ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 517.928.2

ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Д. А. Турсунов, Г. А. Омаралиева

Исследована задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром при производной и особой начальной точкой. Найдено достаточное условие, при выполнении которого появляется промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенной задаче, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Модифицированным методом пограничных функций построено полное асимптотическое разложение решения в виде асимптотического ряда в смысле Эрдейи. Полученное разложение обосновано, т. е. получена оценка для остаточного члена.

Ключевые слова: пограничный слой, промежуточный пограничный слой, задача Коши, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, модифицированный метод пограничных функций, асимптотическое решение.

D. A. Tursunov, G. A. Omaralieva. An intermediate boundary layer in singularly perturbed first-order equations.

The Cauchy problem for a first-order ordinary differential equation with a small parameter at the derivative and a singular initial point is studied. A sufficient condition is found under which an intermediate boundary layer appears in a singularly perturbed problem described by first-order ordinary differential equations. A complete asymptotic expansion of the solution in the form of an asymptotic series in the sense of Erdélyi is constructed using a modified method of boundary functions. The obtained decomposition is justified; i.e. an estimate for the remainder term is obtained.

Keywords: boundary layer, intermediate boundary layer, Cauchy problem, singularly perturbed problem, bisingular problem, modified boundary function method, asymptotic solution.

MSC: 34E20, 34E10

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-193-200

Введение

Дифференциальные уравнения с малым (или большим) параметром появляются там, где имеются неравномерные переходы от одних физических характеристик к другим. При исследовании подобных задач возникают различные новые явления, поэтому методы их асимптотического интегрирования разрабатываются отдельно для различных классов задач [1–4]. В связи с этим актуальность результатов исследований по данному направлению не вызывает сомнений. Как нам известно, задачи с двойной сингулярностью, т. е. бисингулярно возмущенные задачи, по сравнению с сингулярно возмущенными задачами, мало изучены. Как отмечено в [4, гл. II, § 1; 5, гл. 7, § 28], в бисингулярных задачах одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая — с негладкостью членов асимптотики. Мы исследуем бисингулярные задачи, в которых появляются еще дополнительные особенности, например, промежуточные или дополнительные (пограничный или внутренний) слои.

Новизна данной работы заключается в том, что для конкретной бисингулярной задачи получено достаточное условие существования промежуточного пограничного слоя. Оригинальный подход, суть которого в том, что вместо универсального метода согласования асимптотических разложений, разработанного и успешно применяемого в научной школе А. М. Ильина, используется метод вспомогательной функции, позволяет получить равномерное асимптотическое разложение для рассматриваемого класса задач с помощью более простой процедуры. Кроме этого, в рассматриваемой задаче присутствуют два малых соподчиненных параметра, и авторы исследуют вопрос, при каких соотношениях этих параметров возникают дополнительные асимптотические слои.

1. Постановка задачи

Для простоты рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\varepsilon^n y_\varepsilon'(x) + (xq(x) + \varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in (0, T], \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon << 1$, $n > m$, n, $m \in \mathbb{N}$, a — const, f, q, $p \in C^\infty[0, T]$, $q_0 = q(0) > 0$, $p_0 = p(0) > 0$, $q(x) > 0$, $p(x) > 0$: $x \in [0, T]$, $f(0) \neq 0$, а $y_\varepsilon(x)$ — искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Решение начальной задачи существует, единственно и представимо в виде

$$y_\varepsilon(x) = y^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x (sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds} + \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x}(sq(s) + \varepsilon^m p(s))ds \int\limits_0^x f(\xi) e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi}(sq(s) + \varepsilon^m p(s))ds d\xi.$$

Требуется определить, при каких значениях параметров n и m появляется промежуточный пограничный слой, и в этом случае построить равномерное асимптотическое приближение решения начальной задачи (1), (2) на отрезке $[0, T]$, когда малый параметр стремится к нулю.

Для решения поставленной задачи сначала приведем достаточное условие существование промежуточного пограничного слоя, далее построим асимптотическое решение начальной задачи (1), (2).

2. Особенности начальной задачи

Первая сингулярность — присутствие малого параметра перед производной искомой функции, т. е. перед $y_\varepsilon'(x)$. Если в уравнении (1) формально считать, что $\varepsilon = 0$, то мы получим конечное уравнение

$$xq(x)y_0(x) = f(x), \quad x \in (0, T];$$

нетрудно заметить, что $y_0(x)$ в общем случае не удовлетворяет начальному условию (2).

Вторая сингулярность — функция $y_0(x) = x^{-1}q(x)f(x)$; при $x \to 0+$ имеет особую точку — полюс первого порядка.

Третья особенность — появление промежуточного пограничного слоя при $n > 2m$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если $n = km$, $2 < k \in \mathbb{N}$ (или $n > 2m$), то в начальной задаче* (1), (2) *существует промежуточный* (*дополнительный*) *пограничный слой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что в пограничном слое имеется два характерных предела кроме внешнего, которые будут включать в себя два внутренних разложения.

Построим внешнее решение начальной задачи (1), (2), которое будем искать в виде

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x), \tag{3}$$

где $u_j(x)$ — пока не известные функции.

Формально подставляя ряд (3) в уравнение (1), имеем

$$\varepsilon^n \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j'(x) + (xq(x) + \varepsilon^m p(x)) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x) = f(x), \quad x \in (0, T];$$

последнее равенство можно записать в виде

$$u_{j-n}'(x) + xq(x)u_j(x) + p(x)u_{j-m}(x) = f(x), \quad x \in (0, T], \quad j = 0, 1, \ldots, \quad u_s(x) \equiv 0, \quad s < 0.$$

Отсюда находим

$$u_j(x) = \frac{f(x) - p(x)u_{j-m}(x) - u_{j-n}'(x)}{xq(x)},$$

в частности, при $j = 0:\ u_0(x) = \dfrac{f(x)}{xq(x)}$.

По условию теоремы $n = km,\ \ 2 < k \in \mathbb{N}$, поэтому

$$u_m(x) = -\frac{p(x)u_0(x)}{xq(x)}, \quad u_{2m}(x) = -\frac{p(x)u_m(x)}{xq(x)},$$

а при $j = n:\ u_n(x) = -\dfrac{p(x)u_{n-m}(x) + u_0'(x)}{xq(x)}$ или $u_{jm}(x) = -\dfrac{p(x)u_{m(j-1)}(x) + u_0'(x)}{xq(x)}$.

Из этих выражений следует, что

$$u_k(x) = \frac{1}{x}\Big(\frac{\varepsilon^m}{x}\Big)^k \tilde{u}_k(x), \quad k \in N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \tilde{u}_k \in C^\infty[0, 1].$$

Это означает, что члены ряда (3) обладают свойством “нарастающей особенности” [4, гл. II, § 1], которое присуще бисингулярным задачам [4–7],

$$u_\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{xq(x)} + \frac{1}{x}\frac{\varepsilon^m}{x}\tilde{u}_1(x) + \frac{1}{x}\Big(\frac{\varepsilon^m}{x}\Big)^2 \tilde{u}_2(x) + \ldots + \frac{1}{x}\Big(\frac{\varepsilon^m}{x}\Big)^j \tilde{u}_j(x) + \ldots, \tag{4}$$

где $\tilde{u}_j \in C^\infty[0, T],\ j \in \mathbb{N}$.

Подробно исследуем окрестность начальной точки $x = 0$, для этого в уравнении (1) сделаем преобразование $x = \varepsilon^\alpha t,\ \alpha > 0$:

$$\varepsilon^{n-\alpha}\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon^\alpha t q(\varepsilon^\alpha t) y_\varepsilon(t) + \varepsilon^m p(\varepsilon^\alpha t) y_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t).$$

Уравнивая порядки поведения слагаемых по малому параметру двух любых слагаемых, имеем три возможных случая:

1) $n - \alpha = \alpha$ (первый и второй);
2) $n - \alpha = m$ (первый и третий);
3) $\alpha = m$ (второй и третий).

В первом случае $\alpha = n/2$:

$$\varepsilon^{n/2}\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon^{n/2} t q(\varepsilon^{n/2} t) y_\varepsilon(t) + \varepsilon^m p(\varepsilon^{n/2} t) y_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^{n/2} t).$$

Пусть $y_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-m}\psi_\varepsilon(t)$, тогда имеем

$$\varepsilon^{n/2-m}\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon^{n/2-m} t q(\varepsilon^{n/2} t)\psi_\varepsilon(t) + p(\varepsilon^{n/2} t)\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^{n/2} t).$$

По условию $n/2 > m$, поэтому при $\varepsilon \to 0$ главная часть последнего равенства есть

$$p(0)\psi_0(t) = f(0) \Rightarrow \psi_0(t) = \frac{f(0)}{p(0)}.$$

Поэтому данный случай обсуждать не будем.

Во втором случае $\alpha = n - m,\ y_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-m}\psi_\varepsilon(t)$

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon^{n-2m} t q(\varepsilon^{n-m}t)\psi_\varepsilon(t) + p(\varepsilon^{n-m}t)\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^{n-m}t).$$

При $\varepsilon \to 0$ главная часть последнего равенства — дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\psi_0(t)}{dt} + p(0)\psi_0(t) = f(0).$$

Этот случай будем рассматривать.

И в последнем случае $\alpha = m,\ y_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-m}\psi_\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon^{n-2m}\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + tq(\varepsilon^{n-m}t)\psi_\varepsilon(t) + p(\varepsilon^{n-m}t)\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^m t).$$

При $\varepsilon \to 0$

$$tq(0)\psi_0(t) + p(0)\psi_0(t) = f(0) \Rightarrow \psi_0(t) = \frac{f(0)}{tq(0) + p(0)}.$$

Данный случай тоже будем рассматривать.

В результате в пограничном слое мы получили два характерных предела, т. е. второй и третий случаи. Нетрудно заметить, что если $n = 2m$, то все эти три случая будут одинаковыми.

Так как $m < n-m$, то второй случай будет описывать левый пограничный слой, а третий — промежуточный пограничный слой между левым погранслоем и внешним решением.

Из вида ряда (4) можно понять, какой должна быть внутренняя переменная в соседнем (пересекающемся) пограничном слое, т. е. $x = \varepsilon^m t$.

Теорема доказана.

3. Формальное асимптотическое приближение (ФАП)

ФАП решения задачи (1), (2) при $n = km,\ 2 < k \in \mathbb{N}$, будем искать в виде суммы трех неизвестных функций

$$y_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x) + w_\varepsilon(t) + \pi_\varepsilon(\tau), \tag{5}$$

где $v_\varepsilon(x)$ — внешнее решение без сингулярностей; $w_\varepsilon(t)$ — промежуточное погранслойное решение, "исчезающее" вне пограничного слоя степенным характером; $\pi_\varepsilon(\tau)$ — левое погранслойное решение, "исчезающее" вне пограничного слоя экспоненциальным характером и устраняющее невязку в начальной точке; $x = t\varepsilon^m,\ x = \tau\varepsilon^{n-m}$.

Уравнение (1) запишем в виде (см. [6; 7])

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x) + (xq(x) + \varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x) = f(x) - h_\varepsilon + h_\varepsilon, \quad x \in (0, T], \tag{6}$$

где h_ε — пока не известная функция, зависящая от малого параметра.

Подставляя (5) в равенство (6) и в начальное условие (2), получим задачи

$$\varepsilon^n v'_\varepsilon(x) + (xq(x) + \varepsilon^m p(x))v_\varepsilon(x) = f(x) - h_\varepsilon, \quad x \in (0, T]; \tag{7}$$

$$\varepsilon^{n-m} w'_\varepsilon(t) + (t\varepsilon^m q(t\varepsilon^m) + \varepsilon^m p(t\varepsilon^m))w_\varepsilon(t) = h_\varepsilon, \quad t \in (0, \varepsilon^{-m}T]; \tag{8}$$

$$\varepsilon^m \pi'_\varepsilon(\tau) + (\tau\varepsilon^{m(k-1)} q(\tau\varepsilon^{m(k-1)}) + \varepsilon^m p(\tau\varepsilon^{m(k-1)}))\pi_\varepsilon(\tau) = 0, \quad \tau \in (0, \varepsilon^{-m(k-1)}T], \tag{9}$$

$$\pi_\varepsilon(0) = y^0 - v_\varepsilon(0) - w_\varepsilon(0). \tag{10}$$

Решение *задачи* (7). Пусть $v_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{mj} v_j(x)$ и $h_\varepsilon = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{mj} h_j,\ h_j$ — const. Тогда равенство (7) можно записать в виде

$$v'_{j-k}(x) + xq(x)v_j(x) + p(x)v_{j-1}(x) = f(x) - h_j, \quad x \in (0, T], \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{11}$$

где $v_s(x) \equiv 0,\ s < 0$.

Равенство (11) запишем так:

$$v_j(x) = \frac{f(x) - p(x)v_{j-1}(x) - v'_{j-k}(x) - h_j}{xq(x)}, \quad 2 < k \in \mathbb{N}.$$

В частности, $v_0(x) = \dfrac{f(x) - h_0}{xq(x)},\ v_1(x) = -\dfrac{p(x)v_0(x) + h_1}{xq(x)},\ v_2(x) = -\dfrac{p(x)v_1(x) + h_2}{xq(x)}$.

Пусть

$$h_0 = f(0), \quad h_1 = -p(0)v_0(0), \quad h_j = -(p(0)v_{j-1}(0) + v'_{j-k}(0)),$$

тогда имеем $v_j \in C^\infty[0, T],\ j = 0, 1, \ldots$.

Перейдем теперь *к задаче* (8). Решение задачи будем искать в виде $w_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-m} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j(t)$. Подставим это выражение в (8):

$$\varepsilon^{(k-2)m} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w'_j(t) + (tq(t\varepsilon^m) + p(t\varepsilon^m)) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{jm} h_j, \quad t \in (0, \varepsilon^{-m}T];$$

приравнивая коэффициенты малого параметра с одинаковыми степенями, получим

$$w_0(t) = \frac{h_0}{tq(t\varepsilon^m) + p(t\varepsilon^m)}, \quad w_{jm}(t) = \frac{h_j - w'_{(j-k+2)m}(t)}{tq(t\varepsilon^m) + p(t\varepsilon^m)}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

$$w_i(t) = -\frac{w'_{i-(k-2)m}(t)}{tq(t\varepsilon^m) + p(t\varepsilon^m)}, \quad i \neq mj, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Еще раз отметим, что функции $w_k(t)$ являются промежуточными пограничными функциями в окрестности $x = 0$, и эти функции убывают степенным характером при $t \to \infty$.

Решение *начальной задачи* (9), (10) будем искать в виде $\pi_\varepsilon(\tau) = \varepsilon^{-m} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \pi_j(\tau)$. Подставляя его в (9) и (10), получим следующие задачи:

$$\pi'_j(\tau) + p(\tau\varepsilon^{m(k-1)})\pi_j(\tau) + \tau q(\tau\varepsilon^{m(k-1)})\pi_{j-m(k-2)}(\tau) = 0,$$
$$\tau \in (0, \varepsilon^{-m(k-1)}T], \quad j = 0, 1, \ldots, \quad 2 < k \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

$$\pi_j(0) = -w_j(0), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1; \quad \pi_m(0) = y^0 - v_0(0) - w_m(0); \quad \pi_j(0) = -(v_{j-m} + w_j(0)),$$
$$j = m+1,\, m+2, \ldots . \quad (13)$$

По условию задачи (1), (2) функции $q,\, p \in C^\infty[0, T]$, $q(x) > 0$, $p(x)\colon x \in [0, T]$. Поэтому справедливы разложения

$$p(\tau\varepsilon^{m(k-1)}) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j \varepsilon^{m(k-1)j} p_j,\ p_j = \frac{1}{j!} p^{(j)}(0), \quad q(\tau\varepsilon^{m(k-1)}) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j \varepsilon^{m(k-1)j} q_j,\ q_j = \frac{1}{j!} q^{(j)}(0).$$

Лемма 1. *Решение начальной задачи*

$$z'(\tau) + p_0 z(\tau) = e^{-p_0\tau}\left(c_0 + c_1\tau + \ldots + c_j\tau^j\right), \quad \tau \in (0, \infty), \quad z(0) = z^0,$$

существует, единственно и представимо в виде

$$z(\tau) = e^{-p_0\tau} z^0 + e^{-p_0\tau}\left(c_0\tau + c_1\frac{\tau^2}{2} + \ldots + c_j\frac{\tau^{j+1}}{j+1}\right), \text{ где } p_0 > 0 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение $z'(\tau)+p_0 z(\tau)=e^{-p_0\tau}\left(c_0+c_1\tau+\ldots+c_j\tau^j\right)$ запишем в виде $\left(z(\tau)e^{p_0\tau}\right)'=\left(c_0+c_1\tau+\ldots+c_j\tau^j\right)$; полученное выражение интегрируем по τ, учитывая начальное условие $z(\tau)=e^{-p_0\tau}z^0+e^{-p_0\tau}\Big(c_0\tau+c_1\dfrac{\tau^2}{2}+\ldots+c_j\dfrac{\tau^{j+1}}{j+1}\Big)$.

Лемма доказана.

На основании доказанной леммы 1 решения задач (12), (13) существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\tau\to\infty$.

Таким образом, нами определены все слагаемые (5). Перейдем к оценке остаточного члена разложения

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{mj}v_j(x)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w_j(t)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\pi_j(\tau).$$

4. Оценка остаточного члена

Пусть

$$y_{s,\varepsilon}(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^{mj}v_j(x)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{sm+m}\varepsilon^j(w_j(t)+\pi_j(\tau))$$

и

$$y_\varepsilon(x)=y_{s,\varepsilon}(x)+R_{s,\varepsilon}(x),$$

где $R_{s,\varepsilon}(x)$ — остаточный член разложения.

Тогда для остаточного члена получим следующую начальную задачу:

$$\varepsilon^n R'_{s,\varepsilon}(x)+(xq(x)+\varepsilon^m p(x))R_{s,\varepsilon}(x)=M\varepsilon^{ms+1},\quad x\in(0,T],\quad R_{s,\varepsilon}(0)=0, \tag{14}$$

где $M>0$ — const.

Явное решение задачи (14) имеет вид

$$R_{s,\varepsilon}(x)=M\varepsilon^{ms+1-n}e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}\int_0^x e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}d\xi$$

$$=M\varepsilon^{ms+1-n}e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}\int_0^x\frac{\varepsilon^n}{\xi q(\xi)+\varepsilon^m p(\xi)}\,de^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}$$

$$=M\varepsilon^{ms+1-n}e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}\Big(\frac{\varepsilon^n}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}-\frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^m p(0)}\Big)$$

$$+M\varepsilon^{ms+1}e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}\int_0^x\frac{q(\xi)+\xi q'(\xi)+\varepsilon^m p'(\xi)}{(\xi q(\xi)+\varepsilon^m p(\xi))^2}\,e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}d\xi,\quad \varepsilon\to 0.$$

Отсюда получим $R_{s,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^{ms+1-m}),\ \varepsilon\to 0.$

Нами доказана

Теорема 2. *Равномерное асимптотическое решение задачи* (1), (2) *при* $n>2m$, $\varepsilon\to 0$ *на отрезке* $x\in[0,T]$ *представимо в виде*

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^{mj}v_j(x)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{sm+m}\varepsilon^j(w_j(t)+\pi_j(\tau))+O(\varepsilon^{ms+1}).$$

П р и м е р. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x) + (x+\varepsilon) y_\varepsilon(x) = 1 + 2x + 3x^2, \quad x \in (0, T], \quad y_\varepsilon(0) = 4.$$

В нашем случае $n = 3$, $m = 1, q(x) = 1$, $p(x) = 1$, $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$.

Внешнее решение имеет вид

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(x),$$

где

$$y_0(x) = \frac{1}{x} + 2 + 3x; \quad y_1(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 3, \quad y_2(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x};$$

$$y_j(x) = -\frac{y_{j-1}(x) + y'_{j-3}(x)}{x}, \quad 2 < j \in \mathbb{N}.$$

Асимптотическое решение:

$$y_\varepsilon(x) = \frac{w_{-1}(t) + \pi_{-1}(\tau)}{\varepsilon} + v_0(x) + w_0(t) + \pi_0(\tau) + \varepsilon(v_1(x) + w_1(t) + \pi_1(\tau)) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

где

$$x = \varepsilon t, \quad x = \varepsilon^2 \tau, \quad v_0(x) = 2 + 3x, \quad h_0 = 1; \quad v_1(x) = -3, \quad h_1 = -2; \quad v_2(x) = 0, \quad h_2 = 3;$$

$$w_{-1}(t) = \frac{1}{t+1}, \quad w_0(t) = \frac{1 - 2(t+1)^2}{(t+1)^3}, \quad w_1(t) = \frac{3 - 2(t+1)^2 + 3(t+1)^4}{(t+1)^5},$$

$$\pi_{-1}(\tau) = -e^{-\tau}, \quad \pi_0(\tau) = 3e^{-\tau} + \frac{1}{2}\tau^2 e^{-\tau}, \quad \pi_1(\tau) = -e^{-\tau} + \frac{3}{2}\tau^2 e^{-\tau} - \frac{1}{8}\tau^4 e^{-\tau}.$$

Исследована задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром при производной и особой начальной точкой. Новизна работы состоит в том, что найдено достаточное условие, при выполнении которого появляется промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенной задаче, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Модифицированным методом пограничных функций построено решение в виде асимптотического ряда в смысле Эрдейи и получена оценка для остаточного члена.

Для простоты мы привели результаты исследования для уравнения первого порядка, аналогичное явление возможно в бисингулярно возмущенной задаче, описываемой уравнениями высшего порядка и не только в обыкновенных, но и в частных производных. Сингулярно возмущенная задача с промежуточным пограничным слоем в монографии [8, гл. 12, разд. 12.7] названа многозонной задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. 456 с.
2. **Бутузов В.Ф.** Асимптотика контрастной структуры типа ступеньки в стационарной частично диссипативной системе уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2021. Vol. 61, no. 1. С. 57–84.
3. **Калякин Л.А.** Асимптотика решения системы уравнений Ландау — Лифшица при динамической бифуркации седло-узел // Алгебра и анализ. 2021. Vol. 33, no. 2. С. 56–81.
4. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 336 с.
5. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
6. **Tursunov D.A.** Asymptotic solution of linear bisingular problems with additional boundary layer // Russian Math. 2018. Vol. 62, no. 3. P. 60–67. doi: 10.3103/S1066369X18030088 .

7. **Tursunov D.A.** The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38, no. 3. P. 542–546. doi: 10.1134/S1995080217030258 .
8. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Поступила 10.03.2022
После доработки 28.03.2022
Принята к публикации 4.04.2022

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор ВШМОП
Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская республика
e-mail: dtursunov@oshsu.kg

Омаралиева Гулбайра Абдималиковна
преподаватель
Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская республика
e-mail:guli.suiun@mail.ru

REFERENCES

1. Lomov S.A., Lomov I.S. *Osnovy matematicheskoi teorii pogranichnogo sloya* [Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer]. Moscow: Mosk. Gos. Univ. Publ., 2011, 456 p. ISBN: 978-5-211-05843-9 .
2. Butuzov V.F. Asymptotics of a steplike contrast structure in a partially dissipative stationary system of equations. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 1. doi: 10.1134/S0965542520120027 .
3. Kalyakin L.A. Asymptotics of the solution for the system of Landau–Lifsitz equations under saddle-node dynamical bifurcation, *Algebra i Analiz*, 2021, vol. 33, no. 2, pp. 56–81 (in Russian).
4. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence: AMS, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5 . Original Russian text published in *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach*, Moscow: Nauka Publ., 1989, 336 p.
5. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3 .
6. Tursunov D.A. Asymptotic solution of linear bisingular problems with additional boundary layer. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2018, vol. 62, no. 3, pp. 60–67. doi: 10.3103/S1066369X18030088 .
7. Tursunov D.A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 3, pp. 542–546. doi: 10.1134/S1995080217030258 .
8. Nayfeh A.H. *Introduction to perturbation techniques.* NY; Toronto: Wiley, 1981, 519 p. ISBN: 0-471-08033-0 .

Received March 10, 2022
Revised March 28, 2022
Accepted April 4, 2022

D. A. Tursunov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, e-mail: dtursunov@oshsu.kg .

G. A. Omaralieva, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, e-mail: guli.suiun@mail.ru .

Cite this article as: D. A. Tursunov, G. A. Omaralieva. An intermediate boundary layer in singularly perturbed first-order equations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 193–200.