

УДК 517.955, 517.956.4, 517.956.8

СОГЛАСОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ КОШИ С МНОГОМАСШТАБНОЙ ЭВОЛЮЦИЕЙ СИНГУЛЯРНОСТИ

С. В. Захаров

Рассматривается бисингулярная задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром при старшей производной. Начальная функция зависит от пространственной переменной с другим малым параметром, и выполняются условия, при которых постановка задачи становится моделью эволюции нелинейных волн сжатия с большим начальным градиентом в физических системах при наличии малой диссипации. В предельном случае нулевой диссипации, когда рассматриваемое уравнение становится уравнением первого порядка, имеется ударная волна, начало которой представляет собой особую точку решения. Вблизи этой особой точки — на масштабах малой величины диссипации — строится асимптотическое решение задачи по малым параметрам. С помощью метода согласования на основе полученного ранее асимптотического решения в меньшей области установлено, что новое асимптотическое решение должно иметь вид ряда по целым степеням отношения малых параметров и его логарифма, и для коэффициентов этого ряда получена рекуррентная система параболических уравнений вместе с соответствующими асимптотическими условиями согласования. После сведения этой рекуррентной системы задач к интегральным соотношениям применением метода последовательных приближений и оценок интегральных сверток доказано существование нужных решений. Кроме того, установлено, что построенный ряд применим в переходной области многомасштабной эволюции сингулярности между ее начальной стадией и пограничным слоем вблизи ударной волны, а в частном случае уравнения Бюргерса даны некоторые явные формулы.

Ключевые слова: квазилинейное параболическое уравнение, большой начальный градиент, бисингулярная задача Коши, особая точка, многомасштабная эволюция, автомодельность, асимптотики Пуанкаре и Эрдейи, метод согласования, диссипативная волна сжатия, ударная волна.

S. V. Zakharov. Matching of asymptotic solutions of a parabolic equation in the Cauchy problem with the multiscale evolution of a singularity.

A bisingular Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a small parameter at the higher derivative is considered. The initial function depends on the space variable with another small parameter, and conditions are fulfilled under which the statement of the problem becomes a model of the evolution of nonlinear compression waves with a large initial gradient in physical systems in the presence of a small dissipation. In the limit case of the zero dissipation, when the equation under consideration becomes a first-order equation, there is a shock wave, whose origin is a singular point of the solution. Near the singular point, on the scales of the small value of dissipation, an asymptotic solution of the problem in the small parameters is constructed. With the help of the matching method on the basis of an earlier obtained asymptotic solution in a smaller region, it is established that the new asymptotic solution must have the form of a series in integer powers of the ratio of small parameters and its logarithm, and for the coefficients of this series a recurrence system of parabolic equations together with the corresponding asymptotic conditions of matching is obtained. After reducing this recurrence system of problems to integral relations, by applying the method of successive approximations and estimates of integral convolutions, the existence of necessary solutions is proved. In addition, it is shown that the constructed series is suitable in a transitional region of the multiscale evolution of the singularity between its initial stage and the boundary layer near the shock wave, and also in the particular case of the Burgers equation some explicit formulas are given.

Keywords: quasilinear parabolic equation, large initial gradient, bisingular Cauchy problem, singular point, multiscale evolution, self-similarity, Poincaré and Erdélyi asymptotics, matching method, dissipative compression wave, shock wave.

MSC: 34E05, 34E10, 34K26, 35K15, 35K59

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-96-110

1. Введение

Предметом исследования в данной работе является асимптотическая структура решения задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon, \rho) = \nu(x\rho^{-1}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0, \quad (1.2)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$ и $\rho \rightarrow +0$ вблизи совпадающей с началом координат особой точки решения, порожденной большим начальным градиентом. Чтобы заведомо гарантировать существование и единственность гладкого решения $u(x, t, \varepsilon, \rho)$, а также возможность аналитически строить его приближения и формальные асимптотические решения в виде рядов, предполагается, что функция $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ -гладкая, $\varphi''(u) > 0$, а входящая в начальное условие (1.2) функция $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и непрерывно дифференцируема; кроме того, предполагаем, что функция ν удовлетворяет асимптотическим, в смысле Пуанкаре [1, § 1; 2, гл. I, § 1.3], условиям

$$\nu(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu_n^\pm}{\sigma^n}, \quad \sigma \rightarrow \pm\infty, \quad \nu_0^+ < \nu_0^-, \quad (1.3)$$

приводящим — в стандартной физической интерпретации рассматриваемой постановки задачи — к возникновению волны сжатия. Соотношение двух независимых малых параметров ε и ρ считается таким, что

$$\mu = \frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow +0. \quad (1.4)$$

Здесь уместно сказать, что в контексте нашей работы термин “особая точка” понимается именно в смысле большого пространственного градиента решения $u(x, t, \varepsilon, \rho)$ в ее малой окрестности, что несколько не противоречит гладкости самого решения (по этому поводу см. вводную часть обзора [3]).

В [4, формула (3.3)] было установлено, что задача (1.1), (1.2) с условиями (1.3), (1.4) в малой области независимых переменных

$$\Omega_1 = \{(x, t) : t > 0, \quad x^2 + \varepsilon t < \rho^{\delta_1} \varepsilon^{2-\delta_1}, \quad 0 < \delta_1 < 2\}, \quad (1.5)$$

где за счет определенного соотношения производных в уравнении (1.1) работает линейное приближение, имеет асимптотическое решение в виде ряда¹

$$\mathcal{H}(\sigma, \omega, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n h_n(\sigma, \omega), \quad (1.6)$$

$$\sigma = \frac{x}{\rho}, \quad \omega = \frac{\varepsilon t}{\rho^2}, \quad (1.7)$$

для коэффициентов которого при $|\sigma| + \omega \rightarrow +\infty$ справедлива формула

$$h_n(\sigma, \omega) = \omega^{n/2} \sum_{m=0}^{\infty} \omega^{-m/2} \sum_{l=0}^m (\ln \omega)^l R_{n,m,l}(z), \quad z = \frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}}, \quad (1.8)$$

¹На первый взгляд может создаться обманчивое впечатление, что введение новых переменных (1.7) полностью устраняет из нашей задачи один малый параметр. В действительности второй параметр оказывается скрыт в “растянутом” времени ω , и для нахождения поведения решения на временах $t \gtrsim \varepsilon$ пришлось провести технически непростое доказательство асимптотической формулы (1.8) (см. [4, теорема 2]). Если вспомнить *существенно двухпараметрическое внешнее разложение* [4, формулы (2.3), (2.4)], то можно сказать, что мы здесь имеем дело со своеобразным микролокальным эффектом вуалирования одного из малых параметров, отдаленно напоминающим понижение размерности группы симметрии в теории поля Янга — Миллса в пределе низких энергий.

в смысле Эрдейи [2, гл. II, § 2.1], по калибровочным (асимптотическим) последовательностям $\{(\sigma^2 + \omega)^{-\gamma_n m}\}_{m=1}^{\infty}$, $\gamma_n > 0$, с зависящими от автомодельной переменной гладкими функциями $R_{n,m,l} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C^\infty(\mathbb{R})$. Однако уже в работе [5, п. 3] было показано, что для получения согласованной асимптотики решения задачи (1.1), (1.2) необходимо построить дополнительный внутренний слой в переходной области Ω_2 между начальной стадией сингулярности решения $u(x, t, \varepsilon, \rho)$ и пограничным слоем Ω_3 вблизи линии $x = ct$ распространения ударной волны — разрыва обобщенного решения предельного уравнения первого порядка, т. е. уравнения (1.1) при $\varepsilon = 0$; взаимное расположение всех этих областей и топологию каждой из них в отдельности можно уяснить из приведенного далее рисунка а структуру главного асимптотического приближения решения в пограничном слое Ω_3 — из формул (4.5)–(4.7).

Цель данной работы, ключевые построения которой существенным образом основаны на выраженных формулами (1.6)–(1.8) результатах, состоит в отыскании согласованного с асимптотиками (1.6) и (4.7) асимптотического решения, при $\mu \rightarrow +0$ формально удовлетворяющего уравнению (1.1) с произвольной наперед заданной точностью в переходной области Ω_2 .

В широком смысле теоретический интерес к изучению поведения решений задачи Коши для уравнения (1.1) вблизи особых точек объясняется, во-первых, тем, что подобные сингулярные события хотя и занимают очень малое время, но во многом определяют все последующее поведение этой фундаментальной эволюционной модели механики сплошных сред на конечных и больших временах, и, во-вторых, тем, что любая начальная задача в математической физике — это своеобразный эксперимент, результаты которого, бывая иногда непредсказуемыми, могут генерировать новые идеи².

Различные физические интерпретации и базовые математические аспекты рассматриваемой задачи подробно излагаются в монографии [6, гл. VI], а специальный случай начального условия (1.2) с дополнительным малым параметром — в упомянутых выше работах [4; 5] и в обзоре [3], где также обозначено место задачи в общей картине близких по направлению исследований. Для приложений к вопросам распространения волн в разнообразных физических системах [7, гл. 3, 4] изучаемая в настоящей работе постановка задачи представляет интерес в качестве модели формирования нелинейной волны сжатия с большим начальным градиентом при наличии малой диссипации.

Для правильного понимания многих существенных моментов настоящей работы нам необходимо вспомнить основные метода согласования [6].

2. Переходный внутренний слой

Согласно [4, теорема 2] асимптотика (1.8) коэффициентов ряда (1.6) в главном приближении имеет следующий автомодельный вид:

$$h_n(\sigma, \omega) \sim \omega^{n/2} R_{n,0,0} \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}} \right), \quad |\sigma| + \omega \rightarrow +\infty,$$

где

$$R_{0,0,0}(z) = \frac{\nu_0^-}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} \exp(-y^2) dy + \frac{\nu_0^+}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-y^2) dy, \quad \nu_0^\pm = \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \nu(\sigma), \quad (2.1)$$

$$R_{1,0,0}(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(z - y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] \frac{d\varphi(R_{0,0,0}(y))}{dy} dy d\beta, \quad (2.2)$$

²В исследуемой нами здесь задаче (1.1), (1.2) непредвиденно нетривиальная структура асимптотики решения $u(x, t, \varepsilon, \rho)$, выявленная в частном случае уравнения Бюргерса преобразованием Коула — Хопфа, а в общем — методом согласования, привела сначала к фундаментальному результату по теории теплопроводности (см., например, [5, п. 2, формула (8)]), а затем — к открытию формулы глобального ренормализационного приближения решения $u(x, t, \varepsilon, \rho)$ через интегральную свертку [5, п. 6, теорема 2].

$$\begin{aligned}
 R_{n,0,0}(z) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\beta^{(n-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\right] \\
 &\times \frac{d}{dy} \left[\sum_{q=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(q)}(R_{0,0,0}(y))}{q!} \sum_{i_1+\dots+i_q=n-1} \prod_{\alpha=1}^q R_{i_\alpha,0,0}(y) \right] dy d\beta. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

В соответствии с соотношением между малыми параметрами (1.4) и масштабами внутренних переменных (1.7) отсюда получаем

$$\mu^n h_n(\sigma, \omega) \sim \text{const} \times \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{n/2} \quad \text{при } \sigma^2 < \omega \text{ и } \omega \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, построенное асимптотическое решение $\mathcal{H}(\sigma, \omega, \mu)$ теряет смысл при $t \approx \varepsilon$. С другой стороны, еще в [5, п. 5] было показано, что даже функцию $h_0(\sigma, \omega)$, т. е. нулевое приближение решения (1.6), невозможно согласовать с асимптотическим анзацем (4.7) в окрестности линии разрыва решения предельного уравнения. Поэтому возникает необходимость вблизи точки сингулярности решения $u(x, t, \varepsilon, \rho)$ построить дополнительный (переходный) слой, в котором естественно ввести новые внутренние переменные с помощью замены

$$x = \varepsilon\eta, \quad t = \varepsilon\theta. \quad (2.4)$$

Используя полную асимптотику (1.8) и соотношения

$$\sigma = \frac{\eta}{\mu}, \quad \omega = \frac{\theta}{\mu^2}, \quad z = \frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}} = \frac{\eta}{2\sqrt{\theta}}, \quad (2.5)$$

вытекающие из замен независимых переменных (1.7) и (2.4), преобразуем теперь ряд (1.6) к следующему формальному виду:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{p=0}^m (\ln \mu)^p W_{m,p}(\eta, \theta), \quad \mu \rightarrow +0, \quad (2.6)$$

где коэффициенты $W_{m,p}(\eta, \theta)$ также представляют собой формальные асимптотические ряды:

$$W_{m,p}(\eta, \theta) = (-2)^p \theta^{-m/2} \sum_{q=0}^{m-p} \frac{(p+q)!}{p! q!} (\ln \theta)^q \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{n/2} R_{n,m,p+q}(z), \quad \theta \rightarrow +0. \quad (2.7)$$

Преобразуя ряд в условии на начальную функцию (1.3) с помощью соотношений переменных (2.5) и сравнивая результат

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m 2^{-m} \nu_m^{\pm} \theta^{-m/2} z^{-m}, \quad \mu \rightarrow +0, \quad z \rightarrow \pm\infty,$$

с рядами (2.6), (2.7), нетрудно понять, что $\forall m \geq 0 \quad R_{0,m,0}(z) \sim 2^{-m} \nu_m^{\pm} z^{-m}$, $z \rightarrow \pm\infty$, а все остальные функции $R_{n,m,l}(z)$ при $z \rightarrow \infty$ сверхстепенным образом стремятся к нулю: $R_{n,m,l}(z) = O(z^{-\infty})$, если $n+l \neq 0$. Из структуры выражения (2.6) становится также ясно, что асимптотическое решение в переходном слое следует строить в виде ряда

$$\mathcal{W}(\eta, \theta, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{p=0}^m (\ln \mu)^p w_{m,p}(\eta, \theta). \quad (2.8)$$

Таким образом, рассматриваемая нами начальная задача относится к классу *бисингулярных* (см. [6, введение, с. 16]): в формуле (2.7) порядок особенностей $\theta^{-m/2}$ при $\theta \rightarrow +0$ растет с ростом индекса m , а значит, должен нарастать и порядок особенностей функций $w_{m,p}(\eta, \theta)$ при $\theta \rightarrow +0$.

Согласование асимптотических решений $\mathcal{H}(\sigma, \omega, \mu)$ и $\mathcal{W}(\eta, \theta, \mu)$

	$w_{0,0}(\eta, \theta)$	$\mu w_{1,0}(\eta, \theta)$	$\mu \ln \mu w_{1,1}(\eta, \theta)$...
$h_0(\sigma, \omega)$	$R_{0,0,0}(z)$	$\mu \theta^{-1/2}[R_{0,1,0}(z) + \ln \theta R_{0,1,1}(z)]$	$-2\mu \ln \mu \theta^{-1/2} R_{0,1,1}(z)$...
$\mu h_1(\sigma, \omega)$	$\theta^{1/2} R_{1,0,0}(z)$	$\mu[R_{1,1,0}(z) + \ln \theta R_{1,1,1}(z)]$	$-2\mu \ln \mu R_{1,1,1}(z)$...
$\mu^2 h_2(\sigma, \omega)$	$\theta R_{2,0,0}(z)$	$\mu \theta^{1/2}[R_{2,1,0}(z) + \ln \theta R_{2,1,1}(z)]$	$-2\mu \ln \mu \theta^{1/2} R_{2,1,1}(z)$...
...

Согласование рядов (1.6) и (2.8) можно наглядно проиллюстрировать с помощью табл. 1.

Строки этой таблицы — начиная со второй — дают последовательные слагаемые ряда (1.8), т. е. асимптотику соответствующих элементов первого столбца при $|\sigma| + \omega \rightarrow +\infty$.

Согласование асимптотических решений $\mathcal{H}(\sigma, \omega, \mu)$ и $\mathcal{W}(\eta, \theta, \mu)$ состоит в построении таких функций $w_{m,p}(\eta, \theta)$, чтобы формальная сумма элементов каждого (разумеется, бесконечного) столбца табл. 1 — начиная со второго — являлась бы асимптотикой при $\theta \rightarrow +0$ соответствующих элементов первой строки, т. е.

$$w_{m,p}(\eta, \theta) = W_{m,p}(\eta, \theta), \quad \theta \rightarrow +0. \quad (2.9)$$

Взаимное расположение области начальной стадии эволюции Ω_1 и переходной области

$$\Omega_2 = \{(x, t): t > 0, x^2 + \varepsilon t > \rho^{\delta_2} \varepsilon^{2-\delta_2}, |x| + t < \varepsilon^{1-\delta_3}; 0 < \delta_1 < \delta_2 < 1, 0 < \delta_3 < 1\}, \quad (2.10)$$

а также их связь с малыми параметрами ρ и ε показаны на следующем рисунке:

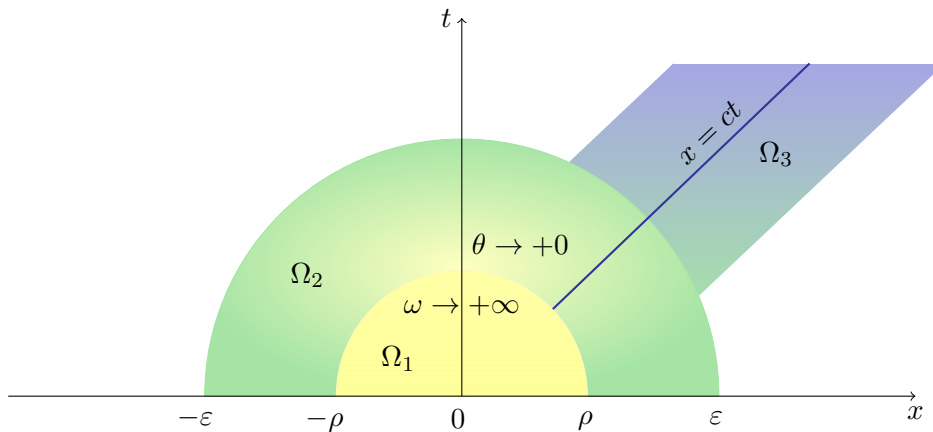


Схема областей Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 , предельные переходы по временным переменным $\omega = t\varepsilon\rho^{-2}$ и $\theta = \omega\mu^2 = t\varepsilon^{-1}$, линия разрыва $x = ct$ решения предельного уравнения.

Следует подчеркнуть, что в действительности области Ω_1 и Ω_2 перекрываются по множеству ненулевой меры и при переходе из одной в другую осуществляется первая перестройка естественного масштаба времени: в силу соотношения $\theta = \omega\mu^2$ “долгая эпоха” $\{0 < \omega < \mu^{-1}\}$ в точности соответствует короткому интервалу $\{0 < \theta < \mu\}$. Поясняя образным языком эту ситуацию, математически выраженную асимптотическими формулами (1.8) и (2.9), можно также сказать, что локализованная в малой области (2.10) сингулярность оказывается весьма далеким будущим, если исследовать решение задачи во внутренних переменных (σ, ω) еще меньшей области (1.5).

Помимо поучительного примера для математической физики установленная структура пространственно-временных масштабов, в соответствии с замечанием Ньютона³ о различии между “абсолютной” и “относительной” бесконечностью, показывает невозможность исключения из задачи малых параметров путем замен переменных. Кроме того, здесь уместно отметить, что подобное явление возникновения иерархии вложенных друг в друга пограничных слоев было обнаружено в 1960-х г. при изучении геострофических потоков [10] и турбулентной конвекции [11].

Теперь, формально подставляя ряд (2.8) в уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2.11)$$

для $w(\eta, \theta, \varepsilon, \rho) \equiv u(\varepsilon\eta, \varepsilon\theta, \varepsilon, \rho)$, получаемое из уравнения (1.1) после замены независимых переменных (2.4), и приравнивая выражения при произведениях одинаковых степеней μ и $\ln \mu$, имеем рекуррентную систему уравнений: для нулевого приближения — в точности то же самое квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial w_{0,0}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi(w_{0,0})}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 w_{0,0}}{\partial \eta^2} = 0, \quad (2.12)$$

для последующих коэффициентов — линейные уравнения

$$\frac{\partial w_{1,p}}{\partial \theta} + \frac{\partial(\varphi'(w_{0,0})w_{1,p})}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 w_{1,p}}{\partial \eta^2} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial w_{m,p}}{\partial \theta} + \frac{\partial(\varphi'(w_{0,0})w_{m,p})}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 w_{m,p}}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \sum_{q=2}^m \frac{\varphi^{(q)}(w_{0,0})}{q!} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_q=m \\ p_1+\dots+p_q=p}} \prod_{i=1}^q w_{m_i,p_i} \right\}. \quad (2.14)$$

3. Существование решений рекуррентной системы уравнений

Сейчас нам необходимо установить существование таких решений уравнений (2.12)–(2.14), чтобы выполнялось асимптотическое условие согласования (2.9).

Согласно [8, § 5, теорема 6] при $\theta > 0$ существует единственное C^∞ -гладкое решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi(\Gamma)}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \eta^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$\Gamma(\eta, 0) = \begin{cases} \nu_0^- = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \nu(\sigma), & \eta < 0, \\ \nu_0^+ = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \nu(\sigma), & \eta \geq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Заметим, что в случае уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} + B \frac{\partial B}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} = 0$$

— уравнения (3.1) с функцией $\varphi(B) = 2^{-1}B^2$, применяя преобразование Коула — Хопфа

$$B(\eta, \theta) = -\frac{2}{\Psi(\eta, \theta)} \frac{\partial \Psi(\eta, \theta)}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2},$$

³“These will be the inconveniencies that will arise, if we do not rightly distinguish between absolute and relative Infinity.” Newton I. The Method of Fluxions and Infinite Series. London: Woodfall, 1736.

соответствующее решение можно найти в явном виде:

$$B(\eta, \theta) = \left[\nu_0^+ \exp\left(\frac{\theta(\nu_0^+)^2 - 2\nu_0^+ \eta}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\nu_0^+ \theta - \eta}{2\sqrt{\theta}}\right) + \nu_0^- \exp\left(\frac{\theta(\nu_0^-)^2 - 2\nu_0^- \eta}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta - \nu_0^- \theta}{2\sqrt{\theta}}\right) \right] \\ \times \left[\exp\left(\frac{\theta(\nu_0^+)^2 - 2\nu_0^+ \eta}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\nu_0^+ \theta - \eta}{2\sqrt{\theta}}\right) + \exp\left(\frac{\theta(\nu_0^-)^2 - 2\nu_0^- \eta}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta - \nu_0^- \theta}{2\sqrt{\theta}}\right) \right]^{-1}, \\ \operatorname{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} \exp(-y^2) dy.$$

Оказывается, что решение задачи (3.1), (3.2), использованное в работе [5, формула (14)] при построении лишь главного приближения решения задачи (1.1), (1.2), удовлетворяет условию согласования $\Gamma(\eta, \theta) = W_{0,0}(\eta, \theta)$ при $\theta \rightarrow +0$ с произвольной степенью точности. Сформулируем строгое утверждение.

Теорема 1. Для решения квазилинейного параболического уравнения (3.1) с разрывной начальной функцией (3.2) равномерно по всем $\eta \in \mathbb{R}$ справедлива асимптотическая формула

$$\Gamma(\eta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{n/2} R_{n,0,0}(z), \quad \theta \rightarrow +0, \quad z = \frac{\eta}{2\sqrt{\theta}}, \quad (3.3)$$

где $R_{n,0,0}(z)$ — это функции (2.1)–(2.3) автомодельной переменной z .

Доказательство. Представим решение задачи Коши (3.1), (3.2) в виде суммы

$$\Gamma(\eta, \theta) = r(\eta, \theta) + s(\eta, \theta) \quad (3.4)$$

заданного формулой (2.1) главного приближения

$$r(\eta, \theta) = R_{0,0,0}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\theta}}\right) = R_{0,0,0}\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}}\right) \quad (3.5)$$

при $|\sigma| + \omega \rightarrow +\infty$ функции $h_0(\sigma, \omega)$ — в свою очередь, нулевого приближения асимптотического решения $\mathcal{H}(\sigma, \omega, \mu)$ — и некоторого малого при $\theta \rightarrow +0$ остатка $s(\eta, \theta)$, вид которого будет сейчас установлен. Непосредственно из формулы (2.1) вытекает, что функция $r(\eta, \theta)$ является решением однородного уравнения теплопроводности с разрывным начальным условием:

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} = 0, \quad r(\eta, 0) = \begin{cases} \nu_0^-, & \eta < 0, \\ \nu_0^+, & \eta \geq 0, \end{cases}$$

в силу чего согласно (3.1) и (3.2) остаток $s(\eta, \theta)$ удовлетворяет неоднородному уравнению теплопроводности с однородным начальным условием:

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial \varphi(\Gamma(\eta, \theta))}{\partial \eta}, \quad s(\eta, 0) = 0.$$

Отсюда, пользуясь стандартной формулой свертки и представлением (3.4), получаем для функции $\Gamma(\eta, \theta)$ интегральное соотношение

$$\Gamma(\eta, \theta) = R_{0,0,0}(z) - \int_0^\theta \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta - \theta')}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\eta - \eta')^2}{4(\theta - \theta')}\right] \frac{\partial \varphi(\Gamma(\eta', \theta'))}{\partial \eta'} d\eta' d\theta',$$

которое после замены переменных интегрирования $\theta' = \theta\beta$, $\eta' = 2y\sqrt{\theta\beta}$ приобретает следующий вид:

$$\Gamma(\eta, \theta) = R_{0,0,0}(z) - \int_0^1 \frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\pi(1-\beta)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\right] \frac{\partial\varphi(\Gamma(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta))}{\partial y} dy d\beta. \quad (3.6)$$

Теперь воспользуемся методом последовательных приближений. На первом шаге применим формулу Тейлора в форме Лагранжа к функции

$$\varphi(\Gamma(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta)) = \varphi\left(r(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta) + s(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta)\right) = \varphi\left(R_{0,0,0}(y) + s(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta)\right), \quad (3.7)$$

учитывая, что $s(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta) \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow +0$. Подставляя очевидный результат

$$\varphi(\Gamma(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta)) = \varphi(R_{0,0,0}(y)) + \varphi'(Q_1)s(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta) = \varphi(R_{0,0,0}(y)) - (\theta\beta)^{1/2}\varphi'(Q_1)s_1(y, \theta\beta),$$

$$Q_1(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta) = R_{0,0,0}(y) + q_1(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta)s(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta), \quad 0 < q_1 < 1,$$

$$s_1(z, \theta) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\beta)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\right] \frac{\partial\varphi(\Gamma(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta))}{\partial y} dy d\beta$$

в подынтегральное выражение в соотношении (3.6), имеем

$$\Gamma(\eta, \theta) = R_{0,0,0}(z) + \theta^{1/2}\Gamma_1(z) + \theta s_2(z, \theta), \quad \theta \rightarrow +0, \quad (3.8)$$

где

$$\Gamma_1(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\right] \frac{d\varphi(R_{0,0,0}(y))}{dy} dy d\beta, \quad (3.9)$$

$$s_2(z, \theta) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\pi(1-\beta)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\right] \frac{\partial[\varphi'(Q_1(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta))s_1(y, \theta\beta)]}{\partial y} dy d\beta.$$

На втором шаге метода снова применим формулу Тейлора — Лагранжа к функции (3.7), пользуясь уже соотношением (3.8), и, подставляя получившийся результат

$$\begin{aligned} \varphi(\Gamma(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta)) &= \varphi(R_{0,0,0}(y)) + \varphi'(R_{0,0,0}(y))s(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta) + \frac{1}{2}\varphi''(Q_2)s^2(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta) \\ &= \varphi(R_{0,0,0}(y)) + (\theta\beta)^{1/2}\varphi'(R_{0,0,0}(y))\Gamma_1(y) + \theta\beta\left[\varphi'(R_{0,0,0}(y))s_2(y, \theta\beta) + \frac{1}{2}\varphi''(Q_2)s_1^2(y, \theta\beta)\right], \end{aligned}$$

$$Q_2(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta) = R_{0,0,0}(y) + q_2(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta)s(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta), \quad 0 < q_2 < 1,$$

в подынтегральное выражение в соотношении (3.6), находим следующее приближение:

$$\Gamma(\eta, \theta) = R_{0,0,0}(z) + \theta^{1/2}\Gamma_1(z) + \theta\Gamma_2(z) - \theta^{3/2}s_3(z, \theta), \quad \theta \rightarrow +0, \quad (3.10)$$

где функция $\Gamma_1(z)$ определяется формулой (3.9),

$$\Gamma_2(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\right] \frac{d[\varphi'(R_{0,0,0}(y))\Gamma_1(y)]}{dy} dy d\beta, \quad (3.11)$$

$$s_3(z, \theta) = \int_0^1 \frac{\beta}{2\sqrt{\pi(1-\beta)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\right]$$

$$\times \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi'(R_{0,0,0}(y)) s_2(y, \theta\beta) + \frac{1}{2} \varphi''(Q_2(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta)) s_1^2(y, \theta\beta) \right] dy d\beta.$$

На третьем шаге, опираясь на новое соотношение (3.10), получаем

$$\Gamma(\eta, \theta) = R_{0,0,0}(z) + \theta^{1/2} \Gamma_1(z) + \theta \Gamma_2(z) + \theta^{3/2} \Gamma_3(z) + O(\theta^2), \quad \theta \rightarrow +0,$$

где функции $\Gamma_1(z)$ и $\Gamma_2(z)$ определяются формулами (3.9) и (3.11) соответственно,

$$\begin{aligned} \Gamma_3(z) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] \\ &\times \frac{d}{dy} \left[\varphi'(R_{0,0,0}(y)) \Gamma_2(y) + \frac{1}{2} \varphi''(R_{0,0,0}(y)) (\Gamma_1(y))^2 \right] dy d\beta. \end{aligned}$$

Продолжая итерации и далее тем же образом, мы приходим к асимптотической формуле

$$\forall N \geq 2 \quad \Gamma(\eta, \theta) = R_{0,0,0}(z) + \sum_{n=1}^{N-1} \theta^{n/2} \Gamma_n(z) + \theta^{N/2} (-1)^N s_N(z, \theta), \quad \theta \rightarrow +0,$$

в которой первый коэффициент $\Gamma_1(z)$ может быть представлен в явном виде свертки (3.9), все последующие выводятся из рекуррентного интегрального соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\beta^{(n-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] \\ &\times \frac{d}{dy} \left[\sum_{q=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(q)}(R_{0,0,0}(y))}{q!} \sum_{i_1+\dots+i_q=n-1} \prod_{\alpha=1}^q \Gamma_{i_\alpha}(y) \right] dy d\beta, \end{aligned} \quad (3.12)$$

а функция $s_N(z, \theta)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} s_N(z, \theta) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\beta^{(N-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] \\ &\times \frac{d}{dy} \left[\sum_{q=1}^{N-2} \frac{\varphi^{(q)}(R_{0,0,0}(y))}{q!} \sum_{i_1+\dots+i_q=N-1} \prod_{\alpha=1}^q s_{i_\alpha}(y, \theta\beta) \right. \\ &\left. + \frac{\varphi^{(N-1)}(Q_{N-1}(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta))}{(N-1)!} s_1^{N-1}(y, \theta\beta) \right] dy d\beta, \end{aligned}$$

$$Q_N(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta) = R_{0,0,0}(y) + q_N(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta) s(2y\sqrt{\theta\beta}, \theta\beta), \quad 0 < q_N < 1.$$

Сопоставляя выражения (3.9) и (3.12) с выражениями (2.2) и (2.3) соответственно, по индукции заключаем, что $\Gamma_n(z) = R_{n,0,0}(z)$ при всех $n \geq 1$; тем самым формула (3.3) установлена.

Учитывая ограниченность функции $R_{0,0,0}(z)$ и экспоненциально быстрое стремление к нулю ее производной при $z \rightarrow \pm\infty$, что следует прямо из формулы (2.1), а также C^∞ -гладкость функции φ , из соотношений (2.2) и (2.3) для остальных коэффициентов получаем равномерную пригодность формулы (3.3).

Теорема 1 доказана.

Сравнивая формальный ряд (2.7) при $m = p = 0$ и условие согласования (2.9) с асимптотической формулой (3.3) из только что доказанной теоремы, находим, что $w_{0,0}(\eta, \theta) = \Gamma(\eta, \theta)$, и можем теперь обратиться к вопросу о существовании подходящих решений линейных уравнений (2.13), (2.14) для следующих коэффициентов ряда (2.8).

Теорема 2. При всех $m \geq 1$ и $0 \leq p \leq m$ существуют C^∞ -гладкие — в открытой полуплоскости внутренних переменных $\{\eta \in \mathbb{R}, \theta > 0\}$ — решения $w_{m,p}(\eta, \theta)$ рекуррентной системы линейных параболических уравнений (2.13) и (2.14) с функцией $w_{0,0}(\eta, \theta) \equiv \Gamma(\eta, \theta)$, удовлетворяющие условиям согласования (2.9), т. е. такие, что при $\theta \rightarrow +0$ равномерно по всем $\eta \in \mathbb{R}$ эти решения разлагаются в асимптотические ряды (2.7).

Доказательство. Дифференцируя по внутренней переменной η уравнение (3.1), которому удовлетворяет главное асимптотическое приближение решения в исследуемой сейчас области, и учитывая начальное условие (3.2), заключаем, что формула

$$G(\eta, \theta) = \frac{1}{\nu_0^+ - \nu_0^-} \frac{\partial \Gamma(\eta, \theta)}{\partial \eta} \tag{3.13}$$

определяет функцию Грина для линейных уравнений (2.13), (2.14), поскольку

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\eta, \theta) f(\eta) d\eta = -\frac{1}{\nu_0^+ - \nu_0^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\eta, 0) f'(\eta) d\eta = f(0)$$

для любой гладкой функции f с компактным носителем; т. е. $G(\eta, +0) = \delta(\eta)$ в смысле обобщенных функций класса \mathcal{D}' . При всех $m \geq 1, 0 \leq p \leq m$ будем искать решения этих уравнений, разлагающиеся в асимптотические ряды (2.7) при $\theta \rightarrow +0$, в виде сумм

$$w_{m,p}(\eta, \theta) = W_{m,p}^{(N)}(\eta, \theta) + r_{m,p}(\eta, \theta), \tag{3.14}$$

где первое слагаемое представляет собой частичную сумму ряда (2.7), а именно при $N \geq 1$

$$W_{m,p}^{(N)}(\eta, \theta) = (-2)^p \theta^{-m/2} \sum_{q=0}^{m-p} \frac{(p+q)!}{p! q!} (\ln \theta)^q \sum_{n=0}^N \theta^{n/2} R_{n,m,p+q}(z), \tag{3.15}$$

а остаток $r_{m,p}(\eta, \theta)$ согласно рекуррентной системе уравнений (2.13), (2.14) должен удовлетворять линейному уравнению

$$\mathcal{L}_2 r_{m,p} = B_{m,p} - \mathcal{L}_2 W_{m,p}^{(N)}, \quad \mathcal{L}_2 r \equiv r_\theta + (\varphi'(\Gamma)r)_\eta - r_{\eta\eta},$$

$B_{m,p}$ — правая часть уравнений (2.13), (2.14), с однородным начальным условием $r_{m,p}(\eta, 0) = 0$. Таким образом, с помощью функции Грина (3.13) находим интегральное выражение

$$r_{m,p}(\eta, \theta) = \int_0^\theta \int_{-\infty}^{+\infty} G(\eta - \eta_1, \theta - \theta_1) \left[B_{m,p}(\eta_1, \theta_1) - \mathcal{L}_2 W_{m,p}^{(N)}(\eta_1, \theta_1) \right] d\eta_1 d\theta_1, \tag{3.16}$$

которое и определяет второе слагаемое в формуле (3.14) для решения $w_{m,p}(\eta, \theta)$, вообще говоря, зависящего теперь от выбираемой длины частичной суммы формального асимптотического ряда $W_{m,p}(\eta, \theta)$.

Из рекуррентной цепочки начальных задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_0}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial \sigma^2} = 0, \quad h_0(\sigma, 0) = \nu(\sigma), \quad \frac{\partial h_1}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial \varphi(h_0)}{\partial \sigma}, \quad h_1(\sigma, 0) = 0, \\ \frac{\partial h_n}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_n}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial E_n}{\partial \sigma}, \quad h_n(\sigma, 0) = 0, \quad E_n = \sum_{q=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(q)}(h_0)}{q!} \sum_{n_1+\dots+n_q=n-1} \prod_{p=1}^q h_{n_p}, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

полученной путем подстановки ряда (1.6) в уравнение (1.1) и последующего приравнивания выражений при одинаковых степенях малого параметра μ , и из асимптотической формулы (1.8)

для $h_n(\sigma, \omega)$ вытекает, что функции $R_{n,m,l}(z)$ удовлетворяют однозначно определенной рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. А поскольку это свойство, благодаря “автомодельной инвариантности”, по существу выраженной третьим и четвертым соотношениями (2.5), не зависит от замен переменных, ряды (2.7) с теми же самыми коэффициентами $R_{n,m,l}(z)$ автоматически являются формальными асимптотическими решениями рекуррентной системы уравнений (2.13), (2.14) в следующем смысле:

$$\left| B_{m,p}(\eta, \theta) - \mathcal{L}_2 W_{m,p}^{(N)}(\eta, \theta) \right| \leq M_1 \theta^{N'} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}, \quad 0 < \theta < \delta',$$

где $M_1 > 0$, $\delta' > 0$, а $N' \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow +\infty$. Тогда из формулы (3.13) для функции Грина $G(\eta, \theta)$ и из интегрального выражения (3.16) для остатка $r_{m,p}(\eta, \theta)$ получаем оценку

$$|r_{m,p}(\eta, \theta)| \leq M_2 \int_0^\theta \theta_1^{N'} \left| \Gamma(+\infty, \theta_1) - \Gamma(-\infty, \theta_1) \right| d\theta_1 \leq M_3 \theta^{N'+1}$$

с некоторыми постоянными $M_2 > 0$ и $M_3 > 0$. Согласно довольно стандартной схеме, которая уже применялась в работе [9, § 6] к построению асимптотик в одной бисингулярной задаче Коши для уравнения (1.1), при достаточно больших N функция (3.14) не зависит от N , поскольку разность v_{N_1, N_2} таких функций при разных N_1 и N_2 удовлетворяет однородному уравнению $\mathcal{L}_2 v_{N_1, N_2} = 0$ и однородному начальному условию $v_{N_1, N_2}(\eta, 0) = 0$, а значит, тождественно равна нулю по теореме единственности [8, § 2, теорема 1]; этот же вывод можно получить прямо из принципа максимума (см. доказательство теоремы 4.2 в [6, гл. VI, § 4]).

Теперь остается только заметить, что из аналитической структуры выражений $W_{m,p}^{(N)}(\eta, \theta)$ — конечных сумм (3.15) с C^∞ -гладкими функциями $R_{n,m,p+q}(z)$ — и интегральной формулы (3.16) для остатков $r_{m,p}(\eta, \theta)$ с C^∞ -гладкой функцией Грина (3.13) вытекает C^∞ -гладкость решений, построенных в виде сумм (3.14).

Теорема 2 полностью доказана.

4. Пригодность асимптотического решения

Напомним, что коэффициенты ряда (2.8) — функции $w_{m,p}(\eta, \theta)$ — строились таким образом, чтобы формально удовлетворялось уравнение (2.11). Тем не менее следует уточнить смысл этого утверждения, другими словами, проверить пригодность асимптотического решения $\mathscr{W}(\eta, \theta, \mu)$. Рассматривая частичную сумму

$$\mathscr{W}_N(\eta, \theta, \mu) = \sum_{m=0}^N \mu^m \sum_{p=0}^m (\ln \mu)^p w_{m,p}(\eta, \theta),$$

пользуясь уравнениями (2.12)–(2.14) и формулой Тейлора в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} \varphi(\mathscr{W}_N) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(w_{0,0}) \left(\sum_{m=1}^N \mu^m \sum_{p=0}^m (\ln \mu)^p w_{m,p} \right)^n \\ &+ \frac{1}{N!} \varphi^{(N)}(w_{0,0} + g(\mathscr{W}_N - w_{0,0})) \left(\sum_{m=1}^N \mu^m \sum_{p=0}^m (\ln \mu)^p w_{m,p} \right)^N, \end{aligned}$$

где $0 < g = g(\eta, \theta, \mu) < 1$, получаем следующее выражение для значения соответствующего уравнению (2.11) квазилинейного оператора:

$$\frac{\partial \mathscr{W}_N(\eta, \theta, \mu)}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi(\mathscr{W}_N(\eta, \theta, \mu))}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \mathscr{W}_N(\eta, \theta, \mu)}{\partial \eta^2} = \mathscr{R}_N(\eta, \theta, \mu), \quad (4.1)$$

$$\mathcal{R}_N = \sum_{m=N}^{N^2} \mu^m \sum_{p=0}^m (\ln \mu)^p \sum_l a_{m,p,l} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\varphi^{(n_{m,p,l})}(\tilde{w}_{m,p,l}) \prod_{i=1}^{n_{m,p,l}} w_{m'_i, p'_i} \right], \quad \sum_{i=1}^{n_{m,p,l}} m'_i = m, \quad (4.2)$$

где $a_{m,p,l}$, $n_{m,p,l}$ — целые числа;

$$\tilde{w}_{m,p,l}(\eta, \theta, \mu) = w_{0,0}(\eta, \theta) + g(\mathcal{W}_N(\eta, \theta, \mu) - w_{0,0}(\eta, \theta)); \quad 0 \leq g < 1;$$

невязка $\mathcal{R}_N(\eta, \theta, \mu)$ представляет собой конечную сумму, число слагаемых которой зависит от N .

Для всех конечных значений переменной η и отделенных от нуля конечных значений переменной θ имеем

$$\forall N \geq 1 \quad \mathcal{R}_N(\eta, \theta, \mu) = O(\mu^N \ln^N \mu), \quad \mu \rightarrow +0.$$

К сожалению, эту замечательную оценку вынуждают скорректировать имеющиеся у функций $w_{m,p}(\eta, \theta)$ особенности при $\theta \rightarrow +0$ и сам вид области Ω_2 , перекрывающейся с областью Ω_1 по ненулевой мере. Из формулы (2.7), условия согласования (2.9) и соотношений (4.2) вытекает асимптотическая оценка

$$\forall N \geq 1 \quad \mathcal{R}_N(\eta, \theta, \mu) = O\left(\theta^{-(N+1)/2} \mu^N \ln^N \mu\right), \quad \theta \rightarrow +0, \quad \mu \rightarrow +0,$$

которая с учетом неравенств

$$\theta^{-(N+1)/2} \mu^N = \theta^{-1/2} \left(\frac{\rho^2}{\varepsilon t}\right)^{N/2} < \frac{1}{\varepsilon \mu^{\delta_2/2}} \left(\frac{\rho^2}{\varepsilon^2 \mu^{\delta_2}}\right)^{N/2} = \frac{\mu^{(2-\delta_2)N}}{\varepsilon \mu^{\delta_2/2}} < (\varepsilon \rho)^{-1/2} \mu^{N/2},$$

справедливых согласно определению (2.10) в интересующей нас переходной области Ω_2 , приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. *Ряд (2.8) является асимптотическим решением квазилинейного уравнения (2.11) в том смысле, что результат подстановки его частичных сумм $\mathcal{W}_N(\eta, \theta, \mu)$ в данное уравнение при всех $N \geq 1$ удовлетворяет оценке*

$$\mathcal{R}_N(\eta, \theta, \mu) = O\left((\varepsilon \rho)^{-1/2} \mu^{N/2} \ln^N \mu\right), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad \rho \rightarrow +0, \quad \mu \rightarrow +0, \quad (4.3)$$

в переходной области Ω_2 .

Заметим, что при подстановке частичных сумм $\mathcal{W}_N(x/\varepsilon, t/\varepsilon, \mu)$ в исходное уравнение (1.1) в оценке невязки появится дополнительный множитель $1/\varepsilon$, что не имеет принципиального значения, поскольку смысл асимптотического решения состоит в последовательном улучшении этой оценки при $N \rightarrow +\infty$.

Другой важный результат состоит в том, что построенное в переходном пограничном слое асимптотическое решение $\mathcal{W}(\eta, \theta, \mu)$ — по крайней мере в главном приближении — уже может быть согласовано с асимптотикой в окрестности ударной волны. Действительно, из [6, гл. VI, § 2, теорема 2.1] известно, что для решения задачи Коши (3.1), (3.2) справедлива оценка

$$\left| \Gamma(\eta, \theta) - \Lambda(\eta - c\theta + \varkappa) \right| \leq M \exp(-\alpha(|\eta| + \theta)) \quad \forall \eta \in \mathbb{R} \quad \forall \theta > 0, \quad (4.4)$$

где $\alpha > 0$, $M > 0$, функция Λ неявно определяется формулами

$$\int_{(\nu_0^+ + \nu_0^-)/2}^{\Lambda(\zeta)} \frac{dv}{\varphi(v) - cv - b} = \zeta, \quad c = \frac{\varphi(\nu_0^+) - \varphi(\nu_0^-)}{\nu_0^+ - \nu_0^-}, \quad b = \frac{\nu_0^+ \varphi(\nu_0^-) - \nu_0^- \varphi(\nu_0^+)}{\nu_0^+ - \nu_0^-}, \quad (4.5)$$

а постоянная фазового сдвига \varkappa — интегральным соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\Lambda(\eta + \varkappa) - \Gamma(\eta, 0)] d\eta = 0 \quad (4.6)$$

в начальный момент времени; в частном случае уравнения Бюргерса, полагая $\varphi(v) = 2^{-1}v^2$ в формулах (4.5) и пользуясь соотношением (4.6), можно легко получить явные выражения

$$\Lambda_{\mathcal{B}}(\zeta) = \frac{\nu_0^+ \exp(\nu^* \zeta) - \nu_0^- \exp(-\nu^* \zeta)}{\exp(\nu^* \zeta) - \exp(-\nu^* \zeta)}, \quad \nu^* = \frac{\nu_0^- - \nu_0^+}{4} > 0, \quad \varkappa_{\mathcal{B}} = 0.$$

Кроме того, в работе [5, п. 5] установлена равномерная по $x \in \mathbb{R}$ справедливость асимптотической формулы

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) = \Lambda\left(\frac{x - ct}{\varepsilon} + \varkappa\right) + O\left(\mu^{1/2} \ln \mu\right), \quad \mu \rightarrow +0, \quad \varepsilon^{1/2} \leq t \leq T = \text{const}, \quad (4.7)$$

означающей, что функция $\Lambda(\eta - c\theta + \varkappa)$ представляет собой главное приближение решения $u(x, t, \varepsilon, \rho)$ задачи Коши (1.1), (1.2) в пограничном слое ширины порядка ε , который возникает вблизи прямой $x = ct$, являющейся линией разрыва обобщенного решения предельной задачи с нулевым значением параметра ε .

5. Выводы

Резюмируем главные результаты проведенного исследования и вытекающие из них выводы.

1. В настоящей работе получено асимптотическое решение квазилинейного параболического уравнения (1.1) с малым параметром ε при старшей производной в переходной области Ω_2 , где завершается формирование порожденной большим начальным градиентом диссипативной волны сжатия и где оба слагаемых в левой части уравнения (1.1) оказываются того же порядка, что и правая часть. Имеющее вид ряда (2.8) и зависящее от внутренних переменных $\eta = x/\varepsilon$ и $\theta = t/\varepsilon$ формальное асимптотическое решение $\mathcal{W}(\eta, \theta, \mu)$ при $\mu = \rho/\varepsilon \rightarrow +0$ найдено методом согласования на основе полученного ранее в меньшей области Ω_1 асимптотического решения $\mathcal{H}(\sigma, \omega, \mu)$, удовлетворяющего начальному условию (1.2) с другим независимым малым параметром ρ . Коэффициенты построенного ряда (2.8) определяются специальными решениями рекуррентной системы параболических уравнений (2.12)–(2.14) с асимптотическими условиями согласования (2.9). Теоремы 1 и 2 гарантируют существование таких решений. При переходе $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ осуществляется первая перестройка естественного масштаба времени.

2. Уже из результата работы [4, теорема 1] о структуре внешнего асимптотического решения стало ясно, что задача (1.1), (1.2) является бисингулярной, т. е. имеет скрытые сингулярности, а выше посредством формулы (2.7) было установлено существование дополнительных особенностей с неограниченно нарастающим порядком, которые по условиям согласования (2.9) необходимо должны иметься у коэффициентов ряда (2.8) при $\theta \rightarrow +0$.

3. Пригодность асимптотического решения $\mathcal{W}(\eta, \theta, \mu)$ понимается в смысле улучшения оценки невязки — значения оператора уравнения (2.11) — при увеличении длины частичной суммы ряда (2.8), что выражено соотношениями (4.1) и (4.3). Кроме того, построенное в переходном пограничном слое асимптотическое решение уже может быть согласовано с асимптотикой диссипативно возмущенной ударной волны.

4. Аппроксимирующая оценка (4.4) и асимптотическая формула (4.7) показывают, что в рассмотренной нами области Ω_2 при $\theta \gg 1$ происходит вторая перестройка естественного масштаба времени: быстрая переменная θ уступает место независимой переменной t , роль которой далее сводится главным образом к сдвигу волнового фронта. Полный набор пространственных и временных масштабов локализации сингулярности указан в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Масштабы локализации и эволюции сингулярности

Область	Ω_1	Ω_2	Ω_3
Пространство	ρ	ε	ε
Время	$\rho^2\varepsilon^{-1}$	ε	$\gtrsim 1$

5. Осуществленное выше согласование построенных в виде бесконечных рядов (1.6) и (2.8) по целым степеням малого параметра μ и его логарифма асимптотических решений $\mathcal{H}(\sigma, \omega, \mu)$ и $\mathcal{W}(\eta, \theta, \mu)$ квазилинейного параболического уравнения (1.1), являющегося в механике сплошных сред классической моделью движения вещества, учитывающей эффекты нелинейности и вязкости, дает детальное представление об эволюции порожденной большим начальным градиентом сингулярности, математическая структура которой (см. табл. 1, 2 и рисунок) определяется иерархией последовательных переходов между имеющими различные пространственно-временные масштабы областями. Выразительно подтверждая принцип *relativus de relativo in relativum* из знаменитых “Математических начал натуральной философии” И. Ньютона, согласованию асимптотических решений соответствует парадоксальный образ: “далекое будущее” — это всего лишь сингулярность, локализованная на масштабах “малых времен”, *sub specie æternitatis*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Poincaré Н.** Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires // Acta Math. 1886. Vol. 8, no. 1. P. 295–344. doi: 10.1007/BF02417092.
2. **Эрдейи А.** Асимптотические разложения. М.: Физматлит, 1962. 127 с.
3. **Захаров С.В.** Особые точки и асимптотики в сингулярной задаче Коши для параболического уравнения с малым параметром // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 5. С. 841–852. doi: 10.31857/S0044466920050166.
4. **Захаров С.В.** Двухпараметрические асимптотики в бисингулярной задаче Коши для параболического уравнения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 94–103.
5. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с большим начальным градиентом и малой вязкостью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 699–706.
6. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
7. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
8. **Олейник О.А.** Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 3. С. 3–73.
9. **Ильин А.М.** Об асимптотике решений одной задачи с малым параметром // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1989. Т. 53, вып. 2. С. 258–275.
10. **Stewartson К.** On almost rigid rotations. Part 2 // J. Fluid Mech. 1966. Vol. 26. P. 131–144. doi: 10.1017/S0022112066001137.
11. **Busse F.H.** On Howard’s upper bound for heat transport by turbulent convection // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 37. P. 457–477. doi: 10.1017/S0022112069000668.

Поступила 18.01.2021

После доработки 14.10.2021

Принята к публикации 18.10.2021

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: svz@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Poincaré H. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. *Acta Math.*, 1886, vol. 8, no. 1, pp. 295–344. doi: 10.1007/BF02417092.
2. Erdélyi A. *Asymptotic expansions*. NY: Dover Publ., 1956, 128 p. ISBN: 0486603180.
3. Zakharov S.V. Singular points and asymptotics in the singular Cauchy problem for the parabolic equation with a small parameter. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 5, pp. 821–832. doi: 10.1134/S0965542520050164.
4. Zakharov S.V. Two-parameter asymptotics in a bisingular Cauchy problem for a parabolic equation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 301, suppl. 1, pp. S191–S200. doi: 10.1134/S0081543818050164.
5. Zakharov S.V. Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a large initial gradient and low viscosity. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 4, pp. 665–672. doi: 10.1134/S0965542510040081.
6. И'ин А.М. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. Providence: AMS, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published in *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach*. Moscow: Nauka Publ., 1989, 336 p.
7. Whitham G.B. *Linear and nonlinear waves*. NY: John Wiley & Sons Inc., 1974, 636 p. ISBN: 0-471-94090-9.
8. Oleinik O.A. Discontinuous solutions of non-linear differential equations. *Am. Math. Soc., Transl., II*, 1963, vol. 26, pp. 95–172. doi: 10.1090/trans2/026/05.
9. И'ин А.М. On the asymptotics of the solution of a problem with a small parameter. *Math. USSR-Izvestiya*, 1990, vol. 34, no. 2, pp. 261–279. doi: 10.1070/IM1990v034n02ABEH000629.
10. Stewartson K. On almost rigid rotations. Part 2. *J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 26, pp. 131–144. doi: 10.1017/S0022112066001137.
11. Busse F.H. On Howard's upper bound for heat transport by turbulent convection. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 37, pp. 457–477. doi: 10.1017/S0022112069000668.

Received January 18, 2021

Revised October 14, 2021

Accepted October 18, 2021

Sergei Viktorovich Zakharov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: svz@imm.uran.ru.

Cite this article as: S.V. Zakharov. Matching of asymptotic solutions of a parabolic equation in the Cauchy problem with the multiscale evolution of a singularity, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 96–110.