ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 517.957, 51-76

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ДИФФУЗИОННЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ “ХИЩНИК — ЖЕРТВА”[1]

П. А. Кузнецов

В настоящей статье рассмотрена система двух нелинейных вырождающихся параболических уравнений, которые представляют собой нелинейные аналоги уравнения Фишера — Колмогорова — Петровского — Пискунова. Данная система лежит в основе математической модели “хищник — жертва”. Интересной ее особенностью является существование решений типа диффузионных (тепловых, фильтрационных) волн, распространяющихся по нулевому фону с конечной скоростью. Такое поведение решений несвойственно линейным системам и в нелинейном случае объясняется наличием вырождения. В работе для указанной системы рассмотрена задача о построении диффузионной волны по заданному фронту. Доказана теорема существования и единственности кусочно-аналитического решения задачи. Доказательство носит конструктивный характер: решение построено в виде степенных рядов с рекуррентно определяемыми коэффициентами, локальная сходимость доказана методом мажорант. Полученные результаты выполнены в традициях научной школы академика А. Ф. Сидорова, для которой, в частности, характерно использование метода рядов для решения параболических задач с вырождением. Отметим, что подобные исследования ранее проводились для одиночных уравнений, а также для систем типа “реакция — диффузия”, более простых по своей структуре, нежели рассматриваемая здесь. Последнее делает невозможным автоматическое перенесение ранее полученных результатов и накладывает свой отпечаток как на построение решения, так и на доказательство сходимости. Сходимость локальна, однако некоторое представление о поведении решения вне области сходимости могут дать полученные точные решения типа бегущей волны. При построении произведена редукция исходной задачи к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанную систему удалось проинтегрировать в квадратурах, решения выписаны в явном виде. Полученные формулы в дальнейшем могут быть использованы для верификации численных расчетов.

Ключевые слова: нелинейная параболическая система с вырождением, модель “хищник — жертва”, диффузионная волна, теорема существования, степенные ряды, метод мажорант, точные решения.

P. A. Kuznetsov. Analytic diffusion waves in a nonlinear parabolic “predator–prey” model.

We consider a system of two nonlinear degenerate parabolic equations that are nonlinear generalizations of the Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation. This system is the basis for the predator–prey mathematical model. Its interesting peculiarity is that it has solutions of the diffusion (heat, filtration) wave type propagating over a zero background with a finite velocity. This peculiarity is a consequence of nonlinear degeneracy. We consider the problem of constructing a diffusion wave of the system that has a known law of front motion. A theorem of existence and uniqueness of a piecewise analytic solution is proved. The proof is constructive: we find a solution in the form of power series and give recursive formulas for the coefficients. The local convergence is proved by the majorant method. The obtained results follow the tradition of Academician A. F. Sidorov’s scientific school to use the power series method to solve degenerate parabolic problems. Note that similar studies were previously conducted for single equations, as well as for reaction–diffusion systems that were significantly simpler in structure than the one mentioned above. The increased complexity makes it impossible to automatically transfer the earlier results to the case under consideration and affects both the construction of the solution and the proof of convergence. The convergence is local, but the obtained exact solutions of traveling wave type can illustrate the behavior of the solution outside the convergence domain. In order to construct the solution, we reduce the original problem to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. This system is integrated in quadratures, and its solutions are written explicitly. The obtained formulas may be used to verify numerical calculations.

Keywords: nonlinear degenerate parabolic system, predator–prey model, diffusion wave, existence theorem, power series, majorant method, exact solutions.

MSC: 35K40, 35K51, 35K65

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-158-167

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-07-00407 А); РФФИ и Правительства Иркутской области (проект № 20-41-385002).

Введение

Математические модели, основанные на параболических уравнениях и системах, используются в биологии достаточно давно и на сегодняшний день только набирают популярность (см. [1]). Параболические уравнения типа диффузии, такие как уравнение Фишера [2] или уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова [3], с успехом используются для исследования популяционной динамики [4; 5]. Также широко распространены реакционно-диффузионные модели, основанные на системах двух параболических уравнений [6]. В настоящей статье рассматривается нелинейная система вида

$$u_t - [(c_1 + h_1 v_x)u]_x = f(u, v), \quad v_t - [(c_2 - h_2 u_x)v]_x = g(v, u), \tag{0.1}$$

лежащая в основе математической модели “хищник — жертва” [7]. Искомые функции $u(t, x)$ и $v(t, x)$ обозначают здесь численность жертв и хищников соответственно, а известные достаточно гладкие функции f и g отображают популяционную динамику; $h_{1,2} > 0$ и $c_{1,2}$ — числовые параметры. Будем также предполагать выполнение равенства $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, гарантирующего существование тривиального решения системы (0.1).

Интересной особенностью рассматриваемой системы является существование у нее решений типа диффузионных (тепловых, фильтрационных) волн, распространяющихся по нулевому фону с конечной скоростью. Такая особенность, как известно, несвойственна линейным параболическим уравнениям и объясняется наличием у системы вырождения при равенстве нулю искомых функций. Подобные нелинейные эффекты на примере уравнения нелинейной теплопроводности хорошо показаны в монографии [8]. Геометрически диффузионная волна представляет собой тривиальное и нетривиальное решения системы, непрерывно состыкованные на линии фронта. В нелинейном случае подобные решения впервые рассмотрены Я. Б. Зельдовичем в рамках исследования механизмов лучистой теплопроводности (тепловые волны) [9], а также Г. И. Баренблаттом как волны фильтрации политропного газа, проходящего через пористый грунт [10]. Несмотря на содержательные физическую и геометрическую интерпретации, работ, посвященных построению и исследованию таких решений, на сегодняшний день не так уж много. Отдельно следует упомянуть исследования, выполненные в научной школе академика РАН А. Ф. Сидорова [11], в ходе которых предложены одномерные [12; 13], симметричные [14] и существенно неодномерные [15; 16] постановки краевых задач о построении тепловых (фильтрационных, диффузионных) волн, а также разработаны эффективные аналитические и численные методы их решения. Подобные краевые задачи для систем уравнений типа “реакция — диффузия” также исследованы в работах [17; 18].

В настоящей статье рассмотрена задача о построении решения системы (0.1) типа волн по заданному фронту $x = a(t)$ при некоторых f и g. Такие задачи А. Ф. Сидоров именовал “обратными” [11, с. 287], хотя обычно под обратными задачами понимаются несколько иные математические объекты [19; 20]. Основным инструментом исследования выбран метод степенных рядов, адаптированный в школе А. Ф. Сидорова для решения параболических задач с вырождением (см., например, характеристические [15], асимптотические [21] и специальные ряды [22]). Удобство этого метода заключается в возможности раскрыть имеющуюся особенность, а также привести конструктивные формулы решения. Локальная сходимость рядов доказана методом мажорант с использованием теоремы Коши — Ковалевской. Рекуррентные формулы коэффициентов могут быть использованы для верификации численных расчетов, выполненных, например, на основе метода граничных элементов (см. [23], а также [18]). Помимо этого в работе получены некоторые точные решения типа бегущей волны, при построении которых использован метод редукции [24] исходной задачи к вырождающейся задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанную систему удается проинтегрировать в квадратурах и записать решения явно. Последнее обстоятельство отчасти компенсирует локальный характер построенных рядов и дает возможность проиллюстрировать поведение решения вне области их сходимости. Полученные точные решения также могут быть использованы для верификации численных расчетов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему (0.1) при следующем выборе функций f и g:

$$\begin{aligned} u_t - c_1 u_x &= h_1(uv_{xx} + v_x u_x) + m_1 u - b_1 uv, \\ v_t - c_2 v_x &= -h_2(vu_{xx} + u_x v_x) - m_2 v + b_2 vu, \end{aligned} \qquad m_{1,2}, b_{1,2} \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Такой выбор обусловлен следующими соображениями:

a) подобные функции соответствуют свободным членам уравнений типа Фишера и Колмогорова — Петровского — Пискунова;

b) в частном случае $u = u(t)$, $v = v(t)$ обращаются в нуль все производные по x, и система (1.1) лежит в основе хорошо известной модели Лотки — Вольтерра, также описывающей борьбу двух видов (хищника и жертвы) [25].

Для системы (1.1) рассмотрим краевое условие

$$u(t,x)|_{x=a(t)} = v(t,x)|_{x=a(t)} = 0, \tag{1.2}$$

предполагая таким образом, что фронты обеих волн движутся по одному и тому же закону $x = a(t)$. Подобный случай возможен, например, когда хищники не просто настигают жертв, а занимают всю территорию, на которой они находятся. В частности, в монографии [7] для системы (0.1) рассмотрен случай бегущих волн с общим линейным фронтом $x = -ct$, где $c = c_1 = c_2$. Будем считать функцию $a(t)$ достаточно гладкой, причем $a'(0) \neq 0$.

Задача (1.1), (1.2) есть объект настоящего исследования.

Чтобы сделать дальнейшее рассмотрение более удобным, введем новую переменную $z = x - a(t)$. Задача (1.1), (1.2) примет вид

$$\begin{aligned} u_t - (c_1 + a')u_z &= h_1(uv_{zz} + v_z u_z) + m_1 u - b_1 uv, \\ v_t - (c_2 + a')v_z &= -h_2(vu_{zz} + u_z v_z) - m_2 v + b_2 vu, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$u(t,z)|_{z=0} = v(t,z)|_{z=0} = 0. \tag{1.4}$$

Несложно проверить глобальную невырожденность проведенной замены.

2. Основная теорема

Для задачи (1.3), (1.4), эквивалентной исходной, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $a(t)$ аналитична при $t = 0$, причем $-a'(t) \not\equiv c_1, c_2$. Тогда задача* (1.3), (1.4) *имеет единственное аналитическое решение*

— *нетривиальное при $u_z(t,0), v_z(t,0) \not\equiv 0$;*

— *тривиальное, если справедливо хотя бы одно из тождеств $u_z(t,0) \equiv 0$, $v_z(t,0) \equiv 0$.*

Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе построим решение в виде формальных рядов Тейлора. На втором этапе докажем сходимость этих рядов, используя метод мажорант.

Представим решение задачи (1.3), (1.4) в виде рядов Тейлора

$$u(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\frac{z^n}{n!}, \quad u_n(t) = \frac{\partial^n u}{\partial z^n}\Big|_{z=0}; \quad v(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\frac{z^n}{n!}, \quad v_n(t) = \frac{\partial^n v}{\partial z^n}\Big|_{z=0}. \tag{2.1}$$

Из краевого условия (1.4) следует тождество $u_0, v_0 \equiv 0$. Полагая в (1.3) $z = 0$, получим систему $-(c_1 + a')u_1 = h_1 v_1 u_1$, $-(c_2 + a')v_1 = -h_2 u_1 v_1$, из которой определим u_1 и v_1.

З а м е ч а н и е 1. Несложно заметить, что $u_1 \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $v_1 \equiv 0$. Следовательно, система имеет два решения: $u_1, v_1 \equiv 0$; $u_1, v_1 \not\equiv 0$. В дальнейшем будет видно, что случай $u_1, v_1 \equiv 0$ приводит к тривиальному решению задачи.

Предполагая теперь, что $u_1, v_1 \not\equiv 0$, определим коэффициенты u_1, v_1

$$v_1 = -\frac{c_1 + a'}{h_1}, \quad u_1 = \frac{c_2 + a'}{h_2}. \tag{2.2}$$

Остальные коэффициенты рядов (2.1) найдем, дифференцируя уравнения системы (1.3) по z и полагая $z = 0$.

Применяя к каждому уравнению системы (1.3) оператор $\partial^n[.]/\partial z^n|_{z=0}$, получим равенства

$$\begin{aligned} u_n' - (c_1 + a')u_{n+1} &= h_1\Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k v_{n+2-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k v_{k+1} u_{n+1-k}\Big) \\ &\qquad + m_1 u_n - b_1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k v_{n-k}, \\ v_n' - (c_2 + a')v_{n+1} &= -h_2\Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k v_k u_{n+2-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_{k+1} v_{n+1-k}\Big) \\ &\qquad - m_2 v_n + b_2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k v_k u_{n-k}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Полагая в (2.3) $n = 1$, найдем коэффициенты

$$v_2 = \frac{u_1' - m_1 u_1}{2h_1 u_1} = \frac{a'' - m_1(c_2 + a')}{2h_1(c_2 + a')}, \quad u_2 = -\frac{v_1' + m_2 v_1}{-2h_2 v_1} = -\frac{a'' + m_2(c_1 + a')}{2h_2(c_1 + a')}. \tag{2.4}$$

Действуя аналогично, можно вывести из (2.3) оставшиеся коэффициенты

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{h_2}{h_1(c_2 + a')(1+n)}\Big[u_n' - h_1\Big(\sum_{k=2}^{n} C_n^k u_k v_{n+2-k} + \sum_{k=2}^{n} C_n^{k-1} v_k u_{n+2-k}\Big) \\ &\qquad - m_1 u_n + b_1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k v_{n-k}\Big], \\ u_{n+1} &= \frac{h_1}{h_2(c_1 + a')(1+n)}\Big[v_n' + h_2\Big(\sum_{k=2}^{n} C_n^k v_k u_{n+2-k} + \sum_{k=2}^{n} C_n^{k-1} u_k v_{n+2-k}\Big) \\ &\qquad + m_2 v_n - b_2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k v_k u_{n-k}\Big]; \quad n \ge 2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Таким образом, аналитическое решение задачи (1.3), (1.4) может быть записано в виде рядов (2.1), коэффициенты которых определяются по формулам $u_0, v_0 \equiv 0$, (2.2), (2.4), (2.5).

Доказательство сходимости рядов непосредственно с помощью оценок их коэффициентов представляет собой весьма сложную задачу (хотя и решаемую в некоторых частных случаях — см., например, [26]). Поэтому здесь мы воспользуемся методом мажорант. Перед построением мажорантной задачи сделаем в (1.3), (1.4) замену

$$u(t, z) = u_1 z + z^2 U(t, z), \quad v(t, z) = v_1 z + z^2 V(t, z),$$

которая представляет собой частичное разложение искомых функций в ряды Тейлора (2.1). При такой замене отпадает необходимость рассматривать краевое условие (1.4), так как оно выполняется автоматически. После приведения подобных и деления на z задачу (1.3), (1.4) можно свести к системе

$$
\begin{aligned}
u_1' + zU_t &= h_1\Big[(u_1+zU)(2V+4zV_z+z^2V_{zz}) + u_1(2V+zV_z)\\
&\qquad + (2V+zV_z)(2zU+z^2U_z)\Big] + m_1(u_1+zU) - b_1(u_1+zU)(v_1z+z^2V),\\
v_1' + zV_t &= -h_2\Big[(v_1+zV)(2U+4zU_z+z^2U_{zz}) + v_1(2U+zU_z)\\
&\qquad + (2U+zU_z)(2zV+z^2V_z)\Big] - m_2(v_1+zV) + b_2(v_1+zV)(u_1z+z^2U).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Для удобства применения метода мажорант сгруппируем должным образом слагаемые и приведем систему (2.6) к виду

$$
\begin{aligned}
4V + 5zV_z + z^2V_{zz} &= \xi_0(t) + z\xi_1(t,U,V,U_t) + z^2\xi_2(t,U,V,U_z,V_z)\\
&\qquad + z^3\xi_3(z,t,U,V,U_z,V_z,V_{zz}),\\
4U + 5zU_z + z^2U_{zz} &= \eta_0(t) + z\eta_1(t,V,U,V_t) + z^2\eta_2(t,V,U,V_z,U_z)\\
&\qquad + z^3\eta_3(z,t,V,U,V_z,U_z,U_{zz}).
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Вид функций ξ_i, η_i, $i=0,1,2,3$, не приводится в силу громоздкости, отметим лишь, что все они будут аналитическими по своим переменным (в начале координат). Отсюда следует, что для них можно подобрать мажоранты. При выполнении мажорантных оценок

$$
\begin{gathered}
U|_{z=0}, V|_{z=0} \ll W_0, \quad U_z|_{z=0}, V_z|_{z=0} \ll W_1,\\
\xi_0(t), \eta_0(t) \ll \psi_0(t), \quad \xi_1(t,U,V,U_t), \eta_1(t,V,U,V_t) \ll \psi_1(t,W,W,W_t),\\
\xi_2(t,U,V,U_z,V_z), \eta_2(t,V,U,V_z,U_z) \ll \psi_2(t,W,W,W_z,W_z),\\
\xi_3(z,t,U,V,U_z,V_z,V_{zz}), \eta_3(z,t,V,U,V_z,U_z,U_{zz}) \ll \psi_3(z,t,W,W,W_z,W_z,W_{zz})
\end{gathered}
$$

решение задачи

$$
W_{zz} = \frac{\partial\psi_1(t,W,W,W_t)}{\partial z} + \psi_2(t,W,W,W_z,W_z) + z\psi_3(z,t,W,W,W_z,W_z,W_{zz}), \tag{2.8}
$$
$$
W(t,z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t,z)|_{z=0} = W_1(t)
$$

мажорирует решение системы (2.7). В этом можно убедиться, построив решения в виде рядов Тейлора

$$
\begin{gathered}
U(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n\frac{z^n}{n!}, \quad V(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n\frac{z^n}{n!}, \quad W(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n\frac{z^n}{n!},\\
U_n = \frac{\partial^n U}{\partial z^n}\Big|_{z=0}, \quad V_n = \frac{\partial^n V}{\partial z^n}\Big|_{z=0}, \quad W_n = \frac{\partial^n W}{\partial z^n}\Big|_{z=0}.
\end{gathered}
$$

Продифференцировав уравнение (2.8), разрешив его относительно W_{zzz} и добавив третье краевое условие $W_{zz}(t,0) = W_2(t)$, мы получим задачу типа Ковалевской с аналитическими входными данными. Полученная задача подпадает под действие теоремы Коши — Ковалевской и, следовательно, имеет единственное аналитическое решение.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Полученные результаты выполнены в традициях научной школы академика А. Ф. Сидорова, о чем говорят и формулировка теоремы, и ее доказательство. Существенное различие заключается в самой системе (0.1). Рассматривавшиеся ранее системы

$$
u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 + F(u,v), \quad v_t = vv_{xx} + \frac{1}{\delta}v_x^2 + G(v,u)
$$

типа “реакция — диффузия” [17] состоят из двух уравнений, связанных лишь функциями источника $F(u,v)$ и $G(v,u)$. В системе (0.1) мы наблюдаем взаимосвязь принципиально иного характера, гораздо более сложного. Последнее делает невозможным автоматическое перенесение ранее полученных результатов и накладывает свой отпечаток на построение решения, а также на доказательство сходимости.

3. Точные решения

Доказанная теорема носит локальный характер, что не дает возможности предсказать поведение построенного решения за пределами области сходимости. К тому же определение границ этой области зачастую представляет собой сложную и нетривиальную задачу. Получить некоторое представление об этом помогают точные решения. В данном разделе мы приводим решения типа бегущей волны задачи (1.3), (1.4) в одном частном случае. При их построении исходная задача будет сведена к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений, которая в свою очередь будет проинтегрирована в квадратурах.

Положим в задаче (1.3), (1.4) линейной функцию $a(t) = -ct$, $c \neq 0$ — const. Остальные параметры зададим следующим образом: $c_1 = c_2 = c$, $m_1 = m_2 = 0$, $b_1 = -\alpha$, $b_2 = \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Задача примет вид

$$u_t = h_1(uv_{zz} + v_z u_z) + \alpha uv, \quad v_t = -h_2(vu_{zz} + u_z v_z) + \beta vu, \tag{3.1}$$

$$u(t,z)|_{z=0} = v(t,z)|_{z=0} = 0. \tag{3.2}$$

С помощью замены $u = p(z)$, $v = q(z)$ сведем задачу (3.1), (3.2) к задаче Коши

$$pq'' + q'p' = -\frac{\alpha}{h_1}pq, \quad qp'' + p'q' = \frac{\beta}{h_2}qp, \tag{3.3}$$

$$p(0) = q(0) = 0. \tag{3.4}$$

Чтобы разрешить систему (3.3), суммируем оба уравнения. Вводя в полученном равенстве

$$(pq)'' = \Big(\frac{\beta}{h_2} - \frac{\alpha}{h_1}\Big)pq$$

обозначения $h(z) = p(z)q(z)$, $\gamma = \dfrac{\beta}{h_2} - \dfrac{\alpha}{h_1}$, получим ОДУ второго порядка $h'' - \gamma h = 0$, решение которого известно:

$$h = \begin{cases} \sigma_1 \operatorname{ch}(z\sqrt{\gamma}) + \sigma \operatorname{sh}(z\sqrt{\gamma}), & \gamma > 0, \\ \sigma_1 + \sigma z, & \gamma = 0, \qquad \sigma_1, \sigma \text{ — const.} \\ \sigma_1 \cos(z\sqrt{-\gamma}) + \sigma \sin(z\sqrt{-\gamma}), & \gamma < 0, \end{cases}$$

Из краевого условия (3.4) следует, что $\sigma_1 = 0$. Отсюда имеем формулу

$$h = \begin{cases} \sigma \operatorname{sh}(z\sqrt{\gamma}), & \gamma > 0, \\ \sigma z, & \gamma = 0, \\ \sigma \sin(z\sqrt{-\gamma}), & \gamma < 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Функции p и q можно найти, например, подставляя равенство $p = h/q$ в первое уравнение системы (3.3):

$$\Big(\frac{hq'}{q}\Big)' = -\frac{\alpha}{h_1}h.$$

Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. *Задача* (3.1), (3.2) *имеет точное решение типа бегущей волны* $u = p(z)$, $v = q(z)$, *где*

$$q = l_2 \exp\left(\int \frac{-\dfrac{\alpha}{h_1}\displaystyle\int h\,dz + l_1}{h}\,dz\right), \quad p = \frac{h}{l_2}\exp\left(\int \frac{\dfrac{\alpha}{h_1}\displaystyle\int h\,dz - l_1}{h}\,dz\right), \quad l_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad l_2 \neq 0. \tag{3.6}$$

Функция $h(z)$ *определяется по формуле* (3.5).

Пользуясь формулой

$$\int h\mathrm{d}z = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sqrt{\gamma}}\,\mathrm{ch}\,(z\sqrt{\gamma}), & \gamma > 0, \\ \sigma\frac{z^2}{2}, & \gamma = 0, \\ -\dfrac{\sigma}{\sqrt{-\gamma}}\cos\,(z\sqrt{-\gamma}), & \gamma < 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

можно разрешить интегралы в равенствах (3.6), последовательно рассмотрев случаи $\gamma > 0$, $\gamma < 0$ и $\gamma = 0$.

Пусть $\gamma > 0$. Подставляя (3.5), (3.7) в (3.6), получим равенства

$$q = l_2[\mathrm{sh}\,(z\sqrt{\gamma})]^{-\frac{\alpha}{h_1\gamma}}\Big[\frac{\mathrm{ch}\,(z\sqrt{\gamma})+1}{\mathrm{ch}\,(z\sqrt{\gamma})-1}\Big]^{-\frac{l_1}{2\sigma\sqrt{\gamma}}}, \quad p = \frac{\sigma}{l_2}[\mathrm{sh}\,(z\sqrt{\gamma})]^{1+\frac{\alpha}{h_1\gamma}}\Big[\frac{\mathrm{ch}\,(z\sqrt{\gamma})+1}{\mathrm{ch}\,(z\sqrt{\gamma})-1}\Big]^{\frac{l_1}{2\sigma\sqrt{\gamma}}}. \tag{3.8}$$

Чтобы выполнялись краевые условия (3.4) и функции (3.8) описывали бы диффузионные волны, необходимо положить в (3.8) $l_1 = 0$ и $-1 < \alpha/(h_1\gamma) < 0$:

$$q = l_2[\mathrm{sh}\,(z\sqrt{\gamma})]^{-\frac{\alpha}{h_1\gamma}}, \quad p = \frac{\sigma}{l_2}[\mathrm{sh}\,(z\sqrt{\gamma})]^{1+\frac{\alpha}{h_1\gamma}}.$$

Далее рассуждения повторяются. При $\gamma < 0$ функции

$$q = l_2[\sin\,(z\sqrt{-\gamma})]^{-\frac{\alpha}{h_1\gamma}}\Big(\mathrm{tg}\,\frac{z\sqrt{-\gamma}}{2}\Big)^{\frac{l_1}{\sigma\sqrt{-\gamma}}}, \quad p = \frac{\sigma}{l_2}[\sin\,(z\sqrt{-\gamma})]^{1+\frac{\alpha}{h_1\gamma}}\Big(\mathrm{tg}\,\frac{z\sqrt{-\gamma}}{2}\Big)^{-\frac{l_1}{\sigma\sqrt{-\gamma}}}$$

удовлетворяют краевым условиям (3.4) также при $l_1 = 0$ и $-1 < \alpha/(h_1\gamma) < 0$:

$$q = l_2[\sin\,(z\sqrt{-\gamma})]^{-\frac{\alpha}{h_1\gamma}}, \quad p = \frac{\sigma}{l_2}[\sin\,(z\sqrt{-\gamma})]^{1+\frac{\alpha}{h_1\gamma}}.$$

Наконец, в случае $\gamma = 0$ функции

$$q = l_2\exp\Big(-\frac{\alpha z^2}{4h_1}\Big)z^{\frac{l_1}{\sigma}}, \quad p = \frac{\sigma}{l_2}\exp\Big(\frac{\alpha z^2}{4h_1}\Big)z^{1-\frac{l_1}{\sigma}}$$

удовлетворяют краевым условиям (3.4) при $0 < l_1/\sigma < 1$.

Заключение

В настоящей статье рассмотрена вырождающаяся параболическая система, описывающая взаимодействие двух биологических видов типа “хищник — жертва”. Уравнения, составляющие систему, представляют собой нелинейный аналог уравнений Фишера и Колмогорова—Петровского—Пискунова, описывающих популяционную динамику. Сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности кусочно-аналитического решения системы типа диффузионной волны с заданным фронтом. Доказанная теорема носит конструктивный характер, приведены рекуррентные формулы коэффициентов рядов. Сходимость последних носит локальный характер. Также построены точные решения типа бегущей волны, при этом произведена редукция исходной задачи к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанную систему удалось проинтегрировать в квадратурах, решение выписано в явном виде, что позволяет исследовать поведение диффузионной волны вне области сходимости рядов.

Полученные формулы в дальнейшем планируется использовать для верификации численных расчетов. Проведенные исследования могут быть рассмотрены в контексте математического моделирования популяционной динамики фауны оз. Байкал (байкальский омуль — голомянка и др.), чему способствует активное развитие систем хранения и обработки соответствующих данных [27].

Благодарности. Автор выражает благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору РАН А. Л. Казакову за полезные замечания и обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Perthame B**. Parabolic equations in biology. Growth, reaction, movement and diffusion. Cham: Springer, 2015. 199 p.
2. **Fisher R.A.** The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. Vol. 7, no. 4. P. 353–369. doi: 10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x .
3. **Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.** Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1, вып. 6. С. 1–26.
4. Achouri T., Ayadi M., Habbal A., Yahyaoui B. Numerical analysis for the two-dimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovski–Piskunov equation with mixed boundary condition // J. Appl. Math. Comp. 2021. No. 1. P. 1–26. doi: 10.1007/s12190-021-01679-7 .
5. **Алешин С.В., Глызин С.Д., Кащенко С.А.** Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова с запаздыванием // Моделирование и анализ информ. систем. 2015. Т. 22, № 2. С. 304–321. doi: 10.18255/1818-1015-2015-2-304-321 .
6. **Viguerie A. et al.** Diffusion–reaction compartmental models formulated in a continuum mechanics framework: application to COVID-19, mathematical analysis, and numerical study. *Comput. Mech.*, 2020, vol. 66, no. 5, pp. 1131–1152. doi: 10.1007/s00466-020-01888-0 .
7. **Murray J.D.** Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. NY: Springer, 2003. 837 p. (Interdisciplinary Appl. Math.; vol. 18). doi: 10.1007/b98869 .
8. **Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
9. **Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 1966. 632 с.
10. **Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М.** Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
11. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит. 2001. 576 с.
12. **Баутин С.П.** Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит. 2003. 88 с.
13. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 57–68.
14. **Казаков А.Л.** О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1057–1068. doi: 10.33048/semi.2019.16.073 .
15. **Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F.** Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1993, vol. 8, no. 2, pp. 101–125. doi: 10.1515/rnam.1993.8.2.101 .
16. **Казаков А.Л., Кузнецов П.А.** Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 2 (74). С. 56–65.
17. **Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A.** Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. Vol. 12, no. 6. Art. no. 999. doi: 10.3390/sym12060999 .
18. **Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.** Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 4 (88). С. 64–78. doi: 10.33048/SIBJIM.2021.24.405 .
19. **Васин В.В., Акимова Е.Н., Миниахметова А.Ф.** Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестн. ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2013. Т. 6, № 3. С. 26–37.
20. **Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.** Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. 168 с.
21. **Коврижных О.О.** О построении асимптотического решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения // Журн. вычисл. мататики и мат. физики. 2003. Т. 43, №. 10. С. 1487–1493.
22. **Filimonov M.Yu.** Representation of solutions of boundary value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently caculated coefficients // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1268. Art. no. 012071. doi: 10.1088/1742-6596/1268/1/012071 .

23. **Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.** Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.
24. **Казаков А.Л., Орлов Св.С., Орлов С.С.** Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 544–560.
25. **Арнольд В.И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012. 344 с.
26. **Васин В.В., Сидоров А.Ф.** О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // Известия вузов. Математика. 1983. № 7. С. 13–27.
27. **Kedrin V.S., Arguchintsev A.V., Dobrinets I.M.** Mechanisms of polymorphic systematization of bioecological data within the BaikalIntelli platform for organizing computational models of population dynamics // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1847. Art. no. 012029. doi: 10.1088/1742-6596/1847/1/012029 .

Поступила 9.03.2022

После доработки 24.03.2022

Принята к публикации 27.03.2022

Кузнецов Павел Александрович

канд. физ.-мат. наук, младший науч. сотрудник

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

г. Иркутск

e-mail: kuznetsov@icc.ru

REFERENCES

1. Perthame B. *Parabolic equations in biology: Growth, reaction, movement and diffusion.* Cham: Springer, 2015, 199 p. ISBN: 9783319195001 .
2. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics*, 1937, vol. 7, no. 4, pp. 353–369. doi: 10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x .
3. Kolmogorov A.N., Petrovskii I.G., Piskunov N.S. Studies of the diffusion with the increasing quantity of the substance; its application to a biological problem. *Bull. Moscow Univ. Math. Mech.*, 1937, vol. 1, no. 6, pp. 1–26.
4. Achouri T., Ayadi M., Habbal A., Yahyaoui B. Numerical analysis for the two-dimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovski–Piskunov equation with mixed boundary condition. *J. Appl. Math. Comp.*, 2021, no. 1, pp. 1–26. doi: 10.1007/s12190-021-01679-7 .
5. Aleshin S.V., Glyzin S.D., Kaschenko S.A. Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piscounov equation with delay. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2015, vol. 22, no. 2, pp. 304–321 (in Russian). doi: 10.18255/1818-1015-2015-2-304-321 .
6. Viguerie A., Veneziani A., Lorenzo G., Baroli D., Aretz-Nellesen N., Patton A., Yankeelov T.E., Reali A., Hughes T.J.R., Auricchio F. Diffusion–reaction compartmental models formulated in a continuum mechanics framework: application to COVID-19, mathematical analysis, and numerical study. *Comput. Mech.*, 2020, vol. 66, no. 5, pp. 1131–1152. doi: 10.1007/s00466-020-01888-0 .
7. Murray J.D. *Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications.* Ser. Interdisciplinary Appl. Math., vol. 18. NY: Springer, 2003, 837 p. doi: 10.1007/b98869 .
8. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Blow-up in quasilinear parabolic equations.* Berlin: Walter de Gruyter, 1995, 554 p. doi: 10.1515/9783110889864 . Original Russian text published in Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineinykh parabolicheskikh uravnenii*, Moscow: Nauka Publ., 1987, 480 p.
9. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena.* NY: Dover Publ., 2002, 944 p. ISBN: 0486420027 . Original Russian text published in Zel'dovich Ya.B. Raizer Yu.P. *Fizika udarnykh voln vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavlenii*, Moscow: Fizmatlit Publ., 1966, 632 p.
10. Barenblatt G., Entov V., Ryzhik V. *Theory of fluid flows through natural rocks.* Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1990, 396 p. ISBN: 978-90-481-4042-8 . Original Russian text published in Barenblatt G.I., Entov V.N., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhidkostei i gazov v prirodnykh plastakh*, Moscow: Nedra Publ., 1984, 211 p.
11. Sidorov A.F. *Izbrannye trudy: Matematika. Mekhanika* [Selected Works: Mathematics and Mechanics]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. ISBN: 5-9221-0103-X .

12. Bautin S.P. *Analiticheskaya teplovaya volna* [The analytical heat wave]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2003, 88 p. ISBN: 5-9221-0443-8 .
13. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and numerical studies of the boundary value problem of a nonlinear filtration with degeneration. *Vychisl. Tekhnol.*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 57–68 (in Russian).
14. Kazakov A.L. On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, vol. 16, pp. 1057–1068 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2019.16.073 .
15. Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F. Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 1993, vol. 8, no. 2, pp. 101–125. doi: 10.1515/rnam.1993.8.2.101 .
16. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On the analytic solutions of a special boundary value problem for a nonlinear heat equation in polar coordinates. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, vol. 12, no. 2, pp. 255–263. doi: 10.1134/S1990478918020060 .
17. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type. *Symmetry*, 2020, vol. 12, no. 6, art. no. 999. doi: 10.3390/sym12060999 .
18. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. Construction of solutions to the boundary value problem with singularity for a nonlinear parabolic system. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 64–78 (in Russian). doi: 10.33048/SIBJIM.2021.24.405 .
19. Vasin V.V., Akimova E.N., Miniakhmetova A.F. Iterative Newton type algorithms and its applications to inverse gravimetry problem. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 26–37 (in Russian).
20. Korotkii A.I., Starodubtseva Yu.V. *Modelirovanie pryamykh i obratnykh granichnykh zadach dlya statsionarnykh modelei teplomassoperenosa* [Modeling of direct and inverse boundary value problems for stationary heat and mass transfer models]. Ekaterinburg: Ural. Univ. Publ., 2015, 168 p.
21. Kovrizhnykh O.O. On construction of an asymptotic solution to the degenerate nonlinear parabolic equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003, vol. 43, no. 10, pp. 1430–1436.
22. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of boundary value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently caculated coefficients. *J. Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1268, art. no. 012071, 6 p. doi: 10.1088/1742-6596/1268/1/012071 .
23. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a degenerate boundary value problem for the porous medium equation in spherical coordinates. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 119–129.
24. Kazakov A.L., Orlov Sv.S., Orlov S.S. Construction and study of exact solutions to a nonlinear heat equation. *Sib. Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 427–441. doi: 10.1134/S0037446618030060 .
25. Arnold V.I. *Ordinary differential equations.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1992, 338 p. ISBN: 978-3-540-34563-3 . Original Russian text published in Arnol'd V.I. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya*, Moscow: MTsNMO Publ., 2012, 344 p.
26. Vasin V.V., Sidorov A.F. Some methods of approximate solution of differential and integral equations. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1983, vol. 27, no. 7, pp. 14–33.
27. Kedrin V.S., Arguchintsev A.V., Dobrinets I.M. Mechanisms of polymorphic systematization of bioecological data within the BaikalIntelli platform for organizing computational models of population dynamics. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1847, art. no. 012029. doi: 10.1088/1742-6596/1847/1/012029 .

Received March 9, 2022
Revised March 24, 2022
Accepted March 27, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-07-00407 A) and jointly by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Irkutsk oblast (project no. 20-41-385002).

Pavel Alexandrovich Kuznetsov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: kuznetsov@icc.ru .

Cite this article as: P. A. Kuznetsov. Analytic diffusion waves in a nonlinear parabolic “predator–prey” model. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 158–167.