ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 512.55

ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О БАЗИСЕ ДЛЯ ПОЛУКОЛЬЦА КОСЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

М. В. Бабенко, В. В. Чермных

В статье изучаются полукольца косых многочленов. Такие полукольца являются обобщениями как полуколец многочленов, так и косых колец многочленов. Пусть φ — эндоморфизм полукольца S. Левым полукольцом косых многочленов над S называется множество многочленов вида $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$, $a_i \in S$, с обычными сложением и умножением, заданными правилом $xa = \varphi(a)x$. Известно, что полукольцо многочленов над нётеровым полукольцом не обязано быть нётеровым. В 1976 г. Л. Дейл ввел понятие монического идеала полукольца многочленов $S[x]$ над коммутативным полукольцом, т. е. такого идеала, который вместе с любым своим многочленом $f = \ldots + ax^k + \ldots$ содержит любой его одночлен ax^k. Было показано, что нётеровость полукольца S влечет обрыв возрастающих цепочек монических идеалов из $S[x]$. В нашей статье исследуются монические идеалы полукольца косых многочленов $S[x, \varphi]$. Для их описания рассматриваются φ-цепи коэффициентных множеств идеалов полукольца $S[x, \varphi]$. Основным результатом является доказательство того, что для автоморфизма φ левая (правая) нётеровость полукольца S равносильна конечности строго возрастающих цепочек левых (правых) монических идеалов в полукольце $S[x, \varphi]$. Приведены примеры, показывающие, что инъективности эндоморфизма φ недостаточно для справедливости сформулированного результата.

Ключевые слова: полукольцо косых многочленов, монический идеал, φ-цепь коэффициентных множеств, теорема Гильберта о базисе.

M. V. Babenko, V. V. Chermnykh. Hilbert's basis theorem for a semiring of skew polynomials.

Semirings of skew polynomials are studied. Such semirings are generalizations of both polynomial semirings and skew polynomial rings. Let φ be an endomorphism of a semiring S. The left semiring of skew polynomials over S is the set of polynomials of the form $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$, $a_i \in S$, with the usual addition and the multiplication given by the rule $xa = \varphi(a)x$. It is known that the semiring of polynomials over a Noetherian semiring does not have to be Noetherian. In 1976, L. Dale introduced the notion of monic ideal of a polynomial semiring $S[x]$ over a commutative semiring, i.e., of an ideal that together with any its polynomial $f = \ldots + ax^k + \ldots$ contains each monomial ax^k. It was shown that the Noetherian property of a semiring S implies the ascending chain condition for the monic ideals from $S[x]$. We study the monic ideals of the semiring of skew polynomials $S[x, \varphi]$. To describe them, we define φ-chains of coefficient sets of ideals from the semiring $S[x, \varphi]$. The main result of the paper is the following fact: if φ is an automorphism, then the semiring S is left (right) Noetherian if and only if $S[x, \varphi]$ satisfies the ascending chain condition for the left (right) monic ideals. Examples are given showing that the injectivity of the endomorphism φ is not sufficient for the validity of the formulated result.

Keywords: semiring of skew polynomials, monic ideal, φ-chain of coefficient sets, Hilbert's basis theorem.

MSC: 16Y60

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-56-65

1. Введение

Кольца косых многочленов изучаются достаточно давно. Считается, что впервые кольцо косых многочленов $F[x, \varphi]$ (над полем F с его автоморфизмом φ) рассмотрел О. Оре [1]. Однако идея использования “подкрутки” многочленов использовалась еще Д. Гильбертом [2] при построении некоммутативного упорядоченного кольца с делением (тела Гильберта). Информацию о свойствах колец косых многочленов можно найти в монографиях [3; 4].

Укажем некоторые результаты, имеющие отношение к тематике нашей статьи. Известно [4, Theorem 2.9], что левое кольцо косых многочленов $A[x, \varphi]$ над нётеровым слева (справа) кольцом A с автоморфизмом φ является нётеровым слева (соответственно справа). Этот результат является обобщением теоремы Гильберта о базисе. Легко приводятся примеры, показывающие, что для полуколец теорема Гильберта о базисе неверна.

Л. Дэйл в [5; 6] ввел понятие *монического* идеала (monic ideal) полукольца многочленов $S[x]$ над коммутативным полукольцом S — идеала, который вместе с любым многочленом $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ содержит каждый его одночлен a_ix^i; в нашей работе идеал с таким свойством назван m-идеалом. Монические идеалы позволили получить [6, Theorem 4.2] следующий полукольцевой аналог теоремы Гильберта о базисе: *коммутативное полукольцо S нётерово в точности тогда, когда $S[x]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей монических идеалов.*

Мы получили обобщение теоремы Дэйла для полукольца косых многочленов над необязательно коммутативным полукольцом. Основным результатом статьи является теорема 1, которая была анонсирована в [7, лемма 3; 8, теорема, с. 14].

Теорема 1. *Пусть φ — автоморфизм полукольца S. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *S — нётерово слева (справа) полукольцо;*

2) *$S[x, \varphi]$ не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых (правых) m-идеалов.*

Для описания левых и правых m-идеалов полукольца $S[x, \varphi]$ косых многочленов вводятся в рассмотрение коэффициентные множества идеалов полукольца косых многочленов, а также левые и правые φ-цепи множеств полукольца S.

Наконец, справедливо обобщение теоремы 1 для полукольца косых формальных степенных рядов над нётеровым полукольцом (предложение 4).

2. φ-Цепи и m-идеалы

Полукольцом называется непустое множество S с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$.

Будем рассматривать в статье полукольца с единицей, отличной от нуля, а все эндоморфизмы сохраняют нуль и единицу.

Пусть S — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца S, $S[x, \varphi]$ — множество всех многочленов вида $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ с переменной x и с коэффициентами из S. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xa = \varphi(a)x$. Стандартно проверяется, что $S[x, \varphi]$ является полукольцом, которое называется *левым полукольцом косых многочленов.*

Обычным образом определяются степень $\deg f$ многочлена f, старший коэффициент многочлена. *Ядром эндоморфизма φ полукольца S* называется множество $\operatorname{Ker}\varphi$ всех элементов из S, имеющих нулевой образ. Следует отметить, что полукольцевой гомоморфизм с нулевым ядром не обязан быть инъективным.

Пусть S — полукольцо без делителей нуля, а $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. Тогда степень произведения ненулевых многочленов из $S[x, \varphi]$ равна сумме степеней множителей. Если $f = \ldots + ax^k$, $g = \ldots + bx^m$, то $0 \neq a\varphi^k(b)$ — старший коэффициент многочлена fg. Отсюда следует, что если S — полукольцо без делителей нуля и $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ (в частности, если φ — инъективный эндоморфизм), то $S[x, \varphi]$ является полукольцом без делителей нуля.

Напомним, что *левый (правый) идеал произвольного полукольца S* — это подполугруппа аддитивной полугруппы S, выдерживающая умножение слева (справа) на элементы из S.

Определение 1. Пусть B — произвольный левый или правый идеал полукольца $S[x, \varphi]$. Назовем множества $B_i = \{a \in S : ax^i$ — одночлен в некотором многочлене $f \in B\}$ коэффициентными множествами одностороннего идеала B.

Лемма 1. *Пусть L — левый идеал полукольца $R = S[x, \varphi]$, L_i — его коэффициентные множества. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *каждое* L_i *является левым идеалом полукольца* S;

2) $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$ *для любого целого неотрицательного* i;

3) $\varphi^j(L_i) \subseteq L_{i+j}$ *для любых целых неотрицательных* i, j;

4) *если* L *— конечно порожденный левый идеал полукольца* R*, то каждый его коэффициентный левый идеал конечно порожден.*

Доказательство. 1) Пусть $a, b \in L_i$, значит, ax^i — одночлен в некотором многочлене $f \in L$, а bx^i — одночлен в некотором многочлене $g \in L$. Многочлен $f + g$ принадлежит L и содержит одночлен $(a+b)x^i$, поэтому $a + b \in L_i$. Если $c \in S$ — многочлен нулевой степени, то cf принадлежит левому идеалу L. Многочлен cf содержит одночлен cax^i, следовательно, $ca \in L_i$.

2) Пусть $a \in L_i$. Тогда $f = \ldots + ax^i + \ldots$ для некоторого $f \in L$. Поскольку $xf = \ldots + xax^i + \ldots = \ldots + \varphi(a)x^{i+1} + \ldots \in L$, то $\varphi(a) \in L_{i+1}$, поэтому $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$.

Утверждение 3) получается индукцией из п. 2).

4) По утверждению 1) коэффициентные множества левого идеала B являются левыми идеалами. Пусть L порождается многочленами

$$f_1 = f_{10} + f_{11}x + \ldots,$$
$$\ldots$$
$$f_k = f_{k0} + f_{k1}x + \ldots,$$

и L_t — произвольный коэффициентный левый идеал. Для любого $a \in L_t$ найдется многочлен $f = \ldots + ax^t + \ldots$, лежащий в L. Тогда для некоторых $g_i = g_{i0} + g_{i1}x + \ldots \in R$, $i = 1, \ldots, k$, выполняется $f = g_1 f_1 + \ldots + g_k f_k$. Получаем

$$a = \sum_{i_1 + j_1 = t} g_{1i_1}\varphi^{i_1}(f_{1j_1}) + \ldots + \sum_{i_k + j_k = t} g_{ki_k}\varphi^{i_k}(f_{kj_k}).$$

Следовательно, L_t порождается элементами $\varphi^{t-j}(f_{ij})$ для $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, t$. □

Замечание 1. Утверждение, обратное к свойству (4) леммы 1, неверно. Рассмотрим булеву решетку $\langle A, +, \cdot \rangle$ со счетным множеством атомов $\{a_0, a_1, \ldots\}$. Пусть $b_0 = a_0, b_i = a_0 + \ldots + a_i$, и каждый идеал B_i порожден элементом b_i. Получаем счетную строго возрастающую цепь главных идеалов $B_0 \subset B_1 \subset \ldots$. Стандартно проверяется, что $B^* = \{\sum c_i x^i \in A[x] : c_i \in B_i\}$ — идеал полукольца $A[x]$, а $B_0, B_1, \ldots$ — его коэффициентные идеалы. Допустим, что B^* порождается многочленами $f_1, \ldots, f_k$. Пусть r — целое число, большее $\max\{\deg f_1, \ldots, \deg f_k\}$. Тогда $b_r \in B_r \setminus B_{r-1}$ и любой многочлен, имеющий b_r среди своих коэффициентов (например, $b_r x^r \in B^*$), не выразить через $f_1, \ldots, f_k$.

Определение 2. Левый идеал L полукольца $S[x, \varphi]$ назовем *левым* m*-идеалом*, если из того, что многочлен $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ лежит в L, следует, что $a_k x^k \in L$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n$. Аналогично определяется правый m-идеал.

Нулевой и несобственный идеалы полукольца $S[x, \varphi]$ являются m-идеалами. Еще одним примером левого (правого) m-идеала является главный левый (правый) идеал, порожденный одночленом x^k. Кроме указанных тривиальных типов главных левых m-идеалов полукольцо косых многочленов может содержать главный левый m-идеал, порождающий многочлен которого не является одночленом [9, пример 4) и предложение 1]. Очевидно, что множество всех левых m-идеалов полукольца $S[x, \varphi]$ образует полную подрешетку решетки всех левых идеалов из $S[x, \varphi]$ — пересечение и сумма левых m-идеалов снова являются левыми m-идеалами.

Рассмотрим сейчас конструкцию, позволяющую получить описание левых m-идеалов.

Определение 3. Пусть φ — эндоморфизм полукольца S. Назовем последовательность левых идеалов $L_0, L_1, \ldots$ из A левой φ-цепью, если для любого целого неотрицательного i выполняется $\varphi(L_i) \subseteq L_{i+1}$.

Пусть $L_0, L_1, \ldots$ — произвольная левая φ-цепь полукольца S. Положим

$$L^* = \Big\{ \sum a_i x^i \in S[x,\varphi] \colon a_i \in L_i, \text{ суммы конечные} \Big\}.$$

Тогда L^* является левым m-идеалом. Обратно, если B — левый идеал полукольца $S[x,\varphi]$, то по лемме 1 его левые коэффициентные идеалы образуют φ-цепь, для которой также возникает выше определенное множество B^*. Из текста всегда будет понятно, используется обозначение B^* для некоторой φ-цепи или же для идеала B.

П р и м е р 1. Как показано в [5], если B — произвольный левый идеал полукольца $S[x]$, то его коэффициентные левые идеалы образуют возрастающую цепь. Ситуация в полукольце косых многочленов иная. Действительно, рассмотрим S — произвольное полукольцо, $A = S \times S$, и $\varphi : A \to A$ — автоморфизм, заданный $(a,b) \to (b,a)$. Положим $B_0 = S \times 0$, тогда $0 \times S = \varphi(B_0) = B_1$ и $B_0 \nsubseteq B_1$. Получаем левую φ-цепь $B_0, B_1, B_0, B_1, \ldots$, не являющуюся возрастающей. Легко проверить, что множество B^*, построенное для этой левой φ-цепи, является левым идеалом полукольца $A[x,\varphi]$, а B_i являются его коэффициентными идеалами.

Предложение 1. *Пусть B, C — левые идеалы полукольца $S[x,\varphi]$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *B^* — левый m-идеал*;

2) *$B \subseteq B^*$, и B^* — наименьший левый m-идеал, содержащий B*;

3) *$B = B^*$ в точности тогда, когда B — левый m-идеал*;

4) *B^* совпадает с пересечением всех левых m-идеалов из R, содержащих B*;

5) *если $B \subseteq C$, то $B^* \subseteq C^*$*;

6) *$B^* \subseteq C^*$ тогда и только тогда, когда $B_i \subseteq C_i$ для всех коэффициентных левых идеалов для B и C*;

7) *$B^* = C^*$ тогда и только тогда, когда $B_i = C_i$ для всех коэффициентных левых идеалов для B и C*;

8) *$(B \cap C)^* \subseteq B^* \cap C^*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Очевидно, что B^* замкнут относительно суммы. Пусть $h = h_0 + h_1 x + \ldots + h_m x^m \in R$ и $f = f_0 + f_1 x + \ldots + f_n x^n \in B^*$. Одночлен произвольной степени k произведения hf имеет вид $\sum_{i+j=k} h_i x^i f_j x^j = \sum_{i+j=k} h_i \varphi^i(f_j) x^k$. Покажем, что любое слагаемое $h_i\varphi^i(f_j)$, $i + j = k$, принадлежит идеалу B_k. Действительно, если $i = 0$, то $h_0 f_k \in B_k$. Если же $i \neq 0$, то по лемме 1 $\varphi^i(f_j) \subseteq B_{i+j} = B_k$, поэтому $h_i\varphi^i(f_j) \in B_k$. Таким образом, B^* — левый идеал. Наконец, в силу определения B^* все одночлены $f_i x^i$ многочлена f содержатся в B^*, поэтому B^* — левый m-идеал.

2) Включение $B \subseteq B^*$ очевидно. Возьмем произвольный левый m-идеал M, содержащий B, и покажем, что $B^* \subseteq M$. Пусть $f = f_0 + \ldots + f_i x^i + \ldots + f_n x^n \in B^*$. Для любого одночлена $f_i x^i$ найдется многочлен $g_i = \ldots + f_i x^i + \ldots$, лежащий в B. Тогда $g_i \in M$ и, значит, $f_i x^i \in M$. Отсюда следует $f \in M$.

3) Если $B = B^*$, то по п. 1) B^*, а значит, и B являются левыми m-идеалами. Обратная импликация верна по п. 2).

4) Следует из утверждения 2).

5) Пусть $B \subseteq C$, тогда $B_i \subseteq C_i$ для всех коэффициентных левых идеалов, поэтому $B^* \subseteq C^*$.

6) Покажем, что из $B^* \subseteq C^*$ следует $B_i \subseteq C_i$ для всех коэффициентных левых идеалов для B и C. Предположим, найдется i, для которого не выполняется $B_i \subseteq C_i$, то есть найдется $a \in B_i \backslash C_i$. Одночлен ax^i лежит в B^*, но не содержится в C^*, противоречие. Обратное очевидно.

7) Очевидно.

8) Поскольку $B \cap C \subseteq B$ влечет $(B \cap C)^* \subseteq B^*$ по пункту 5) и аналогично $(B \cap C)^* \subseteq C^*$, то $(B \cap C)^* \subseteq B^* \cap C^*$. □

З а м е ч а н и е 2. Дэйл в [5, Theorem 3.6] утверждает, что в полукольце многочленов $S[x]$ для произвольных идеалов $B, C \subseteq A[x]$ справедливо равенство $(B \cap C)^* = B^* \cap C^*$. Мы согласны с включением $(B \cap C)^* \subseteq B^* \cap C^*$, доказанным в предыдущем предложении для полукольца косых многочленов. Обоснование обратного включения Дэйл ограничивает фразой “очевидно”. Покажем, что это включение неверно. Рассмотрим цепь $L = \{0, b, c, 1\}, b < c$, полукольцо многочленов $L[x]$ и главные идеалы $B = (b + x)$ и $C = (c + x)$. Несложно показать, что $B \cap C$ не содержит многочлена вида $a + x + \ldots$ для произвольного $a \in L$. Это означает, что $x \notin (B \cap C)^*$, хотя $x \in B^* \cap C^*$.

Подход к описанию правых m-идеалов левого полукольца косых многочленов $S[x, \varphi]$ аналогичен ситуации с левыми m-идеалами. Пусть R — произвольный правый идеал полукольца $S[x, \varphi]$, и $R_0, R_1, \ldots$ — его коэффициентные множества. Непосредственно проверяется, что R_i удовлетворяют условиям 1) и 2), заложенным в следующем определении.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть φ — эндоморфизм полукольца S. Возрастающую цепь $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \ldots$ подмножеств полукольца S назовем *правой φ-цепью*, если

1) R_0 — правый идеал полукольца S, и R_i — аддитивные подмоноиды в S;
2) $R_i \varphi^i(S) \subseteq R_i$ для всех целых неотрицательных i.

Отметим, что второе условие в определении можно усилить до $R_i \varphi^i(S) = R_i$, поскольку φ сохраняет единицу.

П р и м е р 2. Любая счетная возрастающая цепь правых идеалов R_i полукольца S, удовлетворяющая условию 2), является правой φ-цепью. Однако гарантированно является правым идеалом в правой φ-цепи только R_0. Действительно, пусть $S = \langle \mathbb{R}^+_\infty, \vee, \wedge \rangle$ — линейно упорядоченное множество неотрицательных действительных чисел; добавленная “бесконечность” является единицей этого полукольца. Пусть $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$ и $\varphi(a) = a + 1$ для всех $a \notin \{0, \infty\}$, тогда φ является инъективным эндоморфизмом полукольца S. Положим $R_0 = \{0\}$, $R_i = [1/2^i; 1] \cup \{0\}$ для всех натуральных i. Получаем строго возрастающую правую φ-цепь $R_0 \subset R_1 \subset \ldots$ коммутативного полукольца S. Все элементы правой φ-цепи — подмоноиды S, но не являются, кроме R_0, идеалами. Из этого также вытекает, что эти множества не образуют левую φ-цепь. Пример 1 показывает, что и левая φ-цепь не обязана быть правой φ-цепью.

Пусть $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \ldots$ — правая φ-цепь произвольного полукольца S. Множество

$$R^* = \Big\{ \sum a_i x^i \in S[x, \varphi] : a_i \in R_i, \text{ суммы конечные} \Big\}$$

является правым m-идеалом, R_i — его коэффициентные множества.

Для правых m-идеалов справедливы утверждения, симметричные указанным в предложении 1. Доказательства принципиально не различаются, и в дальнейшем будем пользоваться этими результатами без дополнительных ссылок.

3. Полукольцо косых многочленов над нётеровым полукольцом

Полукольцом с делением называется полукольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим; полукольцо с делением, не являющееся телом, называется *полутелом*, а коммутативное полутело — *полуполем.*

Пусть φ — эндоморфизм полукольца с делением F. Описание левых m-идеалов полукольца $F[x, \varphi]$ просто. Заметим, что любая левая φ-цепь полукольца F состоит из нулевых и несобственных идеалов; два крайних случая определяют нулевой m-идеал полукольца $F[x, \varphi]$ и m-идеал, совпадающий с $F[x, \varphi]$. Пусть сейчас $B_k = F$ — первый ненулевой идеал в левой φ-цепи $\{B_i\}$. Поскольку эндоморфизм φ ненулевой, то $0 \neq \varphi(B_k) \subseteq B_{k+1}$, откуда $B_{k+1} = F$. По индукции получаем $B_n = F$ для любого $n \geq k$. Тогда левый m-идеал B^*, соответствующий левой φ-цепи $\{B_i\}$, является главным левым идеалом, порожденным многочленом x^k.

Если φ — автоморфизм полукольца с делением F, то правые φ-цепи будут состоять из идеалов полукольца F, поэтому строение правых m-идеалов из $F[x, \varphi]$ будет таким же, как левых m-идеалов. Ситуация изменится, если φ автоморфизмом не является. Ниже в примере 4 рассмотрено полукольцо косых многочленов над полуполем $\langle \mathbb{Q}^+, \vee, \cdot \rangle$ с инъективным эндоморфизмом φ. Элементы построенных в примере правых φ-цепей (за исключением начального) не являются идеалами в $\mathbb{Q}^+$, и задаваемые этими φ-цепями правые m-идеалы в $\mathbb{Q}^+[x, \varphi]$ уже не будут главными. Более того, приведен пример правого m-идеала, даже не являющегося конечно порожденным.

Известно, что кольцо многочленов (а также левое кольцо косых многочленов с инъективным эндоморфизмом) над телом является кольцом главных левых идеалов (см., например, [10, предложение 15.1; 4, Theorem 2.9]). Полукольцо косых многочленов над полутелом уже не является полукольцом главных левых идеалов. Однако можно получить некоторую информацию о полукольце косых многочленов над полукольцом с делением в терминах m-идеалов.

Предложение 2. *Если F — полукольцо с делением, φ — эндоморфизм F, то $R = F[x, \varphi]$ — полукольцо без делителей нуля, каждый левый m-идеал которого является главным. Если φ — автоморфизм, то каждый правый m-идеал полукольца $R = F[x, \varphi]$ является главным.*

Доказательство. Пусть $f = f_i x^i + \ldots$, $g = g_j x^j + \ldots$ — такие ненулевые многочлены из R, что $fg = 0$, а f_i, g_j — их младшие (ненулевые) коэффициенты. Тогда $f_i \varphi^i(g_j) = 0$. Случай $i = 0$ влечет $f_i g_j = 0$, поэтому невозможен. Если $i \neq 0$, то $\varphi^i(g_j) = 0$, откуда $\varphi(a) = 0$ для некоторого $a \neq 0$. Тогда $\varphi(1) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = 0$ влечет, что φ — нулевой эндоморфизм. Вновь полученное противоречие доказывает, что R не содержит делителей нуля. Для произвольного ненулевого левого m-идеала B полукольца R соответствующая ему φ-цепь левых коэффициентных идеалов имеет вид $0, \ldots, 0, F, F, \ldots$ с первым идеалом F на k-м месте. Поэтому $B = (x^k)$. Строение правых m-идеалов в случае автоморфизма φ рассмотрено перед предложением. □

Пример 3. Покажем, что не каждый главный левый идеал полукольца многочленов, а значит, и полукольца косых многочленов является левым m-идеалом. Пусть $\mathbb{Q}^+$ — полуполе неотрицательных рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения. Допустим, что главный идеал $B = (1 + x)$ полукольца $\mathbb{Q}^+[x]$ является m-идеалом. Тогда B содержит 1 и, следовательно, совпадает с $\mathbb{Q}^+[x]$. Но ясно, что не каждый многочлен кратен многочлену $1 + x$. В этом же полукольце идеал всех многочленов ненулевой степени, очевидно, не является главным идеалом.

Полукольцо называется *нётеровым слева*, если оно не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых идеалов.

Характеризация нётеровых полуколец известна и совпадает с кольцевой.

Предложение 3 [11, Proposition 6.16]. *Для полукольца S равносильны условия:*
1) *S — нётерово слева*;
2) *любое множество левых идеалов из S имеет максимальный элемент*;
3) *каждый левый идеал из S конечно порожден.*

В монографии [4] приведен пример Example 2.11(ii), который мы опишем с несущественными изменениями. Пусть $R = F(y)$ — поле рациональных функций над полем F, φ — инъективный эндоморфизм R, заданный $\varphi(f(y)/g(y)) = f(y^2)/g(y^2)$ для произвольных $f, g \in F[y]$. Кольцо левых косых многочленов $R[x, \varphi]$ является кольцом главных левых идеалов без делителей нуля, однако $R[x, \varphi]$ не является нётеровым справа. При обосновании этого примера строится бесконечная строго возрастающая последовательность правых идеалов. Более того, члены построенной последовательности оказываются правыми m-идеалами кольца $R[x, \varphi]$.

Класс полей не пересекается с классом полуполей, поэтому приведем сейчас аналогичный пример для полуполей. Именно, покажем, что полукольцо косых многочленов над полуполем с инъективным эндоморфизмом не обязано удовлетворять условию максимальности для правых m-идеалов.

П р и м е р 4. Пусть $S = \langle \mathbb{Q}^+, \vee, \cdot \rangle$ — аддитивно идемпотентное полуполе неотрицательных рациональных чисел ($\vee$ — операция взятия максимума двух чисел), φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, заданный $\varphi(a) = a^2$. По предложению 2 полукольцо $S[x, \varphi]$ является полукольцом главных левых m-идеалов. Обозначим

$$\begin{aligned}
&B_1 = \varphi(S),\\
&B_2 = \varphi(S) \cup 2\varphi^2(S),\\
&B_3 = \varphi(S) \cup 2\varphi^2(S) \cup 3\varphi^3(S),\\
&B_4 = \varphi(S) \cup 2\varphi^2(S) \cup 3\varphi^3(S) \cup 5\varphi^4(S),\\
&\quad \dots\\
&B_k = \varphi(S) \cup p_1\varphi^2(S) \cup \ldots \cup p_{k-1}\varphi^k(S),
\end{aligned}$$

где p_i — i-е простое число. Заметим, что для любых натуральных $i \leq k$ выполняется равенство $\varphi^i(S)\varphi^k(S) = \varphi^i(S)$. Отсюда получаем $B_k\varphi^k(S) = B_k$. Очевидно, каждое B_k является аддитивным (относительно операции $\vee$) подмоноидом $\mathbb{Q}^+$, поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность

$$0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_{k-1} \subset B_k \subseteq B_k \subseteq \ldots$$

является правой φ-цепью. Обозначим через B_k^* соответствующий этой правой φ-цепи правый m-идеал. Тем самым получаем бесконечную строго возрастающую цепь $B_1^* \subset B_2^* \subset B_3^* \subset \ldots$ правых m-идеалов полукольца $R = S[x, \varphi]$. Покажем, что каждый B_k^* является конечно порожденным правым m-идеалом с образующими $x, 2x^2, 3x^3, 5x^4, \ldots, p_{k-1}x^k$. Действительно, каждый из одночленов $x = \varphi(1)x$ или $p_{i-1}x^i = p_{i-1}\varphi^i(1)x^i$ лежит в правом идеале B_k^*, поэтому $xR + 2x^2R + \ldots + p_{k-1}x^kR \subseteq B_k^*$. Обратно, пусть $f \in B_k^*$ и ax^i — произвольный одночлен многочлена f. Элемент a лежит в B_i, поэтому $a \in \varphi(S)$ либо $a \in p_{j-1}\varphi^j(S)$ для некоторого $j \leq i$. В первом случае $a = \varphi(u)$ для некоторого $u \in S$, и тогда $ax^i = \varphi(u)x^i = x \cdot ux^{i-1}$. Во втором случае $a = p_{j-1}\varphi^j(v)$ для некоторого $v \in S$ и $ax^i = p_{j-1}\varphi^j(v)x^i = p_{j-1}x^j \cdot vx^{i-j}$. Получили, что каждый ax^i равен произведению некоторого образующего на подходящий многочлен из R. Следовательно, f равен конечной сумме произведений образующих на многочлены из R, поэтому $B_k^* \subseteq xR + 2x^2R + \ldots + p_{k-1}x^kR$. Несложно проверить, что никакая строго меньшая подсистема образующих не будет порождать B_k^*. Таким образом, B_1^* — главный правый m-идеал, порожденный x, а для всех $k > 1$ B_k^* являются конечно порожденными, но не главными правыми m-идеалами полукольца $S[x, \varphi]$.

Если же мы рассмотрим бесконечную строго возрастающую правую φ-цепь $0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_k \subset \ \ldots$, то правый m-идеал B^*, соответствующий ей, не будет конечно порожденным. Действительно, пусть $f_1, \ldots, f_k \in B^*$. Будем считать, что все коэффициенты этих многочленов являются несократимыми дробями, и пусть p_n — максимальное из простых чисел, присутствующих в разложении числителя или знаменателя коэффициентов многочленов $f_i, i = 1, \ldots, k$. Тогда $p_{n+1}x^{n+2}$ лежит в B^*, но не лежит в правом идеале, порожденном многочленами $f_1, \ldots, f_k$.

Согласно известной теореме Гильберта о базисе кольцо многочленов над нётеровым слева кольцом нётерово слева. Для кольца косых многочленов $R[x, \varphi]$ в случае, если φ является автоморфизмом, правая (или левая) нётеровость кольца R влечет правую (соответственно левую) нётеровость кольца $R[x, \varphi]$ (см. [4, Theorem 2.9]). В той же работе приведен пример Example 2.1(iii) кольца косых многочленов $R[x, \varphi]$ над кольцом главных идеалов с инъективным эндоморфизмом φ, не являющегося нётеровым ни слева, ни справа.

Для полуколец теорема Гильберта о базисе неверна. К примеру, рассмотрим множество B всех многочленов ненулевой степени в полукольце $\mathbb{N}[x]$. Ясно, что B — идеал в $\mathbb{N}[x]$. Заметим, что многочлены $x, x{+}1, x{+}2, \ldots$ обязаны лежать в любой системе образующих идеала B. Таким образом, идеал B не является конечно порожденным, хотя каждый идеал в полукольце $\mathbb{N}$ конечно порожден (см., например, [12, предложение 8.1; 13]).

Докажем сейчас аналог теоремы Гильберта о базисе для полукольца косых многочленов над нётеровым полукольцом.

Доказательство теоремы 1. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть S — нётерово слева полукольцо и $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ — возрастающая цепь левых m-идеалов полукольца $S[x,\varphi]$. Для левого m-идеала B_i обозначим через $B_{i0}, B_{i1}, \dots$ его коэффициентные левые идеалы. Для любого натурального i выполняется $\varphi(B_{ii}) \subseteq B_{i,i+1} \subseteq B_{i+1,i+1}$, поэтому получаем возрастающую цепь $B_{11} \subseteq \varphi^{-1}(B_{22}) \subseteq \varphi^{-2}(B_{33}) \subseteq \dots$ левых идеалов полукольца S. В силу левой нётеровости, начиная с некоторого $k \in \mathbb{N}$, имеем $\varphi^{-k+1}(B_{k,k}) = \varphi^{-k}(B_{k+1,k+1}) = \dots$. Поскольку φ является автоморфизмом, получаем $\varphi(B_{ss}) = B_{s+1,s+1}$ для всех $s \geq k$. Отсюда следует, что $\varphi^j(B_{kk}) = B_{k+j,k+j}$ для любого натурального j. Пусть j — произвольное целое неотрицательное число и $0 \leq i \leq j$. Тогда

$$\varphi^j(B_{kk}) \subseteq B_{k,k+j} \subseteq B_{k+i,k+j} \subseteq B_{k+j,k+j} = \varphi^j(B_{kk}),$$

откуда $B_{k,k+j} = B_{k+i,k+j}$. Если $i > j$, то

$$\varphi^i(B_{kk}) \subseteq \varphi^{i-j}(B_{k,k+j}) \subseteq \varphi^{i-j}(B_{k+i,k+j}) \subseteq B_{k+i,k+i} = \varphi^i(B_{kk}),$$

откуда $\varphi^{i-j}(B_{k,k+j}) = \varphi^{i-j}(B_{k+i,k+j})$. Из этого равенства получаем $B_{k,k+j} = B_{k+i,k+j}$. Таким образом, у левых m-идеалов $B_k, B_{k+1}, \dots$ коэффициентные множества при x^{k+j} совпадают для любого целого неотрицательного j. Пусть $i = 0, 1, \dots, k-1$. Рассмотрим возрастающую цепь $B_{1i} \subseteq B_{2i} \subseteq \dots$ коэффициентных левых идеалов. Найдется такое $n_i \in \mathbb{N}$, что $B_{n_i,i} = B_{ji}$ для каждого $j \geq n_i$. Пусть $r = \max\{n_0, \dots, n_{k-1}, k\}$. Тогда для любых $s, t \geq r$ $B_{si} = B_{ti}$ для всех $i = 0, 1, \dots$. Получили, что у левых m-идеалов B_s и B_t совпадают соответствующие коэффициентные множества, поэтому $B_s = B_t$.

Пусть S — нётерово справа полукольцо и $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ — возрастающая цепь правых m-идеалов полукольца $S[x,\varphi]$. Для правого m-идеала C_i обозначим через $C_{i0}, C_{i1}, \dots$ его коэффициентные множества. Заметим, что если φ — автоморфизм полукольца S, то коэффициентные множества любого правого идеала полукольца $S[x,\varphi]$ являются правыми идеалами в S. Поэтому для возрастающей цепи $C_{11} \subseteq C_{22} \subseteq C_{33} \subseteq \dots$ правых идеалов полукольца S в силу правой нётеровости, начиная с некоторого $k \in \mathbb{N}$, имеем $C_{ss} = C_{s+1,s+1}$ для всех $s \geq k$. Повторяя далее рассуждения, как и для левого случая, получаем требуемый результат.

2) $\Rightarrow$ 1) Возьмем произвольную возрастающую цепь $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ левых (правых) идеалов полукольца S и покажем, что она стабилизируется с некоторого номера k. Каждому левому (правому) идеалу A_i этой цепи поставим в соответствие множество $A_i^* \subseteq S[x,\varphi]$, составленное из всех многочленов, свободный член которых лежит в A_i. Легко показать, что каждое из A_i^* является левым (правым) m-идеалом (другими словами, A_i^* определяется левой (правой) φ-цепью $A_i, S, S, \dots$). Ясно, что $A_1^*, A_2^*, \dots$ образуют возрастающую цепь. По условию эта цепь стабилизируется, т. е. начиная с некоторого $k \in \mathbb{N}$, имеем $A_s^* = A_k^*$ для всех $s \geq k$, откуда следует $A_s = A_k$ для всех $s \geq k$. $\square$

Следствие 1 [6, Theorem 4.2]. *Коммутативное полукольцо S нётерово тогда и только тогда, когда любая строго возрастающая цепь m-идеалов полукольца $S[x]$ конечна.*

Пусть S — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца S, $S[[x,\varphi]]$ — множество формальных степенных рядов вида $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $a_i \in S$. С почленным сложением и умножением, задаваемым правилом $xa = \varphi(a)x$ и его следствиями, $S[[x,\varphi]]$ становится полукольцом, которое называется *полукольцом косых формальных рядов*. Полукольцо $S[x,\varphi]$ является подполукольцом $S[[x,\varphi]]$. Понятия, вводимые нами для полукольца косых многочленов, естественным образом переносятся на полукольцо косых формальных степенных рядов, а именно, определения m-идеалов, коэффициентных множеств, φ-цепей. Описание левых (правых) m-идеалов полукольца $S[[x,\varphi]]$ в терминах коэффициентных множеств не отличается от описания в полукольце косых многочленов. Более того, справедлив следующий результат.

Предложение 4. *Если φ — автоморфизм полукольца S, то равносильны следующие условия*:

1) S *— нётерово слева* (*справа*) *полукольцо*;

2) $S[[x,\varphi]]$ *не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых* (*правых*) m*-идеалов.*

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ore O.** Theory of non-commutative polynomials // Ann. Math. 1933. Vol. 2 (34), no. 3. P. 480–508. doi: 10.2307/1968173 .
2. **Hilbert D.A.** Grundlagen der Geometrie. Leipzig: Teubner, 1899. 92 p.
3. **Gooderl K.R., Warfield R.B.** An introduction to noncommutative Noetherian rings. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. 370 p. doi: 10.1017/CBO9780511841699 .
4. **McConnell J.C., Robson J.C.** Noncommutative Noetherian rings. 2000. 636 p. (Graduate Studes in Math.; vol. 30). doi:10.1090/gsm/030 .
5. **Dale L.** Monic and monic free ideals in polynomial semiring // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 56. P. 45–50. doi: 10.1090/S0002-9939-1976-0404354-8 .
6. **Dale L.** The k-closure of monic and monic free ideals in a polynomial semiring // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 64, no. 2. P. 219–226. doi: 10.2307/2041431 .
7. **Бабенко М.В.** Пирсовские слои полуколец с некоторыми условиями конечности // Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 3 (40). С. 4–20. doi: 10.34130/1992-2752_2021_3_4 .
8. **Вечтомов Е.М., Чермных В.В.** Основные направления развития теории полуколец // Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 4 (41). С. 4-40. doi: 10.34130/1992-2752_2021_4_4 .
9. **Бабенко М.В., Чермных В.В.** О полукольце косых многочленов над полукольцом Безу // Мат. заметки. 2022. Т. 111, №3. с. 323–338. doi: 10.4213/mzm13148 .
10. **Туганбаев А.А.** Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009. 472 с.
11. **Golan J.S.** Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. doi:10.1007/978-94-015-9333-5 .
12. **Allen P. J., Dale L.** Ideal theory in the semiring Z^+ // Publ. Math. Debrecen. 1975. Vol. 22, no. 3–4. P. 219–224.
13. **Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н., Чермных В.В.** Элементы теории полуколец. Киров: Радуга-ПРЕСС, 2012. 228 с.

Поступила 20.03.2022
После доработки 30.03.2022
Принята к публикации 4.04.2022

Бабенко Марина Владимировна
старший преподаватель
каф. прикладной математики и информатики
Вятский государственный университет
г. Киров
e-mail: usr11391@vyatsu.ru

Чермных Василий Владимирович
д-р. физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина
г. Сыктывкар
e-mail: vv146@mail.ru

REFERENCES

1. Ore O. Theory of non-commutative polynomials. *Ann. of Math.*, 1933, vol. 2 (34), no 3, pp. 480–508. doi: 10.2307/1968173 .
2. Hilbert D.A. *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig: Teubner, 1899, 92 p.
3. Gooderl K.R., Warfield R.B. *An introduction to noncommutative Noetherian rings.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004, 370 p. doi: 10.1017/CBO9780511841699 .
4. McConnell J.C., Robson J.C. *Noncommutative Noetherian rings.* Graduate studies in mathematics, vol. 30. 2000, 636 p. doi: 10.1090/gsm/030 .
5. Dale L. Monic and monic free ideals in polynomial semiring. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 56, pp. 45–50. doi: 10.1090/S0002-9939-1976-0404354-8 .
6. Dale L. The k-closure of monic and monic free ideals in a polynomial semiring. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977, vol. 64, no 2. pp. 219–226. doi: 10.2307/2041431 .
7. Babenko M.V. Pierce stalks of semirings with some finiteness conditions. *Bulletin of Syktyvkar University, Ser.* 1 : *Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, no. 3 (40), pp. 4–20 (in Russian). doi: 10.34130/1992-2752_2021_3_4 .
8. Vechtomov E.M., Chermnykh V.V. Main directions of the development of the semiring theory. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, no. 4(41), pp. 4–40 (in Russian). doi: 10.34130/1992-2752_2021_4_4 .
9. Babenko M.V., Chermnykh V.V. On the semiring of skew polynomials over a Bezout semiring. *Math. Notes*, 2022, vol. 111, no. 3, pp. 331–342. doi: 10.4213/mzm13148 .
10. Tuganbaev A.A. *Teoriya kolets. Arifmeticheskie kol'tsa i moduli.* [Ring theory. Arithmetical rings and modules.] Moscow: MCNMO Publ., 2009. ISBN: 978-5-94057-555-9 .
11. Golan J.S. *Semirings and their applications.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. doi: 10.1007/978-94-015-9333-5 .
12. Allen P.J., Dale L. Ideal theory in the semiring Z^+. *Publ. Math. Debrecen.*, 1975, vol. 22, no. 3-4, pp. 219–224.
13. Vechtomov E.M., Lubyagina E.N., Chermnykh V.V. *Elementy teorii polukolets* [Elements of semirings theory]. Kirov: Raduga-PRESS, 2012, 228 p. ISBN: 978-5-906013-49-1.

Received March 20, 2022
Revised March 30, 2022
Accepted April 4, 2022

Marina Vladimirovna Babenko, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University, Kirov, 610000, Russia, usr11391@vyatsu.ru .

Vasiliy Vladimirovich Chermnykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, 167001 Russia, vv146@mail.ru .

Cite this article as: M. V. Babenko, V. V. Chermnykh. Hilbert's basis theorem for a semiring of skew polynomials. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 56–65.