ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 512.54

О СМЕШАННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ Lim(ℕ)[1]

А. И. Созутов, Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Подстановка g множества $\mathbb{N}$ называется ограниченной, если существует такое натуральное α, что $|\beta-\beta^g| \leqslant |\alpha-\alpha^g|$ для всех $\beta\in\mathbb{N}$. Обозначим через $G=\mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ группу всех ограниченных подстановок множества $\mathbb{N}$. В 2010 г. Н. М. Сучков и Н. Г. Сучкова доказали, что смешанная группа $G=AB$, где A,B — локально конечные подгруппы группы G. В 2016 г. они описали локально конечный радикал R группы G. В частности, доказан следующий результат. Если H — нормальная подгруппа группы G, то либо $H\leqslant R$, либо H — смешанная подгруппа группы G. В данной статье мы изучаем смешанные нормальные подгруппы группы G. Показано, что существует континуальное множество таких подгрупп. Приводятся примеры бесконечно убывающих и бесконечно возрастающих цепочек смешанных нормальных подгрупп группы G. В 2020 г. авторы доказали аналогичные результаты для локально конечных нормальных подгрупп группы G.

Ключевые слова: группа, ограниченная подстановка, смешанная группа, нормальная подгруппа, ряды подгрупп.

A. I. Sozutov, N. M. Suchkov, N. G. Suchkova. On mixed normal subgroups of the group Lim(ℕ).

Let $\mathbb{N}$ be the set of natural numbers. A permutation g of the set $\mathbb{N}$ is called limited if there exists $\alpha\in\mathbb{N}$ such that $|\beta-\beta^g| \leqslant |\alpha-\alpha^g|$ for every $\beta\in\mathbb{N}$. Denote by $G=\mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ the group of all limited permutations of the set $\mathbb{N}$. In 2010 N. M. Suchkov and N. G. Suchkova proved that $G=AB$, where A and B are locally finite subgroups of G. In 2016 the same authors described the locally finite radical R of the group G. In particular, the following result was proved: if H is a normal subgroup of G, then either $H\leqslant R$ or H is a mixed subgroup of G. In this paper we study mixed normal subgroups of the group G. It is proved that there exists a continuum set of such subgroups. We give examples of infinitely decreasing and infinitely increasing chains of mixed normal subgroups of G. In 2020 the authors proved similar results for locally finite normal subgroups of G.

Keywords: group, limited permutation, mixed group, normal subgroup, chains of subgroups.

MSC: 20B07, 20B30, 20B35

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-187-192

Введение

Пусть $S(\mathbb{N})$ — группа всех подстановок множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Напомним, что носителем подстановки $g\in S(\mathbb{N})$ называется множество

$$\mathrm{supp}(g)=\{\alpha \mid \alpha\in\mathbb{N},\ \alpha^g\neq\alpha\}.$$

Подстановки с конечными носителями называются финитарными и образуют локально конечную счетную группу $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$.

Подстановка множества $\mathbb{N}$ называется *ограниченной*, если

$$\omega(g)=\max_{\alpha\in\mathbb{N}}|\alpha-\alpha^g|<\infty.$$

Все такие подстановки образуют смешанную группу $G=\mathrm{Lim}(\mathbb{N})$, представимую в виде произведения двух локально конечных подгрупп [1]. При этом в группу G изоморфно вложимы

[1]Исследования А. И. Созутова по построению бесконечно убывающих и бесконечно возрастающих цепочек смешанных нормальных подгрупп группы $\mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ (теорема 1) выполнены при поддержке РНФ (проект № 19-71-10017). Исследования Н. М. Сучкова и Н. Г. Сучковой поддержаны Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

любая счетная свободная группа и 2-группа Алёшина [2]. В [1] также установлено, что группа G порождается подстановками x с параметром ограниченности $\omega(x) = 1$. Такие подстановки являются инволюциями, в разложении которых на независимые циклы участвуют только транспозиции вида $(\alpha\ \ \alpha+1)$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

По сравнению с группами $S(\mathbb{N})$ и $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ нормальное строение группы $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ оказалось весьма сложным. Изучение этого строения началось в работах авторов в 2015–2020 гг. В частности, в терминах свойств носителя $\mathrm{supp}(g)$ подстановки $g \in G$ получены критерии принадлежности g локально конечному радикалу группы G и ее собственной нормальной подгруппе.

В данной статье доказаны следующие основные результаты.

Теорема 1. *Группа G не удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для смешанных нормальных подгрупп.*

Теорема 2. *Группа G содержит континуальное множество смешанных нормальных подгрупп.*

Аналогичные теоремы для локально конечных нормальных подгрупп группы G установлены в [2]. Все обозначения, используемые в данной статье, либо оговариваются, либо стандартны [3].

1. Предварительные построения

Если γ, ε — целые числа и $\gamma \leqslant \varepsilon$, то множество

$$U(\gamma,\varepsilon) = \{\beta \mid \beta \in Z,\ \gamma \leqslant \beta \leqslant \varepsilon\}$$

будем называть отрезком целых чисел; γ — левый конец отрезка, ε — правый. В частности, $U(\gamma,\gamma) = \{\gamma\}$. Для $\varepsilon > 0$ обозначим

$$V(\gamma,\varepsilon) = U(\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon).$$

Лемма 1. *Для любого отрезка $U(\gamma,\varepsilon)$ целых чисел найдется такой цикл $c = c(\gamma,\varepsilon)$, состоящий из элементов этого отрезка, что $\omega(c) \leqslant 2$.*

Доказательство. Если $\varepsilon = \gamma$, то $c = (\gamma)$ и $\omega(c) = 0$. При $\varepsilon = \gamma + 1$ достаточно взять $c = (\gamma\ \ \varepsilon)$. Тогда $\omega(c) = 1$. Пусть $\varepsilon = \gamma + 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$c = (\gamma\ \ \gamma+2\ \ \ldots\ \ \gamma+2(k-1)\ \ \varepsilon\ \ \varepsilon-1\ \ \varepsilon-3\ \ \ldots\ \ \gamma+1).$$

Очевидно, $\omega(c) = 2$. Наконец, если $\varepsilon = \gamma + 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, то $\omega(c) = 2$ для

$$c = (\gamma\ \ \gamma+2\ \ \ldots\ \ \gamma+2k\ \ \varepsilon\ \ \varepsilon-2\ \ \varepsilon-4\ \ \ldots\ \ \gamma+1).$$

Лемма доказана.

Фиксируем целое нечетное число $q > 3$, и пусть

$$L_q = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\},$$

где $\alpha_1 = 2q,\ \alpha_2 = 2^2 q,\ \ldots,\ \alpha_n = 2^n q, \ldots$.

Для каждого натурального k определим отрезки натуральных чисел

$$T_k^{-1} = U(1, \alpha_k - 2k), \quad T_k^s = V(\alpha_{k+s}, 2k+s-1), \quad s = 0,1,2,\ldots . \tag{1}$$

Покажем, что правый конец отрезка T_k^s меньше левого конца отрезка T_k^{s+1} при любом $s = -1, 0, 1, 2, \ldots$. В самом деле, если $s = -1$, то $\alpha_k - 2k$ является правым концом отрезка T_k^{-1}, а левый конец отрезка T_k^0 равен $\alpha_k - (2k-1)$, т. е. на 1 больше. Пусть $s > -1$. Тогда $\alpha_{k+s} + 2k + s - 1 = a_k$ есть правый конец отрезка T_k^s, а $\alpha_{k+s+1} - (2k+s) = b_k$ — левый конец отрезка T_k^{s+1}. В силу неравенств $2^n > n$ $(n \in \mathbb{N})$, $q \geqslant 5$, $k \geqslant 1$, $s \geqslant 0$ имеем

$$b_k - a_k = 2^{k+s+1}q - 2^{k+s}q - 4k - 2s + 1 = 2^{k+s}q - (4k + 2s - 1) > (k+s)5 - (4k + 2s - 1) > 0.$$

Из последнего абзаца вытекает, что отрезки (1) попарно не пересекаются. Пусть T_k — объединение всех этих отрезков. Положим

$$P_k(q) = \{x \mid x \in G,\ (T_k^s)^x = T_k^s\ (s = -1, 0, 1, 2, \ldots), \quad \beta^x = \beta\ (\beta \in \mathbb{N} \setminus T_k)\}.$$

Очевидно, $P_k(q)$ — подгруппа группы G.

Заметим, что наибольший элемент объединения $T_k^{-1} \cup T_k^0$ есть правый конец отрезка T_k^0; он равен $d_k = \alpha_k + 2k - 1$. Так как $T_{k+1}^{-1} = U(1, e_k)$, где $e_k = \alpha_{k+1} - 2(k+1)$, то e_k — наибольший элемент отрезка T_{k+1}^{-1}. Получаем

$$e_k - d_k = 2^k q - 4k - 1 > 5k - (4k+1) \geqslant 0.$$

Таким образом, выполняется включение

$$T_{k+1}^{-1} \supset (T_k^{-1} \cup T_k^0). \tag{2}$$

Кроме того, очевидно, что

$$V(\alpha_{k+s+1}, 2k + s + 1) = T_{k+1}^s \supset T_k^{s+1} = V(\alpha_{k+s+1}, 2k + s) \tag{3}$$

при $s \geqslant 0$ и любом натуральном k.

Из определения группы $P_k(q)$ и включений (2), (3) следует, что $P_k(q) < P_{k+1}(q)$, $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$P(q) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k(q). \tag{4}$$

Лемма 2. *$P(q)$ — смешанная локально финитно аппроксимируемая нормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Фиксируем натуральное k. В силу леммы 1 для каждого отрезка T_k^s $(s = -1, 0, 1, 2, \ldots)$ найдется такой цикл $t(k, s)$, состоящий из элементов этого отрезка, что $\omega(t(k,s)) \leqslant 2$. Если

$$g_k = t(k, -1)\, t(k, 0)\, t(k, 1)\, t(k, 2)\ \ldots$$

— разложение подстановки $g_k \in S(\mathbb{N})$ на независимые циклы, то $\omega(g_k) \leqslant 2$, а значит, $g_k \in P_k(q)$. Так как длины этих независимых циклов не ограничены, то g_k — элемент бесконечного порядка из $P_k(q) < P(q)$. Поскольку существование неединичных элементов конечных порядков в группе $P(q)$ очевидно, то эта группа смешанная.

Далее, если в определении группы $P_k(q)$ рассматривать не только подстановки из группы $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$, а любые другие подстановки группы $S(\mathbb{N})$, то мы получим группу $R_k(q)$, содержащую $P_k(q)$. Поскольку отрезки T_k^s $(s = -1, 0, 1, 2, \ldots)$ попарно не пересекаются, то $R_k(q)$ — декартово произведение симметрических групп $S_{n(s,k)}$, где $n(s,k) = |T_k^s|$, $s = -1, 0, 1, 2, \ldots$. Итак, $R_k(q)$ — финитно аппоксимируемая группа для любого $k \in \mathbb{N}$. Но тогда таковой является и ее подгруппа $P_k(q)$. В силу (4) $P(q)$ — объединение возрастающей цепочки подгрупп

$P_1(q) < P_2(q) < \ldots < P_n(q) < \ldots$. Отсюда немедленно вытекает, что группа $P(q)$ локально финитно аппроксимируема.

Пусть $1 \neq h \in P(q)$, $g \in G$ и $\omega(g) = 1$. Из определения группы $P(q)$ вытекает, что найдется такое натуральное k, что $h \in P_k(q)$. Рассмотрим произвольный цикл $x = (\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_r)$ из разложения подстановки h на независимые циклы. Согласно определению группы $P_k(q)$ элементы цикла x либо содержатся в объединении $T_k^{-1} \cup T_k^0$, либо на отрезке T_k^s для некоторого $s \in \mathbb{N}$. В силу включений (2), (3) и равенства $\omega(g) = 1$ отсюда получаем, что $x^g = (\alpha_1^g \ \ldots \ \alpha_r^g) \in P_{k+1}(q) < P(q)$. Таким образом, $h^g \in P(q)$. Во введении отмечалось, что G порождается подстановками с параметром ограниченности, равным 1. Поэтому $P(q) \lhd G$.

Лемма доказана.

2. Доказательство теорем 1, 2

Пусть q, r — различные натуральные нечетные числа, каждое из которых больше 3.

Лемма 3. *Если $x \in P(q)$, $y \in P(r)$, то пересечение*

$$W = \operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y)$$

конечно.

Доказательство. Предположим, что множество W бесконечно. Тогда в силу определений найдется такой номер k, что $x \in P_k(q)$, $y \in P_k(r)$, и для достаточно больших $\gamma \in W$ выполняются неравенства

$$|\gamma - q2^{k+s}| \leqslant 2k + s - 1, \quad |\gamma - r2^{k+t}| \leqslant 2k + t - 1,$$

где s, t — некоторые натуральные числа. Отсюда легко следует, что

$$|q2^{k+s} - r2^{k+t}| \leqslant 4k + s + t - 2. \tag{5}$$

Таким образом, из нашего предположения вытекает бесконечность множества

$$D = \{(s,t) \mid s, t \in \mathbb{N} \text{ и удовлетворяют (5)}\}.$$

Если D содержит пару (s, s), то

$$2^{k+s}|q - r| \leqslant 4k + 2s - 2.$$

Так как $|q - r| \geqslant 2$, то таких натуральных k и s не существует. Поэтому из элементов D можно выбрать последовательность

$$(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_m, t_m), \ldots, \tag{6}$$

где $s_1 < s_2 < \ldots < s_m < \ldots$ и либо $s_m > t_m$ $(m \in \mathbb{N})$, либо $s_m < t_m$ $(m \in \mathbb{N})$. В силу симметричного вхождения t и s в неравенство (5) достаточно рассмотреть только первый случай. При этом имеются две возможности.

1. Существует такое натуральное n_0, что $s_m - t_m < n_0$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Так как тогда

$$4k + s_m + t_m - 2 < 4k + 2t_m + n_0 < 4(k + t_m) + n_0,$$

то в силу (5) мы имеем

$$2^{k+t_m}|q2^{s_m - t_m} - r| < 4(k + t_m) + n_0.$$

Ясно, что это неравенство не выполняется при достаточно больших t_m.

2. Найдется такая строго возрастающая последовательность $i_1, \ldots, i_m, \ldots$ натуральных чисел, что $s_{i_m} - t_{i_m} > m$ $(m \in \mathbb{N})$. В этом случае

$$4k + s_{i_m} + t_{i_m} - 2 < 4k + 2s_{i_m} - m < 4(k + s_{i_m}),$$

а значит, в силу (5) получаем

$$2^{k+s_{i_m}}|q - r2^{t_{i_m} - s_{i_m}}| < 4(k + s_{i_m}). \tag{7}$$

Пусть $m > r$. Тогда $s_{i_m} - t_{i_m} > r$, $2^{t_{i_m} - s_{i_m}} < r^{-1}$. Отсюда и из (7) выводим неравенство

$$2^{k+s_{i_m}}(q-1) < 4(k + s_{i_m}).$$

Так как $q - 1 \geqslant 4$, то данное неравенство не выполняется при $m > r$. Получили противоречие.

Лемма доказана.

Пусть $E = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 3\}$, $\varnothing \neq A \subset E$. Обозначим

$$P(A) = \langle P(q) \mid q \in A \rangle.$$

В силу леммы 2 $P(A)$ — смешанная нормальная подгруппа группы G.

Лемма 4. *Пусть A, B — различные непустые подмножества множества E. Тогда $P(A) \neq P(B)$.*

Доказательство. Пусть, например, $q \in A$ и $q \notin B$. Предположим, что $P(q) \leqslant P(B)$, и пусть v — элемент бесконечного порядка группы $P(q)$. В частности, носитель $\mathrm{supp}(v)$ бесконечен. Мы имеем $v = h_1 \cdot \ldots \cdot h_s$, где $h_i \in P(r_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$; $r_1, \ldots, r_s$ — некоторые различные элементы множества B. Очевидно, что тогда

$$\mathrm{supp}(v) \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} \mathrm{supp}(h_k),$$

а потому

$$\mathrm{supp}(v) \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} (\mathrm{supp}(v) \cap \mathrm{supp}(h_k)).$$

Но в силу леммы 3 отсюда следует, что $\mathrm{supp}(v)$ — конечное множество. Получили противоречие. Итак, $P(q)$ содержится в $P(A)$ и не содержится в $P(B)$. В частности, $P(A) \neq P(B)$.

Лемма доказана.

Теперь мы легко завершим доказательства теорем 1, 2. Рассмотрим конечные множества

$$A_k = \{5, 7, \ldots, 2k - 1\}, \quad k = 3, 4, \ldots .$$

Очевидно, $A_3 \subset A_4 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$. Согласно лемме 4 мы имеем бесконечную строго возрастающую цепочку

$$P(A_3) < P(A_4) < \ldots < P(A_k) < \ldots$$

смешанных нормальных в группе G подгрупп.

Если $B_k = E \setminus A_k$, $k = 3, 4, \ldots$, то $B_3 \supset B_4 \supset \ldots \supset B_k \supset \ldots$ и по лемме 4

$$P(B_3) \supset P(B_4) \supset \ldots \supset P(B_k) \supset \ldots$$

— бесконечная строго убывающая цепочка смешанных нормальных в группе G подгрупп.

Теорема 1 доказана.

Поскольку множество всех подмножеств счетного множества E континуально, то снова по лемме 4 таковым является и множество

$$\{P(A) \mid \varnothing \neq A \subseteq E\},$$

состоящее из смешанных нормальных в группе G подгрупп.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** О группах ограниченных подстановок // Журн. Сиб. федерал. ун-та. 2010. Т. 3, № 2. С. 262–266.
2. **Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** О подгруппах группы Lim($\mathbb{N}$) // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 208–217.
3. **Каргаполов, М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. Москва: Наука, 1982. 288 с.

Поступила 23.02.2022
После доработки 30.03.2022
Принята к публикации 4.04.2022

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

Сучков Николай Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
e-mail: ns7654321@mail.ru

Сучкова Надежда Георгиевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
e-mail: ns7654321@mail.ru

REFERENCES

1. Suchkov N.M., Suchkova N.G. On groups of limited permutations. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 262–266 (in Russian).
2. Sozutov A.I., Suchkov N.M., Suchkova N.G. On subgroups of group Lim($\mathbb{N}$). *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, vol. 17, pp. 208–217 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2020.17.015 .
3. Kargapolov M.I., Merzljakov J.I. *Fundamentals of the theory of groups.* NY: Springer-Verlag, 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0 . Original Russian text published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp*, Moscow: Nauka Publ., 1977, 288 p.

Received February 23, 2022 Revised March 30, 2022 Accepted April 4, 2022

Funding Agency: The research of the first author on the construction of infinitely decreasing and infinitely increasing chains of mixed normal subgroups of the group Lim($\mathbb{N}$) (Theorem 1) was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-10017). The research of the second and third authors was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center, which is financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2022-876).

Anatoly Ilyich Sozutov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: sozutov_ai@mail.ru .

Nikolai Mihailovich Suchkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: ns7654321@mail.ru .

Nadezhda Georgievna Suchkova, Cand. Phys.-Math. Sci., Read., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: ns7654321@mail.ru .

Cite this article as: A. I. Sozutov, N. M. Suchkov, N. G. Suchkova. On mixed normal subgroups of group Lim(N), *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 187–192 .