ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 517.542

О ШИРИНЕ БЭРА — СУЗУКИ НЕКОТОРЫХ РАДИКАЛЬНЫХ КЛАССОВ[1]

Цз. Го, В. Го, Д. О. Ревин, В. Н. Тютянов

Пусть фиксировано разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества всех простых чисел на попарно не пересекающиеся непустые подмножества σ_i. Конечная группа называется σ-нильпотентной, если она обладает нормальной σ_i-холловой подгруппой для любого $i \in I$. Любая конечная группа обладает σ-нильпотентным радикалом — наибольшей нормальной σ-нильпотентной подгруппой. В заметке доказано, что существует натуральное число $m = m(\sigma)$ такое, что σ-нильпотентный радикал произвольной конечной группы совпадает с множеством таких элементов x, что любые m элементов, сопряженных с x, порождают σ-нильпотентную подгруппу. Обсуждаются другие возможные аналоги классической теоремы Бэра–Сузуки.

Ключевые слова: ширина Бэра — Сузуки, σ-нильпотентная группа, σ-разрешимая группа, полный класс групп.

J. Guo, W. Guo, D. O. Revin, V. N. Tyutyanov. On the Baer–Suzuki width of some radical classes.

Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be a fixed partition of the set of all primes into pairwise disjoint nonempty subsets σ_i. A finite group is called σ-nilpotent if it has a normal σ_i-Hall subgroup for any $i \in I$. Any finite group possesses a σ-nilpotent radical, which is the largest normal σ-nilpotent subgroup. In this note, it is proved that there exists an integer $m = m(\sigma)$ such that the σ-nilpotent radical of any finite group coincides with the set of elements x such that any m conjugates of x generate a σ-nilpotent subgroup. Other possible analogs of the classical Baer-Suzuki theorem are discussed.

Keywords: Baer–Suzuki width, σ-nilpotent group, σ-solvable group, complete class of groups.

MSC: 20D25, 20D10, 20E45, 20F14

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-96-105

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы и под термином “группа” подразумевается конечная группа. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество его простых делителей. Для группы G полагаем $\pi(G) = \pi(|G|)$. Следуя Л. А. Шеметкову [1, § 20], зафиксируем разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно непересекающиеся непустые подмножества σ_i, параметризованные элементами некоторого множества индексов I. Другими словами, мы предполагаем, что

$$\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i \quad \text{и} \quad \sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{для любых} \quad i, j \in I.$$

Напомним понятия, введенные А. Н. Скибой [2; 3]. Группа называется

- *σ-примарной*, если существует $i \in I$ такое, что $\pi(G) \subseteq \sigma_i$;
- *σ-нильпотентной* (пишем $G \in \mathfrak{N}_\sigma$), если G является прямым произведением σ-примарных подгрупп;

[1]Исследования Цз. Го и В. Го поддержаны Национальным естественно-научным фондом (NNSF) Китая, гранты 11961017 и 12171126. Работа Д. О. Ревина и В. Н. Тютянова поддержана совместным грантом РФФИ (проект № 20-51-00007) и БРФФИ (проект № Ф20Р-291). Исследование Д. О. Ревина поддержано также программой фундаментальных исследований РАН (проект FWNF-2022-0002).

- *σ-разрешимой* (пишем $G \in \mathfrak{S}_\sigma$), если G обладает (суб)нормальным рядом с σ-примарными факторами.

В случае, когда $\sigma = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$, имеем $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\sigma$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\sigma$, где $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}$ — классы всех нильпотентных и разрешимых групп соответственно.

В последние годы с подачи А. Н. Скибы [3] в теории конечных групп активно развивается направление, связанное с изучением так называемых σ-свойств (программа Скибы). Один из аспектов программы состоит в выяснении, какие свойства нильпотентных и разрешимых групп и подгрупп и в какой степени могут быть перенесены на σ-нильпотентные и σ-разрешимые аналоги. В данной работе мы изучим, в какой степени классическая теорема Бэра — Сузуки, характеризующая нильпотентный радикал конечной группы, может быть адаптирована для характеризации σ-нильпотентного радикала.

Как и класс нильпотентных групп, класс $\mathfrak{N}_\sigma$ замкнут относительно взятия подгрупп и гоморфных образов, а также является *радикальным*: в группе G подгруппа, порожденная любыми нормальными σ-нильпотентными подгруппами, всегда будет σ-нильпотентной. В частности, группа G всегда обладает *σ-нильпотентным радикалом* $G_{\mathfrak{N}_\sigma}$ — наибольшей нормальной σ-нильпотентной подгруппой. Согласно теореме Бэра — Сузуки (см. [4; 5]) принадлежность элемента группы ее нильпотентному радикалу полностью характеризуется тем, что любая пара сопряженных с x элементов порождает нильпотентную подгруппу

$$G_{\mathfrak{N}} = \{x \in G \mid \langle x^{g_1}, x^{g_2}\rangle \ \text{ нильпотентна для любых } \ g_1, g_2 \in G\}\,.$$

На класс $\mathfrak{N}_\sigma$ данное утверждение не переносится. Более того, справедливо

Предложение 1. *Невозможно указать такую универсальную натуральную константу m, что для любого разбиения σ множества всех простых чисел σ-нильпотентный радикал $G_{\mathfrak{N}_\sigma}$ произвольной группы G совпадает с множеством*

$$\{x \in G \mid \langle x^{g_1}, \dots, x^{g_m}\rangle \ \ \sigma\text{-нильпотентна для любых} \quad g_1, \dots, g_m \in G\}.$$

Тем не менее, как будет показано в статье, константа m, зависящая от σ, всегда существует. Мы дадим более точную формулировку этого утверждения, используя понятие ширины Бэра — Сузуки, введенное в [6, определение 1.15].

Пусть $\mathfrak{X}$ — радикальный класс конечных групп, замкнутый[2] относительно взятия подгрупп. Говорят, что $\mathfrak{X}$ *имеет конечную ширину Бэра — Сузуки*, если существует такое неотрицательное целое число m, что

$$G_{\mathfrak{X}} = \{x \in G \mid \langle x^{g_1}, \dots, x^{g_m}\rangle \in \mathfrak{X} \text{ для любых } g_1, \dots, g_m \in G\}$$

для любой конечной группы G. Наименьшее такое m называется *шириной Бэра — Сузуки* класса $\mathfrak{X}$ и обозначается $\mathrm{BS}(\mathfrak{X})$. Теорема Бэра — Сузуки равносильна тому, что $\mathrm{BS}(\mathfrak{N}) = 2$. Также теореме Бэра — Сузуки эквивалентно равенство $\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_p) = 2$, где $\mathfrak{G}_p$ — класс всех p-групп для любого данного простого числа p [7; 8, гл. 3, теорема 8.2]. Н. Гордеевым, Ф. Грунewальдом, Б. Кунявским и Е. Плоткиным [6; 9; 10] и независимо П. Флавеллом, С. Гэстом и Р. Гуралником [11; 12] установлено, что $\mathrm{BS}(\mathfrak{S}) = 4$. Вопрос, какие радикальные классы имеют конечную ширину Бэра — Сузуки, поставлен в [6, проблема 1.16].

Для фиксированного множества π простых чисел обозначим через $\mathfrak{G}_\pi$ класс всех π-групп, т. е. таких групп G, что $\pi(G) \subseteq \pi$. В [13, теоремы 1.2 и 1.3] доказано, что класс $\mathfrak{G}_\pi$ имеет конечную ширину Бэра — Сузуки, причем если $\pi \neq \mathbb{P}$, то

$$\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi) \leqslant \max\{11, 2(r-2)\},$$

[2]Оригинальное определение из [6] требует от класса $\mathfrak{X}$ лишь его радикальности, однако из определения видно, что a priori естественно предполагать также, что класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия подгрупп.

где r — наименьшее простое число, не принадлежащее π. Существует гипотеза [13, гипотеза 1] (частичные результаты см. [14; 15]), что

$$\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi) \leqslant \begin{cases} \quad r, & \text{если } r \in \{2,3\}, \\ r-1, & \text{если } r \geqslant 5, \end{cases}$$

причем такая оценка неулучшаема. Гипотеза верна, если $r = 2$: как следует[3] из [16, теорема], если $2 \notin \pi$, то $\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi) \leqslant 2$.

Теорема 1. *Для разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества всех простых чисел обозначим через π то из множеств σ_i, которое содержит 2. Тогда ширина Бэра — Сузуки класса $\mathfrak{N}_\sigma$ конечна и равна* $\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi)$.

Разбиение σ можно рассматривать как отношение эквивалентности на множестве простых чисел, где p и q эквивалентны (пишем $p\,\sigma\,q$), если существует $i \in I$ такое, что $p, q \in \sigma_i$. Для неэквивалентных p и q пишем $p \not\sigma q$. Теорема 1 и [13, теорема 1.3] дают

Следствие 1. *Для разбиения $\sigma \neq \{\mathbb{P}\}$ множества $\mathbb{P}$ пусть r — наименьшее простое число такое, что $r \not\sigma 2$. Тогда* $\mathrm{BS}(\mathfrak{N}_\sigma) \leqslant \max\{11, 2(r-2)\}$.

В свете результатов о ширине Бэра — Сузуки класса $\mathfrak{S}$ естественно спросить, конечна ли ширина Бэра — Сузуки класса $\mathfrak{S}_\sigma$? Этот класс, подобно классу разрешимых групп, является *полным* в смысле Виланда [18], т. е. замкнутым относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. По-видимому, справедливо более общее утверждение, из которого следовал бы положительный ответ на сформулированный вопрос.

Гипотеза 1. *Ширина Бэра — Сузуки любого полного класса $\mathfrak{X}$ конечна.*

Замкнутость относительно взятия расширений в определении полного класса является сильным свойством. Классы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_\sigma$ им не обладают, и естественно было бы поставить вопрос о конечности ширины Бэра — Сузуки для любого класса $\mathfrak{X}$, который, подобно классам $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_\sigma$, радикален и замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов (см. [19, проблема 20.81]). Но, в отличие от гипотезы 1, у нас нет подходов к такой постановке вопроса.

В случае полного класса $\mathfrak{X}$, отличного от класса всех групп, ширину Бэра — Сузуки предположительно можно оценить некоторой функцией от максимальной степени n симметрической группы Sym_n, принадлежащей классу $\mathfrak{X}$. Существование такой степени вытекает из теоремы Кэли. Полное исследование данной гипотезы выходит за рамки настоящей заметки. Здесь мы ограничимся редукцией гипотезы 1 к весьма специальному случаю. Через $\mathfrak{X}'$ обозначим класс всех групп, у которых только единичная подгруппа является $\mathfrak{X}$-подгруппой. Для данных натурального числа m и полного класса $\mathfrak{X}$ будем писать $G \in \mathscr{BS}^m_{\mathfrak{X}}$ и говорить, что для группы G выполнена *m-гипотеза* 1, если

$$G_{\mathfrak{X}} = \{x \in G \mid \langle x^{g_1}, \ldots, x^{g_m}\rangle \in \mathfrak{X} \text{ для любых } g_1, \ldots g_m \in G\}.$$

Отрицание гипотезы 1 равносильно тому, что для любого натурального m существует группа, не принадлежащая $\mathscr{BS}^m_{\mathfrak{X}}$.

Следующая теорема описывает строение минимального контрпримера к m-гипотезе 1. Дополнительное предположение о том, что контрпример берется из некоторого класса $\mathfrak{Y}$, под которым в общем случае можно подразумевать класс всех групп, удобно для получения частичных результатов.

[3] Формально в работе [16] доказано, что ширина Бэра — Сузуки класса всех групп нечетного порядка не превосходит двух. Но отсюда легко выводится, что $\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi) \leqslant 2$ для любого множества π нечетных простых чисел. Последнее неравенство независимо, хотя и значительно позднее, доказано также в [17, теорема 1].

Теорема 2. *Пусть класс конечных групп* $\mathfrak{X}$ *полон и содержится в некотором классе* $\mathfrak{Y}$, *замкнутом относительно взятия нормальных подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Допустим,* $\mathfrak{Y} \nsubseteq \mathscr{B}\mathscr{S}^m_{\mathfrak{X}}$ *для некоторого натурального* $m \geqslant 2$, *и группа* $G \in \mathfrak{Y} \setminus \mathscr{B}\mathscr{S}^m_{\mathfrak{X}}$ *выбрана так, что ее порядок является наименьшим. Тогда группа* G *содержит подгруппу* L *и элемент* x *такие, что*

(1) $L \trianglelefteqslant G$;

(2) L *является неабелевой простой группой*;

(3) L *не является* $\mathfrak{X}$- *или* $\mathfrak{X}'$-*группой*;

(4) $C_G(L) = 1$;

(5) *любые* m *сопряженных с* x *элементов порождают* $\mathfrak{X}$-*группу*;

(6) x *имеет простой порядок*;

(7) $G = \langle x, L \rangle$.

В частности, минимальный контрпример к m-гипотезе 1 должен быть почти простой группой, что дает возможность использовать классификацию конечных простых групп для изучения гипотезы.

1. Предварительные сведения

Пусть дано некоторое множество π простых чисел. Символом π' обозначается множество $\mathbb{P} \setminus \pi$. Как обычно, π-*числом* называем натуральное число, все простые делители которого принадлежат π. Для натурального числа n обозначим через n_π его π-*часть*, т.е. наибольшее π-число, делящее n. Элемент группы называем π-*элементом*, если его порядок является π-числом. Если индекс π-подгруппы является π'-числом, то такая подгруппа называется π-*холловой*.

Считаем, что фиксировано разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества $\mathbb{P}$. Тогда любое натуральное число n однозначно представимо в виде

$$n = \prod_{i \in I} n_{\sigma_i},$$

причем почти все числа n_{σ_i} равны 1. Следующая лемма хорошо известна в случае $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ [20, лемма (8.18)] или $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ [8, гл. 1, теорема 3.1], и ее доказательство повторяет доказательство в этих частных случаях с естественными изменениями.

Лемма 1. *Пусть* G — *группа и* $x \in G$. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Для любого* $i \in I$ *однозначно определен* σ_i-*элемент* x_i *так, что почти все* x_i *равны* 1,

$$x = \prod_{i \in I} x_i \quad \text{и} \quad [x_i, x_j] = 1 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

(2) *При этом* $x_i \in \langle x \rangle$ *и* $|x_i| = |x|_{\sigma_i}$ *для всех* $i \in I$.

(3) *Для любых* $x, g \in G$ *выполнено равенство* $(x^g)_i = x_i^g$.

(4) *Допустим,* $G \in \mathfrak{N}_\sigma$ *и* $G_i = G_{\mathfrak{N}_{\sigma_i}}$ *для любого* $i \in I$. *Тогда группа* G *является прямым произведением своих подгрупп* G_i *по всем* $i \in I$ *и отображение* $x \mapsto x_i$, *где* x_i *определено в п.* (1), *совпадает с отображением координатной проекции* $G \to G_i$.

Лемма 2. *Пусть π — собственное непустое подмножество в $\mathbb{P}$ и r — наименьшее простое число, не принадлежащее π. Тогда*

(1) $\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi) \leqslant \max\{11, 2(r-2)\}$, *причем*

(2) *если* $r = 2$, *то* $\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi) = 2$,

(3) *если* $r \neq 2$, *то* $\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi) \geqslant r - 1 \geqslant 2$.

Доказательство. Утверждения (1) и (3) доказаны в [13, теорема 1.3]. Так как $\pi \neq \mathbb{P}$ и $\pi \neq \varnothing$, ясно, что $\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi) \geqslant 2$. Неравенство $\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi) \leqslant 2$ доказано в [17, теорема 1] (или может быть выведено из основного результата работы [16], см. введение). □

Для произвольной группы G положим

$$G_{\mathfrak{X},m} = \{x \in G \mid \langle x^{g_1}, \dots, x^{g_m} \rangle \in \mathfrak{X} \text{ для любых } g_1, \dots, g_m \in G\}.$$

Элемент $x \in G$ назовем $\mathfrak{X}$-*элементом*, если $\langle x \rangle \in \mathfrak{X}$. Следующая лемма прямо вытекает из определений.

Лемма 3. *Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) $G_{\mathfrak{X},1}$ *совпадает с множеством $\mathfrak{X}$-элементов группы G.*

(2) $G_{\mathfrak{X},1} \supseteq G_{\mathfrak{X},2} \supseteq G_{\mathfrak{X},3} \supseteq \dots$.

(3) $G_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X},|G|} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} G_{\mathfrak{X},m}$.

(4) *Если* $H \leq G$, *то* $G_{\mathfrak{X},m} \cap H \subseteq H_{\mathfrak{X},m}$ *и* $G_{\mathfrak{X}} \cap H \leqslant H_{\mathfrak{X}}$.

(5) *Если чертой обозначен некоторый гомоморфизм групп $G \to H$, то* $\overline{G_{\mathfrak{X},m}} \subseteq \overline{G}_{\mathfrak{X},m}$ *и* $\overline{G_{\mathfrak{X}}} \leqslant \overline{G}_{\mathfrak{X}}$.

(6) *Если* $H \trianglelefteq G$, *то* $G_{\mathfrak{X}} \cap H = H_{\mathfrak{X}}$.

(7) *Множество $G_{\mathfrak{X},m}$ замкнуто относительно взятия степеней элементов.*

(8) $G \in \mathcal{BS}_{\mathfrak{X},m}$ *тогда и только тогда, когда* $G_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X},m}$.

(9) $G \in \mathcal{BS}_{\mathfrak{X},m}$ *тогда и только тогда, когда* $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{BS}_{\mathfrak{X},m}$.

2. Доказательство основных результатов

Доказательство предложения 1. Допустим, вопреки доказываемому, существует число m такое, что для любого разбиения σ множества всех простых чисел σ-нильпотентный радикал $G_{\mathfrak{N}_\sigma}$ произвольной группы G совпадает с множеством всех таких элементов $x \in G$, что $\langle x^{g_1}, \dots, x^{g_m} \rangle$ — σ-нильпотентная подгруппа для любых $g_1, \dots, g_m \in G$. Возьмем простое число r так, чтобы выполнялось неравенство $r - 1 > m$. Пусть π — множество всех простых чисел, меньших r, и $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. Пусть $G = \mathrm{Sym}_r$ и $x \in G$ — транспозиция. Ясно, что $G_{\mathfrak{N}_\sigma} = 1$ и, в частности, $x \notin G_{\mathfrak{N}_\sigma} = 1$. Покажем, что любое множество M, состоящее из m различных транспозиций (т. е. любых m элементов, сопряженных с x), порождает π-подгруппу и, следовательно, σ-нильпотентную подгруппу вопреки предположению. В самом деле, рассмотрим граф Γ с множеством вершин $\{1, 2, \dots, r\}$, в котором две различные вершины i, j смежны тогда и только тогда, когда транспозиция (ij) принадлежит M. Так как число ребер в Γ равно

$m < r-1$, граф Γ не связен, и все его компоненты связности $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ имеют мощность, строго меньшую r. Но тогда

$$\langle M \rangle \leqslant \operatorname{Sym}\Delta_1 \times \dots \times \operatorname{Sym}\Delta_s,$$

а каждая из групп $\operatorname{Sym}\Delta_i$, а следовательно и M, является π-группой и σ-нильпотентной группой. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Напомним, что π — то из множеств σ_i, для которого $2 \in \sigma_i$.

Докажем сначала, что $\mathrm{BS}(\mathfrak{N}_\sigma) \geqslant \mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi)$. Положим $m = \mathrm{BS}(\mathfrak{N}_\sigma)$ и допустим $m < \mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi)$. Обозначим для краткости через $\mathfrak{X}$ класс $\mathfrak{G}_\pi$. Тогда существуют группа G и элемент $x \in G$ такие, что

(1) любые m элементов из G, сопряженных с x, порождают $\mathfrak{X}$-подгруппу и

(2) $x \notin G_{\mathfrak{X}}$.

Из (1) следует, что x — $\mathfrak{X}$-элемент и любые m элементов группы G, сопряженных с x, порождают σ-нильпотентную подгруппу. Из того, что $m = \mathrm{BS}(\mathfrak{N}_\sigma)$, вытекает $x \in G_{\mathfrak{N}_\sigma}$. Но множество $\mathfrak{X}$-элементов σ-нильпотентной группы $G_{\mathfrak{N}_\sigma}$ совпадает с $G_{\mathfrak{X}}$ вопреки (2). Значит, $m \geqslant \mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi)$.

Докажем обратное неравенство. Пусть $k = \mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi)$. Предположим, что в конечной группе G любые k элементов, сопряженных с $x \in G$, порождают σ-нильпотентную подгруппу. Требуется показать, что $x \in G_{\mathfrak{N}_\sigma}$. Положим $G_i = G_{\mathfrak{N}_{\sigma_i}}$ для каждого $i \in I$. Тогда

$$G_{\mathfrak{N}_\sigma} = \prod_{i \in I} G_i.$$

Напомним также, что в соответствии с леммой 1 элемент x совпадает с произведением своих σ_i частей x_i по всем $i \in I$ и

$$x \in G_{\mathfrak{N}_\sigma} \text{ тогда и только тогда, когда } x_i \in G_i \text{ для всех } i \in I.$$

Возьмем произвольно $g_1, \dots, g_k$. Подгруппа $H = \langle x^{g_1}, \dots, x^{g_k} \rangle$ является σ-нильпотентной. Пусть H_i — σ_i-холлова подгруппа в H для любого $i \in I$. Тогда H — прямое произведение подгрупп H_i. Образы элементов $x^{g_1}, \dots, x^{g_k}$ относительно проекции $\rho_i : H \to H_i$ совпадают с $x_i^{g_1}, \dots, x_i^{g_k}$ по лемме 1. Поэтому $\langle x_i^{g_1}, \dots, x_i^{g_k} \rangle = H^{\rho_i} = H_i$. Тем самым доказано, что для любых $g_1, \dots, g_k \in G$ и любого $i \in I$ элементы $x_i^{g_1}, \dots, x_i^{g_k}$ порождают σ_i-группу. Поскольку $\mathrm{BS}(\mathfrak{G}_{\sigma_i}) \leqslant \mathrm{BS}(\mathfrak{G}_\pi) = k$ по лемме 2, получаем $x_i \in G_i$, и теорема доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Из свойств классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, утверждения (9) леммы 3 и минимальности порядка группы G вытекает, что

(i) $G_{\mathfrak{X}} = 1$.

Теперь из утверждения (7) леммы 3 следует, что в $G_{\mathfrak{X},m}$ содержится элемент x простого порядка. В силу выбора элемента x и ввиду утверждений (1), (2) леммы 3 получаем:

(ii) В $G_{\mathfrak{X},m}$ содержится $\mathfrak{X}$-элемент x простого порядка, т. е. справедливы утверждения (5) и (6) теоремы.

Ясно, что любой элемент того же порядка, что и x, также будет $\mathfrak{X}$-элементом.

В силу минимальности порядка группы G и пп. (4), (8) леммы 3 замечаем, что имеют место следующие утверждения:

(iii) Если $x \in H$, $H < G$ и $H \in \mathfrak{Y}$, то $x \in H_{\mathfrak{X}}$.

Отсюда и из свойств класса $\mathfrak{Y}$ имеем:

(iv) Если $x \in H$, $H \trianglelefteq G$, то $H = G$.

В частности, это означает, что

(v) $G = \langle x^G \rangle$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Из п. (v) и утверждений (5), (8) леммы 3 получаем:

(vi) $G/N \in \mathfrak{X}$.

Докажем следующее утверждение.

(vii) Коммутатор $[v, x]$ является $\mathfrak{X}$-элементом для любого $v \in N$.

Действительно, так как $x \in G_{\mathfrak{X},m} \subseteq G_{\mathfrak{X},2}$, в силу утверждения (2) леммы 3 подгруппа $\langle x, x^v \rangle$ является $\mathfrak{X}$-подгруппой. Теперь $[v, x] = v^{-1}x^{-1}vx = (x^v)^{-1}x \in \langle x, x^v \rangle$, откуда следует требуемое.

Из п. (i) имеем:

(viii) Подгруппа N не является $\mathfrak{X}$-группой.

Кроме того, докажем следующее утверждение.

(ix) Подгруппа N не является $\mathfrak{X}'$-группой.

В самом деле, если это не так, то поскольку $[v, x] \in N$ для любого $v \in N$, из п. (vii) вытекает, что $x \in C_G(N)$. Так как $C_G(N) \trianglelefteqslant G$, согласно п. (iv) получаем, что $G = C_G(N)$, т. е. $N \leqslant Z(G)$. Ввиду п. (iv) группы N и G/N имеют взаимно простые порядки, и по теореме Шура — Цассенхауза [8, гл. 6, теорема 2.1] получаем $G = PN$ для некоторой $\mathfrak{X}$-группы P. Поскольку $N \leqslant Z(G)$, имеем $P \trianglelefteqslant G$. Поэтому с учетом п. (i) выводим $P \leqslant G_{\mathfrak{X}} = 1$. Но тогда G — $\mathfrak{X}'$-группа и $|x| = 1$, вопреки выбору x.

Из пп. (viii) и (ix) следует, что подгруппа N неразрешима, откуда с учетом минимальности подгруппы N вытекает следующее утверждение:

(x) Справедливо равенство $N = S_1 \times \dots \times S_n$, где $S_1, \dots, S_n$ — неабелевы простые группы. Группа G сопряжениями действует транзитивно на множестве $\Delta = \{S_1, \dots, S_n\}$.

Из п. (x) выводим, что $C_G(N) < G$. Так как $C_G(N) \trianglelefteqslant G$, из п. (iv) получаем:

(xi) $x \notin C_G(N)$,

(xii) $G = \langle x, N \rangle$.

Действительно, пусть $H = \langle x, N \rangle$, и предположим, что $H < G$. Заметим, что $N \in \mathfrak{Y}$ и $H \in \mathfrak{Y}$ в силу свойств класса $\mathfrak{Y}$. Теперь из п. (iii) вытекает, что $x \in H_{\mathfrak{X}}$. Далее, $N \cap H_{\mathfrak{X}}$ — нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа группы N, поэтому $N \cap H_{\mathfrak{X}} \leqslant N_{\mathfrak{X}} \leqslant G_{\mathfrak{X}} = 1$. Таким образом, ввиду нормальности в H подгрупп N и $H_{\mathfrak{X}}$ имеем $[N, H_{\mathfrak{X}}] \leqslant N \cap H_{\mathfrak{X}} = 1$, и, значит, $x \in H_{\mathfrak{X}} \leqslant C_G(N)$ вопреки п. (xi).

Из утверждения (x) видим, что $C_G(N)$ изоморфно вкладывается в G/N, откуда в силу нормальности подгруппы $C_G(N)$ и утверждений (i) и (vi) получаем:

(xiii) $C_G(N) = 1$.

Пусть $S \in \Delta$ — одна из подгрупп $S_1, \dots, S_n$. Покажем, что

(xiv) $|\Delta| = n = 1$ и $N = S$.

В силу пп. (x) и (xii) подгруппа $\langle x \rangle$ транзитивно действует на множестве Δ. Допустим, $n > 1$. Тогда $S \neq S^x$ и $[S, S^x] = 1$. Ввиду выбора S и утверждений (viii) и (x) в S имеется элемент u, не являющийся $\mathfrak{X}$-элементом. Из сказанного следует, что $[u^{-1}, u^x] \in [S, S^x] = 1$, поэтому

$$|u^{-1}u^x| = \mathrm{l.c.m.}(|u^{-1}|, |u^x|) = |u|.$$

Но это означает противоречие между выбором u и утверждением (vii), поскольку $u^{-1}u^x = [u, x]$.

(xv) Справедливы утверждения (1)–(4) и (7) теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 271 с.
2. **Skiba A.N.** On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16. 2015. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010.
3. **Skiba A.N.** On some results in the theory of finite partially soluble groups // Comm. Math. Stat. 2016. Vol. 4, no. 3. doi: 10.1007/s40304-016-0088-z.
4. **Baer R.** Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen // Math. Ann. 1957. Vol. 133, no. 3. P. 256–270. doi: 10.1007/BF02547953.
5. **Suzuki M.** Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed // Ann. Math. 1965. Vo. 82, no. 1. P. 191–212. doi: 10.2307/1970569.
6. **Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E.** A description of Baer–Suzuki type of the solvable radical of a finite group // J. Pure Appl. Algebra. 2009. Vol. 213, no. 2. P. 250–258. doi: 10.1016/j.jpaa.2008.06.006.
7. **Alperin J., Lyons R.** On conjugacy classes of p-elements // J. Algebra. 1971. Vol. 19, no. 2. P. 536–537. doi: 10.1016/0021-8693(71)90086-X.
8. **Gorenstein D.** Finite groups. 2nd ed. NY: Chelsea P. C., 1980. 519 p.
9. **Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E.** Baer–Suzuki theorem for the solvable radical of a finite group // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2009. Vol. 347, no. 5–6. P. 217–222. doi: 10.1016/j.crma.2009.01.004.
10. **Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E.** From Thompson to Baer–Suzuki: a sharp characterization of the solvable radical // J. Algebra. 2010. Vol. 323, no. 10. P. 2888–2904. doi: 10.1016/j.jalgebra.2010.01.032.
11. **Flavell P., Guest S., Guralnick R.** Characterizations of the solvable radical // Proc. Amer. Math. Soc. 2010. Vol. 138, no. 4. P. 1161–1170. doi: 10.1090/S0002-9939-09-10066-7.
12. **Guest S.** A solvable version of the Baer–Suzuki theorem // Trans. Amer. Math. Soc. 2010. Vol. 362, no. 11. P. 5909–5946. doi: 10.1090/S0002-9947-2010-04932-3.
13. **Yang N., Revin D.O., Vdovin E.P.** Baer–Suzuki theorem for the π-radical // Isr. J. Math. 2021. Vol. 245, no. 1. P. 173–207. doi: 10.1007/s11856-021-2209-y.
14. **Ян Н., У Чж. Ревин Д.О.** О точной теореме Бэра — Сузуки для π-радикала: спорадические группы // Сиб. мат. журн. 2022. Vol. 63, no. 2. P. 465–473. doi: 10.33048/smzh.2022.63.216.
15. **Ян Н., У Чж., Ревин Д.О., Вдовин Е.П.** О точной теореме Бэра — Сузуки для π-радикала [e-resource]. 2021. 36 p. arXiv:2105.02442. URL: https://arxiv.org/pdf/2105.02442.pdf (сдано в Мат. сб.).
16. **Тютянов В.Н.** Критерий непростоты для конечной группы // Изв. Гомел. гос. ун-та. им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 2000. Vol. 16, no. 3. P. 125–137.
17. **Ревин Д.О.** О π-теоремах Бэра — Судзуки // Сиб. мат. журн. 2011. Vol. 52, no. 2. P. 430–440.
18. **Wielandt H.** Zusammengesetzte Gruppen: Hölder Programm heute // The Santa Cruz conf. on finite groups (Santa Cruz, 1979). Providence RI: Amer. Math. Soc., 1980. P. 161–173. (Ser. Proc. Sympos. Pure Math.; vol. 37).
19. The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. 20th ed. Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2022. 269 p. URL: https://kourovkanotebookorg.files.wordpress.com/2022/02/20tkt-3.pdf.
20. **Isaacs I.M.** Character theory of finite groups. NY: Acad. Press, 1976. 303 p. (Pure Appl. Math.; vol 359).

Поступила 10.04.2022
После доработки 20.04.2022
Принята к публикации 25.04.2022

Guo Jin
School of Science, Hainan University, Haikou,
Hainan, 570228, P.R. China
e-mail: guojinecho@163.com

Guo Wenbin
School of Science, Hainan University, Haikou,
Hainan, 570228, P.R. China, and

Department of Mathematics, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China
e-mail: wbguo@ustc.edu.cn

Ревин Данила Олегович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
г. Новосибирск;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: revin@math.nsc.ru

Тютянов Валентин Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский филиал Международного университета "МИТСО"
г. Гомель, Беларусь
e-mail: vtutanov@gmail.com

REFERENCES

1. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 271 p.
2. Skiba A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups. *J. Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010 .
3. Skiba A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups. *Comm. Math. Stat.*, 2016, vol. 4, no. 3, pp. 281–309. doi: 10.1007/s40304-016-0088-z .
4. Baer R. Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen. *Math. Ann.*, 1957, vol. 133, no. 3, pp. 256–270. doi: 10.1007/BF02547953 .
5. Suzuki M. Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed. *Ann. Math.*, 1965, vol. 82, no. 1, pp. 191–212. doi: 10.2307/1970569 .
6. Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E. A description of Baer–Suzuki type of the solvable radical of a finite group. *J. Pure Appl. Algebra*, 2009, vol. 213, no. 2, pp. 250–258. doi: 10.1016/j.jpaa.2008.06.006 .
7. Alperin J., Lyons R. On conjugacy classes of p-elements. *J. Algebra*, 1971, vol 19, no. 2, pp. 536–537. doi: 10.1016/0021-8693(71)90086-X .
8. Gorenstein D. *Finite groups.* 2nd ed. NY: Chelsea P. C., 1980, 519 p. ISBN: 0828403015 .
9. Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E. Baer–Suzuki theorem for the solvable radical of a finite group. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 2009, vol. 347, no. 5-6, pp. 217–222. doi: 10.1016/j.crma.2009.01.004 .
10. Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E. From Thompson to Baer–Suzuki: a sharp characterization of the solvable radical. *J. Algebra*, 2010, vol. 323, no. 10, pp. 2888–2904. doi: 10.1016/j.jalgebra.2010.01.032 .
11. Flavell P., Guest S., Guralnick R. Characterizations of the solvable radical. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2010, vol. 138, no. 4, pp. 1161–1170. doi: 10.1090/S0002-9939-09-10066-7 .
12. Guest S. A solvable version of the Baer–Suzuki theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2010, vol. 362, no. 11, pp. 5909–5946. doi: 10.1090/S0002-9947-2010-04932-3 .
13. Yang N., Revin D.O., Vdovin E.P. Baer–Suzuki theorem for the π-radical. *Isr. J. Math.*, 2021, vol. 245, no. 1, pp. 173–207. doi: 10.1007/s11856-021-2209-y .
14. Yang N., Wu Z., Revin D.O. On the sharp Baer–Suzuki theorem for the π -radical: sporadic groups. *Sib. Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 2, pp. 387–394. doi: 10.1134/S0037446622020161 .
15. Yang N., Wu Z., Revin D.O., Vdovin E.P. On the sharp Baer–Suzuki theorem for the π -radical. *arXiv*:2105.02442 , 2021, 36 p. Available on: https://arxiv.org/pdf/2105.02442.pdf .
16. Tyutyanov V.N. A criterion of non-simplicity for a finite group. *Izv. Gomel. Gos. Univ. Im. F. Skoriny*, 2000, vol. 16, no. 3, pp. 125–137 (in Russian).

17. Revin D.O. On Baer–Suzuki π-theorems. *Sib. Math. J.*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 340–347. doi: 10.1134/S0037446611020170 .
18. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölder Programm heute. In: *The Santa Cruz conf. on finite groups (Santa Cruz, 1979)*, Ser. Proc. Sympos. Pure Math., vol. 37, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1980, pp. 161–173. doi: 10.1090/pspum/037/604575 .
19. *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory.* Edited by V.D. Mazurov and E.I. Khukhro. 20th ed. Novosibirsk: Russian Academy of Sciences Siberian Division Institute of Mathematics, 2022. Available on: https://kourovkanotebookorg.files.wordpress.com/2022/02/20tkt-3.pdf .
20. Isaacs I.M. *Character theory of finite groups.* Ser. Pure Appl. Math., vol. 359, NY: Acad. Press, 1976, 303 p. ISBN: 978-0-8218-4229-4 .

Received April 10, 2022
Revised April 20, 2022
Accepted April 25, 2022

Funding Agency: J. Guo and W. Guo were supported by the National Natural Science Foundation of China (project nos. 11961017 and 12171126). D. O. Revin and V. N. Tyutyanov were supported by the joint grant of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-51-00007) and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. F20R-291). D. O. Revin was also supported by the Program for Fundamental Research of the Russian Academy of Sciences (project no. FWNF-2022-0002).

Jin Guo, PhD, Prof. (assoc.), School of Science, Hainan University, Haikou, Hainan, 570228, P.R. China, e-mail: guojinecho@163.com .

Wenbin Guo, PhD, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., School of Science, Hainan University, Haikou, Hainan, 570228, P.R. China, Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, P. R. China, e-mail: wbguo@ustc.edu.cn .

Danila Olegovich Revin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberia Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: revin@math.nsc.ru .

Valentin Nikolayevich Tyutyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gomel Branch of International University "MITSO", Gomel, 246029 Republic of Belarus, e-mail: vtutanov@gmail.com .

Cite this article as: J. Guo, W. Guo, D. O. Revin, V. N. Tyutyanov. On the Baer–Suzuki width of some radical classes. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 96–105.