ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.957

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТИПА ДИФФУЗИОННЫХ ВОЛН ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

А. Л. Казаков, А. А. Лемперт

В настоящей статье рассмотрено нелинейное эволюционное параболическое уравнение второго порядка с вырождением, являющееся математической моделью ряда физических и биологических процессов. Для него изучена проблема построения и исследования точных решений, имеющих тип диффузионной (тепловой, фильтрационной) волны с заданным фронтом. Их построение осуществляется путем применения анзаца специального вида и сводится к интегрированию задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, которая наследует особенность исходной постановки. Для ее раскрытия применяется следующий трехэтапный подход. На первом этапе производится понижение порядка уравнения путем перехода в фазовую плоскость. Далее строится решение в виде ряда по степеням новой независимой переменной, в качестве которой выступает исходная искомая функция. Наконец, доказывается сходимость ряда посредством построения положительной мажоранты. Отдельный раздел работы посвящен отысканию конструктивной оценки радиуса сходимости ряда, которая, в частности, показывает, что последний существенно отличен от нуля. Предложенный подход к построению оценок обладает высокой адаптивной способностью, что позволяет существенно улучшить их при конкретном задании входящих констант.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, диффузионная волна, точные решения, бегущая волна, ряд, сходимость.

A. L. Kazakov, A. A. Lempert. Exact solutions of diffusion wave type for a nonlinear second-order parabolic equation with degeneration.

The paper deals with a nonlinear evolutionary second-order parabolic equation with degeneration, which is a mathematical model for a number of physical and biological processes. We consider the problem of constructing and exploring exact solutions having the type of diffusion (heat, filtration) wave with a specified front. By applying a special kind of ansatz, their construction reduces to the integration of the Cauchy problem for an ordinary differential equation, which inherits the singularity of the original formulation. A three-stage approach is proposed to eliminate the singularity. At the first stage, the order of the equation is reduced by passing to the phase plane. Next, a solution is constructed in the form of a series in powers of a new independent variable, which previously was the original unknown function. Finally, the convergence of the series is proved by constructing a positive majorant. A special section is devoted to finding a constructive estimate of the convergence radius of the series. This estimate, in particular, shows that the radius is considerably different from zero. The proposed approach to the construction of estimates is highly adaptive, which allows us to improve the obtained estimates significantly if the input constants are specified.

Keywords: nonlinear parabolic equation, diffusion wave, exact solutions, traveling wave, series, convergence.

MSC: 35K10, 35K57, 35K67

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-114-128

1. Введение

Рассмотрим нелинейное эволюционное параболическое уравнение следующего вида:

$$T_t = (\Phi_1(T))_{xx} + (\Phi_2(T))_x + \Phi_3(T). \tag{1.1}$$

Здесь $T(t,x)$ — искомая функция; t, x — независимые переменные (время и пространственная координата соответственно). Известные функции $\Phi_i,\ i = 1, 2, 3$, предполагаются достаточно гладкими.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-07-00407 А); РФФИ и Министерства Науки и Технологии, Тайвань (проект № 20-51-S52003).

Уравнение (1.1) является одним из классических объектов математической физики и имеет (в различных модификациях) широкие приложения как при моделировании тепловых [1; 2], конвективных [3], диффузионных и фильтрационных процессов [4;5], так, например, и в биологии для описания динамики популяций [6]. Различные обобщения (1.1) на случай систем также распространены в математических физике и биологии как модели реакционно-диффузионных процессов [7–9] и взаимодействия двух или более биологических видов [10; 11].

Нелинейность уравнения (1.1) накладывает существенный отпечаток на методы исследования и свойства решений, поскольку а) в данном случае принцип суперпозиции решений, как известно, неприменим; б) если для линейных параболических уравнений разрешимость основных краевых задач (и задачи Коши) зависит только от гладкости входящих функций, то для нелинейных уравнений это далеко не так [12]. Наибольшие трудности для исследования доставляют задачи с особенностями [13], в которых, в частности, параболический тип уравнения (1.1) может вырождаться [14].

2. Диффузионные волны и методы их исследования

В случае, когда выполняется условие

$$\Phi_1'(0) = \Phi_2'(0) = \Phi_3(0), \tag{2.1}$$

у уравнения (1.1) появляется очень интересный класс решений. В зависимости от конкретного вида функций Φ_i и физической интерпретации рассматриваемой задачи такие решения в литературе называют диффузионными, тепловыми или фильтрационными волнами. Они описывают возмущения, которые распространяются по покоящемуся (нулевому) фону с конечной скоростью, и с математической точки зрения представляют собой кусочно-гладкие решения, состоящие из двух частей, положительной и нулевой, непрерывно состыкованных между собой вдоль гладкой кривой (поверхности), именуемой фронтом волны. Производные при этом, вообще говоря, терпят разрыв. Как известно, подобное поведение нетипично для решений уравнений и систем параболического типа [12] и, по-видимому, обусловлено вырождением, которое, как легко убедиться, имеет место при выполнении условий (2.1) и равенства $T = 0$. Впервые подобные решения были предложены более 60 лет назад в работе [15].

Решения типа фильтрационных (тепловых) волн для уравнения нелинейной фильтрации (теплопроводности), которое является частным случаем (1.1), занимают значительное место в творческом наследии академика РАН А. Ф. Сидорова [14; 16]. Несмотря на то что работ, посвященных данной тематике, у него было относительно немного, все они носили прорывной характер. Очень важное достижение выдающегося ученого — адаптация метода характеристических рядов [17] к решению вырождающихся параболических уравнений. В дальнейшем из этого вырос более общий метод специальных рядов, который по сей день применяется в научной школе А. Ф. Сидорова для решения широкого круга краевых задач математической физики [18–20].

Методы специальных степенных рядов (в различных модификациях) позволяют раскрывать особенности в вырождающихся параболических уравнениях и доказывать теоремы существования и единственности решений рассматриваемого вида (см., например, [21–24]). Ряды при этом, как правило, сходятся локально, более того, получить какие-либо содержательные оценки на радиус сходимости удается только в редких частных случаях [25].

В подобном контексте большое значение приобретает проблема исследования глобальных свойств решений, что особенно существенно при верификации результатов численных расчетов [23; 26]. Одним из возможных путей ее решения является использование точных решений, построение которых за счет использования анзацев различного вида [27; 28] редуцируется к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Впервые подобные решения, имеющие вид тепловой волны, для уравнения нелинейной теплопроводности, насколько нам известно, встречаются в классической монографии А. А. Самарского с соавторами [2]. Завершая раздел, отметим, что точных решений нелинейного уравнения теплопроводности предложено достаточно много (см, например, [29; 30]), однако большинство из них не относятся к тепловыми волнами.

3. Краевые условия

Уравнение (1.1) при условии дифференцируемости функций $\Phi_1(T), \Phi_2(T)$ может быть переписано следующим образом:

$$T_t = (\Phi_1'(T)T_x)_x + \Phi_2'(T)T_x + \Phi_3(T). \tag{3.1}$$

Рассмотрим случай степенных функций $\Phi_i(T),\ i = 1, 2, 3$, который чаще других встречается в научной литературе [5], поскольку наиболее близок к приложениям. Итак, пусть

$$\Phi_1'(T) = \lambda_1 T^{\sigma_1}, \quad \Phi_2'(T) = \lambda_2 T^{\sigma_2}, \quad \Phi_3(T) = \lambda_3 T^{\sigma_3},$$

где $\sigma_i,\ i = 1, 2, 3,$ — положительные константы, $\sigma_1 + \sigma_3 > 1$, $\lambda_i,\ i = 1, 2, 3,$ — константы, $\lambda_1 > 0$.

Сделаем замену искомой функции $u = \Phi_1'(T) = \lambda_1 T^{\sigma_1}$. После несложных преобразований уравнение (3.1) примет вид

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 + Au^\theta u_x + Bu^\beta. \tag{3.2}$$

Здесь $\sigma = \sigma_1 > 0$, $\theta = \sigma/\sigma_2 > 0$, $\beta = \sigma_3/\sigma + 1 - 1/\sigma > 0$, $A = \lambda_2\lambda_1^{-1/\theta}$, $B = \sigma\lambda_3\lambda_1^{1/\sigma - 1/\sigma_3}$.

Рассмотрим для уравнения (3.2) граничное условие, которое определяет фронт диффузионной волны

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = 0; \tag{3.3}$$

функция $a(t)$ должна при этом быть достаточно гладкой.

Отметим, что задаче (3.2), (3.3) удовлетворяет функция $u \equiv 0$. Однако в данном случае единственность решения нарушается и может иметь место также ненулевое решение. Так, в работе [31] нами доказано существование нетривиального аналитического решения задачи (3.2), (3.3).

Авторы, начиная с 2016 г. [25], ведут активные исследования по построению и изучению точных решений нелинейных параболических уравнений. В настоящей работе, которая представляет собой очередной их (значительный) этап, изучаются два класса решений задачи (3.2), (3.3). Во-первых, решения типа бегущей волны. Они исследовались ранее [24; 31], однако за последнее время нами были получены новые содержательные результаты. Во-вторых, это обобщенно-автомодельные решения [28], которые для полного (при $A, B \neq 0$) уравнения (3.2) ранее не рассматривались.

4. Построение точных решений

Содержанием настоящего раздела статьи является поиск для задачи (3.2), (3.3) нетривиальных точных решений, построение которых сводится к интегрированию задач Коши для ОДУ. Ранее данная задача была подробно исследована для нелинейного уравнения теплопроводности [27] с источником [28], который соответствует случаю $A = 0$; кроме того, были найдены и описаны новые классы решений рассматриваемого вида.

Как показано в [28; 31], основные анзацы, которые позволят редуцировать построение решений (3.2), (3.3) к интегрированию задач Коши для ОДУ, имеют вид $u = \psi(t)v(\varphi(t, x))$, где $\varphi_1(t, x) = x - a(t)$, $\varphi_2(t, x) = x/a(t)$. В первом случае имеем обобщенную бегущую волну (которая, в частности, может становится простой бегущей волной), во втором — обобщенно-автомодельное решение (в том числе и автомодельное). Рассмотрим эти случаи последовательно.

Бегущая волна. Положим $z = x - a(t)$ и выполним в уравнении (3.2) подстановку $u = \psi(t)v(z)$. После приведения подобных и деления на $\psi^2(t)$ получим

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + A\psi^{\theta-1}(t)v^\theta v' + B\psi^{\beta-2}(t)v^\beta + \frac{a'(t)}{\psi(t)}v' - \frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)}v = 0. \tag{4.1}$$

Для того чтобы (4.1) превратилось в ОДУ относительно $v(z)$, необходимо и достаточно выполнение следующих тождественных равенств:

$$\frac{a'(t)}{\psi(t)} = \text{const}, \quad \frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)} = \text{const}, \quad \psi^{\theta-1}(t) = \text{const}, \quad \psi^{\beta-2}(t) = \text{const}. \tag{4.2}$$

Первые два условия (4.2) являются системой ОДУ из двух уравнений с двумя неизвестными, а два последних имеют характер дополнительных условий совместности, которые могут быть удовлетворены, например, за счет выбора θ и β.

Рассмотрим последовательно два возможных случая.

1. Пусть $\psi(t) = \psi = \text{const}$. Не теряя общности рассмотрения, можно принять $\psi = 1$. Тогда $a(t) = \mu t + \eta$, где μ, η — константы, (4.1) принимает вид следующего ОДУ:

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + (Av^\theta + \mu)v' + Bv^\beta = 0. \tag{4.3}$$

В дальнейшем будем считать, что $\eta = 0, \mu > 0$, это также не умаляет общности рассмотрения.

2. Пусть теперь $\psi(t) \neq \text{const}$. Тогда из первых двух уравнений (4.2) имеем, что $\psi(t) = \omega/(\mu t + \eta)$, $a(t) = \omega \ln(\mu t + \eta)$, где μ, η, ω — ненулевые константы, $\eta > 0$. Можно видеть, что необходимым и достаточным условием того, чтобы выполнялись третье и четвертое соотношения (4.2), в данном случае являются условия $\theta = 1$, $\beta = 2$. Соответственно (4.1) можно записать следующим образом:

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + (Av + \mu)v' + Bv^2 + \frac{\mu}{\omega}v = 0. \tag{4.4}$$

Условие (3.3) на фронте диффузионной волны в данном случае имеет вид $v(0) = 0$. Легко убедиться в том, что уравнениям (4.2), (4.3) и данному условию удовлетворяет нулевое решение $v \equiv 0$. Однако приняв в обеих частях, в (4.2) и (4.3), $z = 0$, получим относительно $v_1 = v'(0)$ одно и то же квадратное уравнение

$$\frac{1}{\sigma}v_1^2 + \mu v_1 = 0, \tag{4.5}$$

которое имеет два корня: $v_1 = 0$, порождающий тривиальное решение и $v_1 = -\mu\sigma$, порождающий нетривиальное решение. Далее будем рассматривать уравнения (4.2), (4.3) совместно с условиями Коши

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = -\mu\sigma. \tag{4.6}$$

Обобщенно-автомодельное решение. Положим $z = x/a(t)$ и выполним в уравнении (3.2) подстановку $u = \psi(t)v(z)$. После приведения подобных и умножения на $a^2(t)/\psi^2(t)$ получим

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + A\psi^{\theta-1}(t)a(t)v^\theta v' + B\psi^{\beta-2}(t)a^2(t)v^\beta + \frac{a(t)a'(t)z}{\psi(t)}v' - \frac{a^2(t)\psi'(t)}{\psi^2(t)}v = 0. \tag{4.7}$$

Для редукции (4.7) к ОДУ относительно $v(z)$ в данном случае необходимо и достаточно выполнение следующих тождественных равенств:

$$\frac{a(t)a'(t)}{\psi(t)} = \mathrm{const}, \quad \frac{a^2(t)\psi'(t)}{\psi^2(t)} = \mathrm{const}, \quad \psi^{\theta-1}(t)a(t) = \mathrm{const}, \quad \psi^{\beta-2}(t)a^2(t) = \mathrm{const}. \tag{4.8}$$

Аналогично (4.2) в соотношениях (4.8) два первых уравнения представляют собой систему ОДУ из двух уравнений с двумя искомыми функциями, а два оставшихся — это дополнительные условия совместности, которые могут быть удовлетворены за счет выбора параметров θ и β.

Можно без труда убедиться, что случай $\psi(t) = \mathrm{const}$ приводит к результатам, полученным ранее в ходе рассмотрения случая 1 из предыдущего раздела (при $\mu = 0$). Поэтому будем далее считать, что $\psi(t) \neq \mathrm{const}$. Пусть $a(t)a'(t)/\psi(t) = \mu$, где $a'(t) \neq 0, \mu \neq 0$. Подставив данное выражение во второе уравнение (4.8), выводим

$$\frac{a(t)a''(t)}{(a'(t))^2} = A_1 = \mathrm{const}. \tag{4.9}$$

Вновь необходимо рассматривать два отдельных случая.

1. Пусть сначала $A_1 = 1$. Тогда решение (4.9) имеет вид $a(t) = \eta \exp(\mu t)$, где μ, η — ненулевые константы; $\psi(t) = \eta^2 \exp(2\mu t)$. Можно убедиться, что необходимыми и достаточными условиями того, чтобы выполнялись третье и четвертое соотношения из (4.8), в данном случае являются равенства $\theta = 1/2, \beta = 1$. Уравнение (4.7) принимает вид

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(A\sqrt{v} + \mu z\right)v' + (B - 2\mu)\,v = 0. \tag{4.10}$$

2. Пусть далее $A_1 \neq 1$. Тогда решение (4.9) запишем как $a(t) = (\mu t + \eta)^\omega$, где $\mu \neq 0, \eta > 0, \omega > 0$ — константы; $\psi(t) = \omega(\mu t + \eta)^{2\omega-1}$. Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы выполнялись третье и четвертое соотношения из (4.8), в данном случае являются равенства $\theta = (\omega - 1)/(2\omega - 1), \beta = 2\theta$. Уравнение (4.7) можно представить в виде

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + (Av^\theta + \mu z)v' + Bv^\beta + \frac{2\mu}{2-\beta}v = 0. \tag{4.11}$$

Очевидно, что здесь возникают дополнительные требования $\theta \neq 1$, $\beta \neq 2$. Из условия положительности параметров θ и β получаем следующее ограничение:

$$\frac{\omega - 1}{2\omega - 1} > 0;$$

отсюда $\omega \in (-\infty, 1/2), (1, +\infty)$.

Условие (3.3) на фронте диффузионной волны в данном случае описывается формулой $v(1) = 0$. Можно легко убедиться в том, что уравнениям (4.10), (4.11) и данному условию удовлетворяет нулевое решение $v \equiv 0$. Однако приняв в обеих частях (4.10), (4.11) $z = 1$, $v = 0$, получим относительно $v_1 = v'(1)$ одно уравнение (4.5) Далее будем рассматривать уравнения (4.10), (4.11) совместно с условиями Коши

$$v(1) = 0, \quad v'(1) = -\mu\sigma. \tag{4.12}$$

Задача Коши для ОДУ. Исследовать полученные уравнения по отдельности не слишком удобно, поэтому унифицируем их. Для этого в уравнениях (4.10) и (4.11) сделаем замену независимой переменной $\breve{z} = z - 1$ (символ $\smile$ далее для удобства написания опускается). Тогда, суммируя, можно записать уравнения (4.3), (4.4), (4.10) и (4.11) следующим образом:

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + (C_1 v^\theta + C_2 z + \mu)v' + C_3 v^\beta + C_4 v = 0. \tag{4.13}$$

Условия Коши для уравнения (4.13) имеют вид (4.6). Отметим, что частные случаи задачи (4.13), (4.6) рассматривались нами ранее (см. [24; 27; 28; 31]), однако данный ее вариант, насколько нам известно, встречается в литературе впервые.

Из теоремы 1, кроме прочего, следует, что у (4.13), (4.6) при целых положительных значениях θ и β существует единственное аналитическое решение, представляющее собой сходящийся ряд по степеням z. Однако при нецелых значениях указанных констант теорема уже не работает. Помимо этого общий случай достаточно сложен и не может быть исследован в рамках одной статьи. Поэтому далее рассмотрим один частный случай, который не только является весьма содержательным и обладает интересными свойствами, но еще и дает представление о том, какие трудности встречаются при изучении свойств полученных классов точных решений, и какие могут быть применены способы для их преодоления.

Переход к фазовым переменным. Рассмотрим точные решения типа бегущей волны, которые, как было показано выше, описываются уравнениями (4.3) и (4.4). Воспользуемся тем, что они явно не зависят от z. Изучим три различных случая.

1. Пусть вначале $\beta \geq \theta$. Введем новые независимую переменную ζ и искомую функцию p, как

$$\zeta = v^{\theta}, \quad p = v'.$$

Тогда уравнение (4.3) перепишется следующим образом:

$$\theta\zeta p\frac{dp}{d\zeta} + \frac{p^2}{\sigma} + A\zeta p + \mu p + B\zeta^{\beta_*} = 0, \tag{4.14}$$

где $\beta^* = \beta/\theta$. Символ * у β далее будем опускать для упрощения обозначений.

За счет линейной замены переменных уменьшим количество входящих констант. Пусть

$$\zeta = \tilde{\zeta}\tilde{A}, \quad \tilde{A} = \frac{\mu}{A}; \quad p = \tilde{p}\tilde{B}, \quad \tilde{B} = \frac{\mu}{\theta}.$$

Тогда уравнение (4.14) примет вид (знак $\tilde{}$ здесь и далее для простоты также опускаем)

$$\zeta p\frac{dp}{d\zeta} + \frac{p^2}{\gamma_1} + p + \zeta p + \alpha_1\zeta^{\beta} = 0, \tag{4.15}$$

где $\gamma_1 = \sigma\theta > 0$, $\alpha_1 = B\mu^{\beta-2}\theta/A^{\beta} > 0$. Для уравнения (4.15) имеем условие Коши

$$p(0) = -\gamma_1, \tag{4.16}$$

которое непосредственно вытекает из (4.6).

2. Пусть теперь $\beta \leq \theta$. Введем новые независимую переменную ξ и искомую функцию p как

$$\xi = v^{\beta}, \quad p = v'.$$

Тогда после аналогичных предыдущему случаю преобразований уравнение (4.3) перепишется так:

$$\xi p\frac{dp}{d\xi} + \frac{p^2}{\gamma_2} + p + \alpha_2\xi^{\theta_*}p + \xi = 0, \tag{4.17}$$

где $\theta_* = \theta/\beta$ (* далее также будем опускать), $\gamma_2 = \sigma\beta > 0$, $\alpha_2 = A\beta\mu^{\theta-2}/B^{\theta} > 0$, причем для уравнения (4.17) условие Коши описывается как

$$p(0) = -\gamma_2. \tag{4.18}$$

Если $\theta = \beta$, случаи 1 и 2 совпадают с точностью линейной замены независимой переменной.

3. Наконец, аналогичным образом в результате замены

$$v = \frac{\mu}{A}\tilde{v}, \quad p = \mu\tilde{p}$$

уравнение (4.4) преобразуем к виду

$$vp\frac{dp}{dv} + \frac{p^2}{\sigma} + p + vp + \beta_1 v + \beta_2 v^2 = 0. \tag{4.19}$$

Здесь $\beta_1 = B/A^2$, $\beta_2 = 1/(\omega A)$. Условие Коши для (4.15) представим следующей формулой:

$$p(0) = -\sigma. \tag{4.20}$$

Далее будем рассматривать задачу Коши

$$wp\frac{dp}{dw} + \frac{p^2}{\gamma} + p + G(w)p + F(w) = 0,\ p(0) = -\gamma, \tag{4.21}$$

где $F(0) = G(0) = 0$, для которой задачи (4.15)–(4.16), (4.17)–(4.18) и (4.19)–(4.20) являются частными случаями (при соответствующих значениях параметров). Поскольку уравнение в данном случае не может быть разрешено относительно производной, задача (4.21) не подпадает под действие классических теорем существования и единственности. Тем не менее, как явствует из дальнейшего, она при выполнении определенных условий может иметь сколь угодно гладкое решение.

Теорема существования. Под *аналитической в точке* здесь и далее понимается функция действительной переменной, совпадающая в некоторой окрестности этой точки со своим тейлоровским разложением.

Теорема 1. *Пусть функции* $F(w), G(w)$ *являются аналитическими в точке* $w = 0$ *и* $F(0) = G(0) = 0$. *Тогда задача Коши* (4.21) *имеет единственное локально аналитическое решение.*

Доказательство, как обычно в подобных случаях, разбивается на два этапа. На первом из них строится решения в виде формального степенного ряда, а на втором — доказывается его сходимость.

Первый этап. Покажем, что решение задачи (4.21) можно построить как степенной ряд

$$p(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k!} w^k, \quad p_k = p^{(k)}(0). \tag{4.22}$$

Отметим, что из условия утверждения вытекает, что функции F и G можно представить в виде

$$F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{k!} w^k, \quad F_k = F^{(k)}(0); \qquad G(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k}{k!} w^k, \quad G_k = G^{(k)}(0),$$

причем $F_0 = G_0 = 0$, и ряды сходятся в некоторой окрестности точки $w = 0$.

Построим коэффициенты (4.22) по рекуррентной процедуре. Из условия имеем, что $p_0 = p(0) = -\gamma$. Для получения p_1 продифференцируем (4.21) по w и примем $w = 0, p(0) = -\gamma$. После приведения подобных и разрешения относительно p_1 выводим, что

$$p_1 = \frac{F_1 + p_0 G_1}{\gamma + 1} = \frac{F_1 - \gamma G_1}{\gamma + 1}.$$

Аналогичным образом после двукратного дифференцирования (4.21) получаем

$$p_2 = \frac{1}{2\gamma + 1}\Big[\frac{2F_1(F_1 - \gamma G_1)}{\gamma(\gamma + 1)} + F_2 - \gamma G_2\Big].$$

И так далее. Пусть известны все коэффициенты ряда (4.22) до $k-1$-го включительно. Тогда в результате k-кратного дифференцирования с учетом $w=0, p_0=-\gamma$ имеем, что

$$p_k = \frac{1}{\gamma k+1}\Big[\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i\Big(k-i+\frac{1}{\gamma}\Big)p_i p_{k-i} + \sum_{i=1}^{k} C_k^i G_i p_{k-i} + F_k\Big]. \tag{4.23}$$

Легко видеть, что правая часть (4.23) зависит только от величин, известных в силу предположения индукции. Отметим также, что все коэффициенты определяются однозначно. Первый этап доказательства завершен.

Второй этап. Докажем теперь локальную сходимость ряда (4.23). Для этого построим мажоранту. Сделаем замену переменной $P=p+\gamma$, которая позволяет переписать задачу (4.21) как

$$\gamma w\frac{dP}{dw} + P = -\gamma G(w) - \frac{\gamma F(w)}{P-\gamma}, \quad P(0)=0. \tag{4.24}$$

Пусть функция $F^*(w), F^*(0)=0$ является мажорантой для $F(w)$ и $G(w)$. Тогда мажоранту для P можно взять в виде

$$Q = \gamma F^*(w)\Big(1+\frac{1}{\gamma-Q}\Big). \tag{4.25}$$

Функция Q, удовлетворяющая алгебраическому уравнению (4.25), будет мажорировать решение задачи (4.24). В самом деле, несложно показать индукцией по k, что $Q_k \geq |P_k|$. С другой стороны, уравнение (4.25) является совместным, в частности $Q(0)=0$, и обе его части — аналитические в точке $w=0, Q=0$ функции. Следовательно, функция $Q(w)$ также аналитическая и мажорирует нуль.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Задача* (4.19), (4.20) *имеет единственное локально аналитическое решение; задача* (4.15), (4.16) *имеет единственное локально аналитическое решение при* $\beta \in \mathbb{N}$; *задача* (4.17), (4.18) *имеет единственное локально аналитическое решение при* $\theta \in \mathbb{N}$.

Следствие 2. *Из доказательства утверждения* 1 *выводим, что, если функции* $F(w)$ *и* $G(w)$ *являются аналитическими во всей области определения — это, в частности, верно для задачи* (4.19), (4.20); *задачи* (4.15), (4.16) *при* $\beta \in \mathbb{N}$; *задачи* (4.17), (4.18) *при* $\theta \in \mathbb{N}$, *то* (4.21) *имеет аналитическое решение, пока выполнено неравенство* $|p+\gamma|<\gamma$, *т. е.* $-2\gamma < p < 0$.

5. Исследование свойств степенных рядов

Доказанная выше теорема 1 обеспечивает существование и единственность решения в некоторой малой окрестности начальной точки. Однако для того чтобы использовать полученные разложения для тестирования результатов численных расчетов [23; 26], необходимо знать область существования решения, иначе мы не можем быть уверены в корректности вычислений с помощью отрезков рядов. Поэтому исследуем вопрос о радиусе сходимости ряда (4.22) и выведем оценки для области существования аналитического решения, которое им определяется. Полученные в ходе доказательства оценки, очевидно, нуждаются в уточнении, что возможно, если проанализировать отдельные частные случаи особо.

Пусть $F(w)=\alpha w^\beta$, т. е. рассмотрим задачу (4.15), (4.16). Вначале уточним формулы для коэффициентов (4.22). Напомним, что $p_0=p(0)=-\gamma$. При нахождении p_1 необходимо изучить два случая.

1. Пусть $\beta=1$. Тогда имеем, что $p_1=(\alpha-\gamma)/(\gamma+1)$. Аналогично получается

$$p_2 = \frac{2\alpha(\alpha-\gamma)}{\gamma(\gamma+1)(2\gamma+1)}.$$

И так далее, при $k \ge 3$ выводим

$$p_k = \frac{1}{\gamma k + 1}\Big[\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i\Big(k - i + \frac{1}{\gamma}\Big)p_i p_{k-i} + k p_{k-1}\Big]. \tag{5.1}$$

При этом можно убедиться, что если $\gamma = \alpha$, то $p_i = 0, i = 1, 2, \dots$, т. е. ряд обрывается и $p \equiv -\gamma = -\alpha$.

2. Пусть теперь $\beta \ge 2$. Тогда $p_1 = -\gamma/(\gamma+1)$. Далее будем рассуждать аналогично случаю 1. При нахождении p_2 имеем, что либо $p_2 = 2\alpha/(2\gamma+1)$ при $\beta = 2$, либо $p_2 = 0$ при $\beta \ge 3$. И так далее. В итоге в данном (общем) случае получаем, что

$$p_0 = -\gamma, \quad p_1 = -\frac{\gamma}{\gamma+1}, \quad p_2 = \ldots = p_{\beta-1} = 0, \quad p_\beta = \frac{\alpha\beta!}{\beta\gamma+1}.$$

Коэффициенты (4.22) при $k \ge \beta + 1$ вычисляются по формулам (5.1).

Перейдем теперь к установлению радиуса сходимости ряда. Для этого воспользуемся прямыми оценками для коэффициентов.

Вначале покажем, что при $\beta \ge 2$ для p_k можно ввести мажоратную последовательность q_k, обладающую свойством $q_k \ge |p_k|,\ k \ge 1$, по следующим формулам:

$$q_1 = \frac{\gamma}{\gamma+1}, \quad q_2 = \ldots = p_{\beta-1} = 0, \quad q_\beta = \frac{\alpha\beta!}{\beta\gamma+1},$$

$$q_k = \frac{1}{\gamma k + 1}\Big[\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i\Big(k - i + \frac{1}{\gamma}\Big)q_i q_{k-i}\Big], \quad k \ge \beta + 1. \tag{5.2}$$

Докажем, что $q_k \ge |p_k|$ индукцией по k. При $k = 1, 2, \dots, \beta$ искомые неравенства очевидны. Пусть $q_i \ge |p_i|$, $i = 1, \dots, k-1 \ge \beta$. Рассмотрим в правой части (5.1) слагаемые, содержащие p_{k-1}. Их три, и они могут быть представлены в виде

$$C_k^1\Big(k - 1 + \frac{1}{\gamma}\Big)p_1 p_{k-1} + C_k^{k-1}\Big(1 + \frac{1}{\gamma}\Big)p_1 p_{k-1} + k p_{k-1} = -\frac{(k-1)\gamma + 1}{\gamma + 1} k p_{k-1}.$$

Таким образом, слагаемое kp_{k-1} меньше по модулю, чем сумма двух других, и имеет противоположный знак. Отсюда следует, что

$$|p_k| = \frac{1}{\gamma k + 1}\Big|\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i\Big(k - i + \frac{1}{\gamma}\Big)p_i p_{k-i} + k p_{k-1}\Big|$$

$$< \frac{1}{\gamma k + 1}\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i\Big(k - i + \frac{1}{\gamma}\Big)\,|p_i p_{k-i}| \le \frac{1}{\gamma k + 1}\Big[\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i\Big(k - i + \frac{1}{\gamma}\Big)q_i q_{k-i}\Big] = q_k.$$

Отметим, что при $\beta = 1$ приведенные рассуждения “не работают”. Здесь неравенство $p_1 < 0$, вообще говоря, не выполняется, поэтому данный случай требует особого рассмотрения (см. ниже).

Исследуем сходимость ряда

$$q(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k}{k!} w^k, \tag{5.3}$$

который, как было показано, является мажорантным для (4.22).

Пусть вначале $\beta = 2$. В этом случае справедливо представление для коэффициентов q_k

$$q_k = \frac{\gamma k! r_k}{\gamma k + 1}, \tag{5.4}$$

где r_k определяются как

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad r_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{r_i r_{k-i}}{i\gamma + 1}, \quad k = 3, 4, \dots . \tag{5.5}$$

Правильность (5.4) проверяется прямой подстановкой в (5.2).

Докажем, что найдется константа M такая, что для всех r_k справедлива оценка

$$r_k \leq \frac{M^{k-1}}{(k-1)\gamma + 1}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{5.6}$$

Доказательство вновь проведем индукцией по k. При $k = 1$ (5.6) выполняется с константой $M_1 = 1$. При $k = 2$ — с константой $M_2 = \alpha(\gamma+1)/\gamma$. Таким образом, база индукции установлена. Пусть $r_i \leq M^{k-1}/[(i-1)\gamma + 1]$, $k = 1, 2, \dots, k-1 \geq 3$. Тогда

$$r_k \leq M^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(i\gamma + 1)[(i-1)\gamma + 1][(k-i-1)\gamma + 1]}.$$

Для суммы в правой части справедлива следующая оценка:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(i\gamma + 1)[(i-1)\gamma + 1][(k-i-1)\gamma + 1]} < \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{[(i-1)\gamma + 1]^2[(k-i-1)\gamma + 1]}$$

$$= \frac{1}{[(k-2)\gamma + 2]^2} \sum_{i=0}^{k-2} \left[\frac{1}{i\gamma + 1} + \frac{1}{(k-2-i)\gamma + 1}\right] + \frac{1}{(k-2)\gamma + 2} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{1}{(i\gamma + 1)^2}$$

$$< \frac{2}{[(k-2)\gamma + 2]^2} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{1}{i\gamma + 1} + \frac{1}{[(k-2)\gamma + 2]\gamma}$$

$$< \frac{1}{(k-2)\gamma + 2} \left\{\frac{2\ln[\gamma(k-2) + 1]}{\gamma[\gamma(k-2) + 2]} + \frac{1}{\gamma}\right\} < \frac{3}{[(k-2)\gamma + 2]\gamma}.$$

В ходе преобразований были использованы разложение на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов и известные верхние оценки частичных сумм (обобщенного) гармонического ряда [32].

Таким образом, получено, что

$$r_k < M^{k-2} \frac{3}{[(k-2)\gamma + 2]\gamma} = \frac{M^{k-2}}{(k-1)\gamma + 1} \cdot \frac{3[(k-1)\gamma + 1]}{\gamma[(k-2)\gamma + 2]} < \frac{M^{k-2}}{(k-1)\gamma + 1} \cdot \frac{3(2\gamma + 1)}{\gamma(\gamma + 1)}.$$

Итак, (5.6) при $k \geq 3$ выполняется с константой

$$M_3 = \frac{3(2\gamma + 1)}{\gamma(\gamma + 1)}.$$

Окончательно выберем константу M из условия $M = \max\{M_1, M_1, M_3\}$. Из проведенных рассуждений следует, что (5.6) выполняется с константой M при всех $k = 1, 2, 3, \dots$.

Теперь вернемся к (5.4). Из (5.6) имеем

$$q_k \leq \frac{\gamma k! M^{k-1}}{(\gamma k + 1)[(k-1)\gamma + 1]}.$$

Отсюда следует, что радиус сходимости ряда (5.3) $R \geq 1/M$. Поскольку ряд (5.3) является в рассмотренном случае $\beta = 2$ мажорантным для (4.22), то выводим, что последний сходится при $|w| < 1/M$.

При $\beta \geq 3$ рассуждения аналогичные, только значения некоторых величин вычисляются несколько иначе:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \dots r_{\beta-1} = 0, \quad r_\beta = \alpha/\gamma, \quad M_2 = \sqrt[\beta-1]{\frac{\alpha[(\beta-1)\gamma+1]}{\gamma}},$$

и значения r_k по формулам (5.5) определяются, начиная с $k = \beta + 1$.

З а м е ч а н е. Оценки, которые были выполнены при определении M_3, не являются идеальными, поскольку возникающие при их получении последовательности, вообще говоря, немонотонные и достигают максимального значения при разных k (в зависимости от γ). При задании конкретных значений γ оценки можно существенно уточнить.

Заключение

В выводах по результатам проведенного исследования укажем, что вопрос о размерах области сходимости степенных рядов, в виде которых построено решение некоторой задачи математической физики, ключевой в процессе применения метода специальных рядов для раскрытия имеющихся особенностей (при их наличии). К сожалению, при доказательстве теорем существования и единственности, являющихся аналогами классической теоремы Коши — Ковалевской [17; 33], получить какие-либо оценки подобного рода практически невозможно, и задачи с вырождением для нелинейных параболических уравнений [13] не исключение. Причина этого кроется в объективных особенностях рассматриваемых постановок, в частности в общем свойстве нелинейных уравнений и систем, которое связано с возникновением так называемой "градиентной катастрофы" [33]. В связи с вышесказанным частные случаи, в которых такого рода оценки удается построить, являются особенно значимыми.

В ходе выполненных исследований авторам удалось получить конструктивно проверяемую оценку радиуса сходимости ряда, в виде которого представлено решение задачи о движении диффузионной волны с заданным фронтом. Причем, как легко убедиться, при разумных значениях параметров задачи полученное значение существенно отлично от нуля. Более того, предложенный подход обладает высокой адаптивной способностью и при конкретном задании входящих констант оценки могут быть существенно улучшены.

Дальнейшие исследования рассмотренной здесь задачи могут быть связаны с более тщательным изучением обобщенно-автомодельных решений, которые были предложены выше. Еще одним перспективным направлением работы является усложнение постановки, например увеличение количества независимых переменных и/или числа уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 1966. 632 с.
2. **Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
3. **Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В.** Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
4. **Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М.** Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
5. **Vazquez J.** The porous medium equation: Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007. 624 p. doi: 10.1093/acprof:oso/9780198569039.001.0001 .
6. **Murray J.D.** Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. Interdisciplinary applied mathematics. Vol. 18. NY: Springer, 2003. 837 p.
7. **Grindrod P.** Patterns and waves: Theory and applications of reaction-diffusion equations. NY: Clarendon Press, 1991. 239 p.

8. **Stepanova I.V.** Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity // Appl. Math. Comput. 2019. Vol. 343. P. 57–66. doi: 10.1016/j.amc.2018.09.036 .
9. **Bekezhanova V.B., Stepanova I.V.** Evaporation convection in two-layers binary mixtures: equations, structure of solution, study of gravity and thermal diffusion effects on the motion // Appl. Math. Comput. 2022. Vol. 414. Art. no. 126424. doi: 10.1016/j.amc.2021.126424 .
10. **Cantrell R.S., Cosner C.** Spatial ecology via reaction–diffusion equations. Chichester: Wiley, 2003. 432 p.
11. **Perthame B.** Parabolic equations in biology. Growth, reaction, movement and diffusion. NY: Springer, 2015. 211 p. doi: 10.1007/978-3-319-19500-1.
12. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 738 с.
13. **DiBenedetto E.** Degenerate Parabolic Equations. NY: Springer-Verlag, 1993. 388 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0895-2 .
14. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит. 2001. 576 с.
15. **Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию А.Ф. Иоффе. 1950. С. 61–71.
16. **Васин В.В., Сидоров А.Ф.** О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // Известия вузов. Математика. 1983. № 7. С. 13–27.
17. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. Т. 2. М.: Мир, 1964. 830 с.
18. **Филимонов М.Ю.** Использование метода специальных рядов для представления решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1100–1107.
19. **Филимонов М.Ю.** Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 801–808.
20. **Filimonov M.Yu.** Representation of solutions of boundary value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently calculated coefficients // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1268. Art. no. 012071. doi: 10.1088/1742-6596/1268/1/012071 .
21. **Коврижных О.О.** О построении асимптотического решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 10. С. 1487–1493.
22. **Баутин С.П., Елисеев А.А.** Многомерная аналитическая тепловая волна, определяемая краевым режимом // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1052–1062.
23. **Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.** Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.
24. **Kazakov A., Lempert A.** Diffusion-wave type solutions to the second-order evolutionary equation with power nonlinearities // Mathematics. 2022. Vol. 10, № 2. Art. no. 232. doi: 10.3390/math10020232 .
25. **Казаков А.Л., Орлов С.С.** О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 112–123.
26. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 57–68.
27. **Казаков А.Л., Орлов Св.С., Орлов С.С.** Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 544–560. doi: 10.17377/smzh.2018.59.306 .
28. **Казаков А.Л.** О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1057–1068. doi: 10.33048/semi.2019.16.073.
29. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1091–1101.
30. **Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.** Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения. М.: Изд-во Юрайт, 2017. 256 с.
31. **Kazakov A.** Solutions to nonlinear evolutionary parabolic equations of the diffusion wave type // Symmetry. 2021. Vol. 13, no. 5. Art. no. 871. doi: 10.3390/sym13050871 .

32. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. М.: Лань, 2003. 832 с.
33. **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1978. 688 с.

Поступила 23.05.2022
После доработки 31.05.2022
Принята к публикации 6.06.2022

Казаков Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН
г. Иркутск
e-mail: kazakov@icc.ru

Лемперт Анна Ананьевна
канд. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН
г. Иркутск
e-mail: lempert@icc.ru

REFERENCES

1. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Physics of shock waves and high temperature hydrodynamics phenomena.* NY: Dover Publ., 2002, 944 p. ISBN: 0486420027 . Original Russian text published in Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavlenii.* Moscow: Fizmatlit Publ., 1966, 632 p.
2. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Blow-up in quasilinear parabolic equations.* Berlin: Walter De Gruyter, 1995, 554 p. ISBN: 3-11-012754-7 . Original Russian text published in Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineinykh parabolicheskikh uravnenii*, Moscow: Nauka Publ., 1987, 480 p.
3. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical models of convection.* Berlin: Walter De Gruyter, 2012, 417 p. doi: 10.1515/9783110258592 . Original Russian text published in Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Sovremennye matematicheskie modeli konvektsii*, Moscow: Fizmatlit Publ., 2008, 368 p.
4. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Theory of fluid flows through natural rocks.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990, 395 p. ISBN: 0792301676 . Original Russian text published in Barenblatt G.I., Entov V.N., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhidkostei i gazov v prirodnykh plastakh.* Moscow: Nedra Publ., 1984, 211 p.
5. Vazquez J. *The porous medium equation: Mathematical theory.* Oxford: Clarendon Press, 2007, 624 p. doi: 10.1093/acprof:oso/9780198569039.001.0001 .
6. Murray J.D. *Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications.* Interdisciplinary applied mathematics, vol. 18. NY: Springer, 2003, 837 p. doi: 10.1007/b98869 .
7. Grindrod P. *Patterns and waves: Theory and applications of reaction-diffusion equations.* NY: Clarendon Press, 1991, 239 p. ISBN: 0198596766 .
8. Stepanova I.V. Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity. *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 343, pp. 57–66. doi: 10.1016/j.amc.2018.09.036 .
9. Bekezhanova V., Stepanova I. Evaporation convection in two-layers binary mixtures: equations, structure of solution, study of gravity and thermal diffusion effects on the motion. *Appl. Math. Comput.*, 2022, vol. 414, art. no. 126424. doi: 10.1016/j.amc.2021.126424 .

10. Cantrell R.S., Cosner C. *Spatial ecology via reaction-diffusion equations.* Chichester: Wiley, 2003, 432 p. ISBN: 0471493015 .
11. Perthame B. *Parabolic equations in biology. Growth, reaction, movement and diffusion.* NY: Springer, 2015, 211 p. doi: 10.1007/978-3-319-19500-1 .
12. Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type.* Trans. Math. Monographs, vol. 23. Providence: American Math. Soc., 1968, 648 p. doi: 10.1090/mmono/023 . Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa*, Moscow: Nauka Publ., 1967, 738 p.
13. DiBenedetto E. *Degenerate parabolic equations.* NY: Springer, 1993, 388 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0895-2 .
14. Sidorov A.F. *Izbrannyye trudy: Matematika. Mekhanika* [Selected works: Mathematics. Mechanics]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. ISBN: 5-9221-0103-X .
15. Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. On the theory of propagation of heat with the heat conductivity depending upon the temperature. In: *Collection dedicated to the 70th anniversary of A.F. Ioffe*, 1950, pp. 61–71 (in Russian).
16. Vasin V.V., Sidorov A.F. Some methods of approximate solution of differential and integral equations. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1983, vol. 27, no. 7, pp. 14–33.
17. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations.* NY: Wiley, 1962, 830 p. ISBN: 0470179856 . Translated to Russian under the title *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi.* Vol. 2. Moscow: Mir Publ., 1964, 830 p.
18. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of initial-boundary value problems for nonlinear partial differential equations by the method of special series. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1159–1166. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000011290.09965.9a .
19. Filimonov M.Yu. Application of the special series method to the construction of new classes of solutions of nonlinear partial differential equations. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 6, pp. 844–852. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000008411.99716.73 .
20. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of boundary value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently calculated coefficients. *J. Phys.: Conference Series*, 2019, vol. 1268, art. no. 012071. doi: 10.1088/1742-6596/1268/1/012071 .
21. Kovrizhnykh O.O. On construction of an asymptotic solution to the degenerate nonlinear parabolic equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003, vol. 43, no. 10, pp. 1430–1436.
22. Bautin S.P., Eliseev A.A. Multidimensional analytic heat wave determined by a boundary mode. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 8, pp. 1113–1123. doi: 10.1134/S0012266106080064 .
23. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a degenerate boundary value problem for the porous medium equation in spherical coordinates. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 119–129 (in Russian).
24. Kazakov A., Lempert A. Diffusion-wave type solutions to the second-order evolutionary equation with power nonlinearities. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 2, art. no. 232. doi: 10.3390/math10020232 .
25. Kazakov A.L., Orlov S.S. On some exact solutions of the nonlinear heat equation. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 112–123 (in Russian).
26. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and numerical study of a boundary value problem of nonlinear filtering with degeneracy. *Vychisl. Tekhnologii*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 57–68 (in Russian).
27. Kazakov A.L., Orlov Sv.S., Orlov S.S. Construction and study of exact solutions to a nonlinear heat equation. *Sib. Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 427–441. doi: 10.1134/S0037446618030060 .
28. Kazakov A.L. On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, vol. 16, pp. 1057–1068 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2019.16.073 .
29. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On some method for solving a nonlinear heat equation. *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 872–881. doi: 10.1134/S0037446612050126 .
30. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Nelineinye uravneniya matematicheskoi fiziki i mekhaniki. Metody resheniya* [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow: Yurait Publ., 2017, 256 p. ISBN: 978-5-534-02317-6 .
31. Kazakov A. Solutions to nonlinear evolutionary parabolic equations of the diffusion wave type. *Symmetry*, 2021, vol. 13, no. 5, art. no. 871. doi: 10.3390/sym13050871 .

32. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical handbook for scientists and engineers.* Mineola, NY: Dover, 2000, 1130 p. ISBN: 9780486320236 . Translated to Russian under the title *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov: Opredeleniya, teoremy, formuly,* Moscow: Lan' Publ., 2003, 832 p.
33. Rozhdestvenskii B.L., Janenko N.N. *Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics.* Transl. Math. Monographs, vol. 55. 2nd Edition. NY: American Math. Soc., 1983, 676 p. doi: 10.1090/mmono/055 . Original Russian text published in Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike.* Izd. 2-e, pererab. i dop. Moscow: Nauka Publ., 1978, 688 p.

Received May 23, 2022
Revised May 31, 2022
Accepted June 6, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-07-00407 A) and jointly by the Russian Foundation for Basic Research and the Taiwan Ministry of Science and Technology (project no. 20-51-S52003).

Alexander Leonidovich Kazakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: kazakov@icc.ru .

Anna Ananevna Lempert, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: lempert@icc.ru .

Cite this article as: A. L. Kazakov, A. A. Lempert. Exact solutions of diffusion wave type for a nonlinear second-order parabolic equation with degeneration. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 114–128 .