времени

$$T = \min\left\{t \geqslant 0 \mid \inf_{v(\cdot)} \max_{i \in I} \int\limits_0^t \lambda_i^*(t,\tau,v(\tau))\, d\tau \geqslant 1\right\}.$$

Если неравенство в скобках не имеет места для конечного $t \geqslant 0$, то полагаем $T = +\infty$. Если $\lambda_i(t,\tau,v) = +\infty$ при некоторых $(t,\tau) \in \Delta$, $i \in I$, $v \in V$, то будем считать, что

$$\int\limits_0^t \lambda_i^*(t,\tau,v(\tau))\,d\tau = +\infty.$$

Предположение 3. $T < +\infty$.

Рассмотрим далее множества $T_{ij}(v(\cdot))$ $(i \in I, j \in J_i)$:

$$T_{ij}(v(\cdot)) = \left\{t \geqslant 0\colon \int\limits_0^t \lambda_{ij}^*(t,\tau,v(\tau))d\tau \geqslant 1\right\}$$

и моменты времени

$$t_{ij}(v(\cdot)) = \begin{cases} \inf\{t\colon t \in T_{ij}(v(\cdot))\}, & \text{если } T_{ij}(v(\cdot)) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } T_{ij}(v(\cdot)) = \varnothing. \end{cases}$$

Предположение 4. 1. *Для любых* $\tau \in [0,T]$, $v \in V$, $l \in I$, $J_l^0 \subset J_l$ *селекторы* $B_l(T,\tau,v) = \operatorname{diag}\big(\beta_{l1}(T,\tau,v),\dots,\beta_{l\nu_l}(T,\tau,v)\big)$, *где*

$$\beta_{lj}(T,\tau,v) = \begin{cases} \lambda_{lj}^*(T,\tau,v), & j \in J_l^0, \\ 0, & j \notin J_l^0, \end{cases}$$

удовлетворяют условию $B_l(T,\tau,v) \in \mathcal{M}_l(T,\tau,v)$.

2. *Для любого* $l \in I$, *любой допустимой функции* $v(\cdot)$ *выполнено следующее условие: если*

$$\int\limits_0^T B_l(T,\tau,v(\tau))d\tau = \mathbb{E},$$

то

$$\int\limits_0^T B_l(T,\tau,v(\tau))M_l^2(T)d\tau \subset M_l^2(T).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1–4. *Тогда в игре* $G(n+1)$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v : [0,T] \to V$ — произвольное допустимое управление убегающего. Введем функции $B_i^*(T,\tau,v) = \big(\beta_{i1}^*(T,\tau,v),\dots,\beta_{i\nu_i}^*(T,\tau,v)\big)$, где

$$\beta_{ij}^*(T,\tau,v) = \begin{cases} \lambda_{ij}^*(T,\tau,v), & \text{если } \tau \in [t_0, t_{ij}^*(v(\cdot))), \\ 0, & \text{если } \tau \in (t_{ij}^*(v(\cdot)), T]; \end{cases}$$

$B_i^*(t,\tau,v)$ — матрица вида

$$B_i^*(t,\tau,v) = \begin{pmatrix} \beta_{i1}^*(t,\tau,v) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{i2}^*(t,\tau,v) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{i\nu_i}^*(t,\tau,v) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $B_i^*(T,t,v)$ является измеримым селектором $\mathcal{M}_i(T,t,v)$. Рассмотрим многозначные отображения

$$U_i(T,\tau,v)=\Big\{u_i\in U_i\colon \big(W_i^*(T,\tau,v)-\gamma_i(T,v)\big)\cap B_i^*(T,\tau,v)(M_i^2(T)-\eta_i(T))\neq\varnothing\Big\}.$$

$U_i(T,\tau,v)\neq\varnothing$ для всех $i\in I$, $\tau\in[t_0,T]$, $v\in V$ и, следовательно, по теореме измеримого выбора [11] у $U_i(T,\tau,v)$ существует хотя бы один измеримый селектор $u_i^*(T,\tau,v)$. Задаем управления преследователей $\mathbf{P}_i, i\in I$, полагая $u_i(\tau)=u_i^*(T,\tau,v(\tau)), i\in I$. Покажем, что данные управления преследователей гарантируют поимку убегающего. Решение задачи Коши (1.1), (1.2) имеет вид (см. [12])

$$\pi_i z_i(t)=\pi_i\xi_i(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\pi_i F_i(t,s)(B_iu_i(s)-C_iv(s))ds.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\pi_i z_i(t)&=\eta_i(T)+\int\limits_0^T\big(\pi_iF_i(T,s)B_iu_i(s)-\pi_iD_i(T,s)F_i(T,s)C_iv(s)-\gamma_i(T,s)\big)\,ds\\&\quad+\int\limits_0^T\big(\pi_iD_i(T,s)F_i(T,s)C_iv(s)-\pi_iF_i(T,s)C_iv(s)\big)\,ds\\&\in\eta_i(T)+\int\limits_0^T B_i^*(T,s,v(s))\big(M_i^2(T)-\eta_i(T)\big)\,ds+\int\limits_0^T B_i^*(T,s,v(s))M_i^2(T)\,ds\\&\quad+\int\limits_0^T\big(\pi_iD_i(T,s)F_i(T,s)C_iv(s)-\pi_iF_i(T,s)C_iv(s)\big)\,ds.\end{aligned}$$

Из определения селекторов B_l^* и условий теоремы вытекает, что существует номер $l\in I$, для которого

$$\int\limits_0^T B_l^*(T,s,v(s))\,ds=\mathbb{E}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^T B_l^*(T,s,v(s))M_l^2(T)\subset M_l^2(T)$$

и, значит,

$$\pi_l z_l(T)\in M_l^2(T)+\int\limits_0^T\big(\pi_lD_l(T,s)F_l(T,s)C_lv(s)-\pi_lF_l(T,s)C_lv(s)\big)\,ds\subset M_l^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Приведем теперь условия на параметры игры, при которых поимка гарантирована при использовании скалярных разрешающих функций.

Определим функции

$$\lambda_i(t,\tau,v,\gamma_i(\cdot))=\sup\big\{\lambda\geqslant0\;\big|\;W_i^*(t,\tau,v)-\gamma_i(t,\tau)\cap\lambda(M_i^2(t)-\eta_i(t))\neq\varnothing\big\}$$

и момент времени

$$T = \min \left\{ t \geqslant 0 \;\middle|\; \inf_{v(\cdot)} \max_{i \in I} \int\limits_0^t \lambda_i(t, \tau, v(\tau), \gamma_i(\cdot))\, d\tau \geqslant 1 \right\}.$$

Если неравенство в скобках не имеет места для конечного $t \geqslant 0$, то полагаем $T = +\infty$. Если $\lambda_i(t, \tau, v, \gamma_i(\cdot)) = +\infty$ при некоторых $(t, \tau) \in \Delta$, $i \in I$, $v \in V$, то будем считать, что

$$\int\limits_0^t \lambda_i(t, \tau, v(\tau), \gamma_i(\cdot))\, d\tau = +\infty.$$

Теорема 3. *Пусть существуют* $\gamma_i(t, \tau)$, $i \in I$, $(t, \tau) \in \Delta$, *для которых выполнены предположения* 1, 2 *и* $T < +\infty$. *Тогда в игре* $G(n+1)$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2. □

Приведем еще один подход к решению задачи преследования.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположение* 1 *и следующие условия.*

1. *Для всех* $i \in I$ *размерность подпространств* L_i^1 *одна и та же.*
2. *Существуют момент* $T > 0$ *и векторы* $\gamma_i \in L_i^1, i \in I$, *такие, что*

   2a) $-\pi_i \xi_i(T) \in \gamma_i + \int_0^T W_i(T, s) d\, s,$

   2b) *для всех* $i \in I$ *и любой допустимой функции* $v(\cdot)$ *векторы*

$$\int\limits_0^T \pi_i \big(D_i(T, s) - \mathbb{E}\big) F_i(T, s) C_i v(s) d\, s$$

не зависят от i *и справедливо включение*

$$\int\limits_0^T \pi \big(D_i(T, s) - \mathbb{E}\big) F_i(T, s) C_i V d\, s \subset \bigcup_{i \in I} \big(\gamma_i + M_i^2\big).$$

Тогда в игре $G(n+1)$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.1 из [4, с. 133]. □

З а м е ч а н и е. Если в системе (1.1) взять все α_i равными единице, то предположения 1, 2 данной работы совпадут с предположением 2.1 из [4, с. 110]. Кроме того, условия теоремы 4 данной работы совпадут с соответствующими условиями теоремы 1.1 с учетом замечания 1.1 из [4, с. 133]. Поэтому теорема 2.1 [4, с. 110] является следствием теорем 1, 2, а теорема 1.1 из [4, с. 133] — следствием теоремы 4 данной работы.

3. Примеры

П р и м е р 1. Рассмотрим игру $G(2)$, в которой система (1.1) имеет вид

$$D^{(\alpha)} z = u - v, \quad u \in U, \quad v \in V, \quad z(0) = z^0,$$

где $z, u, v \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in (0,1)$, $z^0 = (1,2)$, $M = \{0\}$, $V = \{(0,0),(0.5,0.5)\}$,

$$U = \{(0,u), u \in [-1,1]\} \cup \{(u,0), u \in [-1,1]\} \cup \{(u,u), u \in [-1,1]\}.$$

Тогда $\xi(t) = z^0$, $F(t,\tau) = (t-\tau)^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$. Возьмем $D(t,s) = \mathbb{E}$ для всех (t,s). Будем иметь

$$F(t,\tau)U \overset{*}{-} F(t,\tau)V = F(t,\tau)(U \overset{*}{-} V) \neq \varnothing,$$
$$U \overset{*}{-} V = \big\{(-0.5,0),(0,-0.5),(v,v), v \in [-1,0.5]\big\}.$$

В качестве $\gamma(t,\tau)$ возьмем $\gamma(t,\tau) = (0,0)$ для всех (t,τ). Поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t,\tau,(0,0)) &= \{\mathcal{L} \geqslant 0 : -\mathcal{L}z^0 \in W^*(t,\tau,(0,0)) = F(t,\tau)U\} \\ &= \Big\{\big(\frac{F(t,\tau)}{2},0\big),\big(0,\frac{F(t,\tau)}{4}\big),\big(-F(t,\tau)v,-\frac{F(t,\tau)v}{2}\big), v \in [-1,0]\Big\},\\ \mathcal{M}(t,\tau,(0.5,0.5)) &= \Big\{\mathcal{L} \geqslant 0 : -\mathcal{L}z^0 \in W^*(t,\tau,(0.5,0.5)) = F(t,\tau)U - \frac{1}{2}(F(t,\tau),F(t,\tau))\Big\}\\ = \Big\{\big(F(t,\tau),\frac{F(t,\tau)}{4}\big),&\big(\frac{F(t,\tau)}{2},\frac{F(t,\tau)}{2}\big),\big(F(t,\tau)(0.5-v),\frac{F(t,\tau)(0,5-v)}{2}\big), v \in [-1,0.5]\Big\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из определения $\lambda^*(t,\tau,v)$ имеем

$$\lambda^*(t,\tau,(0,0)) = 0.5F(t,\tau),\ \lambda^*(t,\tau,(0.5,0.5)) = 0.75F(t,\tau).$$

Следовательно, момент T из предположения 3 равен $T = \big(2\alpha\Gamma(\alpha)\big)^{1/\alpha}$. Таким образом, в данной игре $G(2)$ происходит поимка. Отметим, что использование скалярных разрешающих функций не позволяет получить данный результат.

П р и м е р 2. В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $G(n+1)$, описываемая системой вида

$$z_i^{(\alpha_i)} = u_i - v, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \quad \|v\| \leqslant 1.$$

Здесь $i \in \{1,\ldots,n\}$, $z_i, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $\alpha_i \in (q-1,q)$, q — натуральное число. При $t=0$ заданы начальные условия $z_i^{(l)}(0) = z_{il}^0$, $l = 0,\ldots,q-1$. Терминальные множества M_i имеют вид $M_i = \{0\}$. Тогда

$$\xi_i(t) = z_{i0}^0 + tz_{i1}^0 + \frac{t^2}{2}z_{i2}^0 + \ldots + \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}z_{iq-1}^0, \quad F_i(t,s) = \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}.$$

Отметим, что если $\xi_l(T) = 0$ при некоторых $l \in I$, $T > 0$, то преследователь $\mathbf{P}_l$ осуществляет поимку $\mathbf{E}$, полагая $u_l(t) = v(t)$. Считаем далее, что $\xi_i(t) \neq 0$ для всех $i \in I$, $t > 0$.

В качестве матриц $D_i(t,s)$ возьмем единичные матрицы. Тогда предположения 1, 2 выполнены, причем $W_i(t,\tau) = \{0\}$, $M_i^2(t) = \{0\}$ для всех $(t,\tau) \in \Delta$, $i \in I$. Взяв $\gamma_i(t,\tau) = 0$, получаем

$$\lambda_i(t,\tau,v,\gamma_i(\cdot)) = F_i(t,\tau)\lambda_i(v,\xi_i(t)), \quad \text{где} \quad \lambda_i(v,a_i) = \frac{(v,a_i) + \sqrt{(v,a_i)^2 + \|a_i\|^2(1-\|v\|^2)}}{\|a_i\|^2}.$$

Обозначим $z_i^0 = z_{iq-1}^0/(q-1)!$, $\xi_i^0(t) = \xi_i(t)/t^{q-1}$, $\operatorname{int} A, \operatorname{co} A$ соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A.

Утверждение 1. *Если* $0 \in \operatorname{int}\operatorname{co}\{z_i^0, i \in I\}$, *то в рассматриваемой в примере* 2 *игре* $G(n+1)$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия утверждения следует (см. [13]), что существует $\delta > 0$ такое, что для всех $v, \|v\| \leqslant 1$, выполняется неравенство

$$\max_{i\in I} \lambda_i^0(v, z_i^0) \geqslant \delta.$$

Поэтому существует момент $T^* > 0$ такой, что для всех $t > T^*$ верно неравенство

$$\min_{\|v\|\leqslant 1} \max_i \lambda_i^0(v, \xi_i^0(t)) \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Далее имеем

$$\max_{i\in I} \int_0^t \lambda_i(t,\tau,v(\tau),\gamma_i(\cdot))\,d\tau \geqslant \frac{1}{n}\int_0^t \sum_{i\in I} \lambda_i(t,\tau,v(\tau),\gamma_i(\cdot))\,d\tau \geqslant \frac{1}{n}\int_0^t \max_{i\in I} \lambda_i(t,\tau,v(\tau),\gamma_i(\cdot))\,d\tau.$$

Обозначим $\Gamma(\hat\alpha) = \max\limits_{i\in I} \Gamma(\alpha_i)$, $\alpha_0 = \min\limits_{i\in I} \alpha_i$,

$$f(t,\tau) = \begin{cases} (t-\tau)^{\alpha_0-1}, & \text{если } t-\tau \geqslant 1,\\ 0, & \text{если } t-\tau < 1. \end{cases}$$

Пусть далее $t > \max\{1, T^*+1\}$. Тогда

$$\int_0^t \max_{i\in I} \lambda_i(t,\tau,v(\tau),\gamma_i(\cdot))\,d\tau \geqslant \frac{1}{t^{q-1}\Gamma(\hat\alpha)}\int_{T^*}^t \min_{i\in I} F_i(t,\tau) \max_{i\in I} \lambda_i^0(v(\tau), \xi_i^0(t))\,d\tau$$

$$\geqslant \frac{\delta}{2t^{q-1}\Gamma(\hat\alpha)}\int_{T^*}^{t-1} f(t,\tau)\,d\tau = \frac{\delta}{2t^{q-1}\alpha_0\Gamma(\hat\alpha)}((t-T^*)^{\alpha_0}-1).$$

Следовательно, найдется T такое, что $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_{i\in I} \int_0^T \lambda_i(T,\tau,v(\tau),\gamma_i(\cdot))\,d\tau \geqslant 1$. По теореме 3 в игре $G(n+1)$ происходит поимка. □

П р и м е р 3. В пространстве $\mathbb{R}^{2k} (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $G(n+1)$, описываемая системой

$$\begin{cases} z_{i1}^{(\alpha)} = z_{i2} - v, \quad \|u_i\| \leqslant \rho, \quad \|v\| \leqslant \sigma, \quad \alpha \in (0,1),\\ z_{i2}^{(\alpha)} = u_i, \quad z_{i1}(0) = z_{i1}^0, \quad z_{i2}(0) = z_{i2}^0. \end{cases}$$

Здесь $z_{i1}, z_{i2} \in \mathbb{R}^k$. Терминальные множества M_i имеют вид

$$M_i = \big\{(z_{i1}, z_{i2}) \bigm| \|z_{i1}\| \leqslant l_i\big\}, \quad l_i > 0.$$

Тогда

$$M_i^1 = \big\{(0, z_{i2}) \bigm| z_{i2} \in \mathbb{R}^k\big\}, \quad L_i^1 = \big\{(z_{i1}, 0) \bigm| z_{i1} \in \mathbb{R}^k\big\}, \quad M_i^2 = \big\{(z_{i1}, 0) \bigm| \|z_{i1}\| \leqslant l_i\big\},$$

$$\xi_i(t) = z_{i1}^0 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} z_{i2}^0,$$

$$F_i(t,s) = F(t,s) = \begin{pmatrix} \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E}, & \dfrac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\mathbb{E}\\ 0, & \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\mu = \Big(\frac{\Gamma(2\alpha)\sigma}{\Gamma(\alpha)\rho}\Big)^{1/\alpha}, \quad D_R(a) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \|z-a\| \leqslant R\}.$$

Выберем матрицы $D_i(t,s)$ в виде

$$D_i(t,s) = \begin{pmatrix} d_i(t,s)\mathbb{E}, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix},$$

где $d_i(t,s)$ определяются следующим образом.

Если $t \leqslant \mu$, то $d_i(t,s) = (t-s)^\alpha/\mu^\alpha$ для всех $s \in [0,t]$. Если $t > \mu$, то

$$d_i(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in [0, t-\mu], \\ \dfrac{(t-s)^\alpha}{\mu^\alpha}, & \text{если } s \in (t-\mu, t]. \end{cases}$$

Получим, что для всех $(t,s) \in \Delta$

$$\pi_i F_i(t,s) B_i U_i = \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} D_\rho(0).$$

Если $t \leqslant \mu$, то для всех $s \in [0,t]$

$$\pi_i D_i(t,s) F_i(t,s) C_i V = \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} D_\rho(0).$$

Если $t > \mu$, то

$$\pi_i D_i(t,s) F_i(t,s) C_i V = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} D_\rho(0), & s \in [t-\mu, t], \\ \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} D_\sigma(0), & s \in [0, t-\mu). \end{cases}$$

Поэтому $W_i(t,\tau) = \{0\}$ для всех $\tau \in [0,t]$, если $t \leqslant \mu$. Если $t > \mu$, то

$$W_i(t,\tau) = \begin{cases} \{0\}, & \tau \in [t-\mu, t], \\ D_{R_i(t,\tau)}(0), & \tau \in [0, t-\mu), \end{cases}$$

где

$$R_i(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\rho - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\sigma.$$

Следовательно, если $t > \mu$, то

$$\int\limits_0^t W_i(t,\tau)\, d\tau = D_{R_i^0(t)}(0),$$

где

$$R_i^0(t) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\rho - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sigma - \frac{\mu^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\rho + \frac{\mu^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sigma\,.$$

Поэтому условие 2a) теоремы 4 будет выполнено для любых γ_i при достаточно больших T. Далее имеем $(T > \mu)$

$$\int\limits_0^T \pi_i\big(D_i(T,s) - \mathbb{E}\big) F_i(T,s) C_i V\, ds = \int\limits_{T-\mu}^T \pi_i\big(D_i(T,s) - \mathbb{E}\big) F_i(T,s) C_i V\, ds = D_r(0),$$

где $r = \sigma^2\Gamma(2\alpha)/2\alpha\rho\Gamma^2(\alpha)$.

Утверждение 2. *Пусть существуют $\gamma_i \in L_i$ такие, что*

$$D_r(0) \subset \bigcup_{i\in I}(\gamma_i + D_{l_i}(0)) = \bigcup_{i\in I} D_{l_i}(\gamma_i).$$

Тогда в рассматриваемой в примере 3 *игре* $G(n+1)$ *происходит поимка.*

Действительно, в этом случае выполнено условие 2b) теоремы 4. □

Пусть в рассматриваемом примере $k = 2, n = 4$ и для всех i параметры имеют вид $\alpha = 0,5, \sigma = \rho = \pi$. Тогда $r = 1$. Если, например, l_i, γ_i таковы, что

$$l_i = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \gamma_1 = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \quad \gamma_2 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \quad \gamma_3 = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \quad \gamma_4 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big),$$

то условие 2b) теоремы 4 будет выполнено и поэтому в такой игре $G(5)$ происходит поимка.

П р и м е р 4. В пространстве $\mathbb{R}^{3k} (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $G(n+1)$, описываемая системой

$$\begin{cases} z_{i1}^{(\alpha)} = z_{i2} - v, \quad \|u_i\| \leqslant \rho, \quad \|v\| \leqslant \sigma, \quad \alpha \in (0,1),\\ z_{i2}^{(\alpha)} = z_{i3}, \quad z_{i1}(0) = z_{i1}^0, \quad z_{i2}(0) = z_{i2}^0, \quad z_{i3}(0) = z_{i1}^0,\\ z_{i3}^{(\alpha)} = u_i. \end{cases}$$

Здесь $z_{i1}, z_{i2}, z_{i3} \in \mathbb{R}^k$. Терминальные множества M_i имеют вид $M_i = \big\{(z_{i1}, z_{i2}, z_{i3}) \bigm| \|z_{i1}\| \leqslant l_i\big\}$, $l_i > 0$. Тогда

$$\xi_i(t) = z_{i1}^0 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} z_{i2}^0 + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha)} z_{i3}^0,$$

$$F_i(t,s) = \begin{pmatrix} \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E} & \dfrac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\mathbb{E} & \dfrac{(t-s)^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)}\mathbb{E}\\ 0 & \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E} & \dfrac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\mathbb{E}\\ 0 & 0 & \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{E} \end{pmatrix}, \quad D_i(t,s) = \begin{pmatrix} d_i(t,s)\mathbb{E} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d_i(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in [0, t-\mu), \quad t \geqslant \mu,\\ \dfrac{(t-s)^{2\alpha}}{\mu^{2\alpha}}, & \text{если } s \in [t-\mu, t], \quad t \geqslant \mu,\\ \dfrac{(t-s)^{2\alpha}}{\mu^{2\alpha}}, & \text{если } s \in [0, t], \qquad t < \mu, \end{cases}$$

где $\mu = \Big(\dfrac{\sigma\Gamma(3\alpha)}{\rho\Gamma(\alpha)}\Big)^{1/(2\alpha)}$. Поэтому

$$\pi_i F_i(t,s) B_i U_i = \frac{(t-s)^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)} D_\rho(0),$$

$$\pi_i D_i(t,s) F_i(t,s) C_i V = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)} D_\rho(0), & \text{если } s \in [t-\mu, t], \quad t \geqslant \mu,\\ \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} D_\sigma(0), & \text{если } s \in [0, t-\mu), \quad t \geqslant \mu,\\ \dfrac{(t-s)^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)} D_\rho(0), & \text{если } s \in [0, t], \qquad t < \mu, \end{cases}$$

$$W_i(t,s) = \begin{cases} 0, & s \in [t-\mu, t], \quad t \geqslant \mu, \\ 0, & s \in [0, t], \quad t < \mu, \\ D_{R_i(t,s)}(0), & s \in [0, t-\mu), \quad t \geqslant \mu, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^T \pi_i\big(D_i(T,s) - \mathbb{E}\big)F_i(T,s)C_iV\,ds = D_r(0), \quad \text{если} \quad T > \mu,$$

где

$$R_i(t,s) = \frac{(t-s)^{3\alpha-1}\rho}{\Gamma(3\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-1}\sigma}{\Gamma(\alpha)}, \quad r = \frac{2\sigma\mu^\alpha}{3\Gamma(\alpha+1)}.$$

Следовательно, будут выполнены предположение 1 и условия теоремы 4, если найдутся $\gamma_i \in L_i^1$ такие, что

$$D_r(0) \subset \bigcup_{i \in I}(\gamma_i + D_{l_i}(0)) = \bigcup_{i \in I} D_{l_i}(\gamma_i).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Isaacs R.** Differential games. NY: John Wiley & Sons. 1965, 408 p.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. Том 2. М.: Наука, 1988. 575 с.
4. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 198 с.
5. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 384 с.
6. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
7. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 262–278.
8. **Gomoynov M.I.** Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations // Dynamic Games and Applications. 2020. Vol. 10, no. 2. P. 417–443. doi: 10.1007/s13235-019-00320-4.
9. **Petrov N.N.** Group pursuit problem in a differential game with fractional derivatives, state constraints, and simple matrix // Diff. Eq. 2019. Vol. 55, no. 6. P. 841–848. doi: 10.1134/S0012266119060119.
10. **Петров Н.Н., Мачтакова А.И.** Поимка двух скоординированных убегающих в задаче с дробными производными, фазовыми ограничениями и простой матрицей // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2020. Т. 56, С. 50–62.
11. **Aubin J.P., Frankowska H.** Set-Valued Analysis. Boston: Birkhauser, 1990. 461 p.
12. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповiдi Нацiонаноi академii наук Украiни. 2007. № 1. С. 50–55.
13. **Петров Н.Н.** Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606–617.

Поступила 30.05.2022
После доработки 7.07.2022
Принята к публикации 11.07.2022

Мачтакова Алёна Игоревна
аспирант
Удмуртский государственный университет
г. Ижевск;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Петров Николай Никандрович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
Удмуртский государственный университет
г. Ижевск;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: kma3@list.ru

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games.* NY: John Wiley & Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604 .
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow: Nauka Publ., 1974, 458 p.
3. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy, II* [Selected scientific works, II]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 575 p. ISBN: 5-02-14410-X .
4. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* [Mathematical methods of control a few dynamic processes]. Moscow: Moscow State University Publ., 1990, 198 p. ISBN: 5-211-00954-1 .
5. Chikrii A. *Conflict-controlled processes.* Dordrecht: Springer, 1997, 404 p. doi: 10.1007/978-94-017-1135-7 . Original Russian text published in Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye processy*, Kiev: Naukova Dumka Publ., 1992, 384 p.
6. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob'ektov* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk: Udmurt State University Publ., 2009, 266 p. ISBN: 978-5-904524-17-3 .
7. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 268, no. 1, pp. 54–70. doi: 10.1134/S0081543810050056 .
8. Gomoyunov M. Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations. *Dyn. Games Appl.*, 2020, vol. 10, no. 2, pp. 417–443. doi: 10.1007/s13235-019-00320-4 .
9. Petrov N.N. Group pursuit problem in a differential game with fractional derivatives, state constraints, and simple matrix. *Diff. Eq.*, 2019, vol. 55, no. 6, pp. 841–848. doi: 10.1134/S0012266119060119 .
10. Petrov N.N., Machtakova A.I. Capture of two coordinated evaders in a problem with fractional derivatives, phase restrictions and a simple matrix. *Izv. IMI UdGU*, 2020, vol. 56, pp. 50–62. doi: 10.35634/2226-3594-2020-56-05 (in Russian).
11. Aubin J.P., Frankowska H. *Set-valued analysis.* Boston, MA: Birkhäuser, 2009, 461 p. doi: 10.1007/978-0-8176-4848-0 .
12. Chikrii A.A., Matichin I.I. An analog of the Cauchy formula for linear systems of arbitrary fractional order. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.*, 2007, no. 1, pp. 50–55 (in Russian).
13. Petrov N.N. Controllability of autonomous systems. *Diff. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian).

Received May 30, 2022
Revised July 7, 2022
Accepted July 11, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 21-71-10070).

Alena Igorevna Machtakova, doctoral student, Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: bichurina.alyona@yandex.ru .

Nikolai Nikandrovich Petrov, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., Udmurt State University, Izhevsk, 426034, Russia, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: kma3@list.ru .

Cite this article as: A. I. Machtakova, N. N. Petrov. On a linear group pursuit problem with fractional derivatives. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 129–141.