ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 517.51

О НАИЛУЧШИХ M-ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ КЛАССА НИКОЛЬСКОГО — БЕСОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев

В статье рассматриваются пространства периодических функций многих переменных, а именно пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, пространство Никольского — Бесова $S^{\bar{r}}_{p,\tau,\theta}B$, а также изучается наилучшее M-членное приближение функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ тригонометрическими полиномами. Установлены точные по порядку оценки наилучших M-членных приближений функций класса Никольского — Бесова $S^{\bar{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ по норме пространства $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ при различных соотношениях между параметрами $p, q, \tau_1, \tau_2, \theta$.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского — Бесова, тригонометрический полином, наилучшее M-членное приближение.

G. Akishev. On the best M-term approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class in the Lorentz space.

We consider spaces of periodic functions of many variables, specifically, the Lorentz space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ and the Nikol'skii–Besov space $S^{\bar{r}}_{p,\tau,\theta}B$, and study the best M-term approximation of a function $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ by trigonometric polynomials. Order-exact estimates for the best M-term approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class $S^{\bar{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ in the norm of the space $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ are derived for different relations between the parameters p, q, τ_1, τ_2, and θ.

Keywords: Lorentz space, Nikol'skii–Besov class, trigonometric polynomial, best M-term approximation.

MSC: 41A10, 41A25, 42A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-7-26

Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^m$ — m–мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{T}^m = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \le x_j < 2\pi;\ j = 1, \ldots, m\}$ — m-мерный куб и $\mathbb{I}^m = [0,1]^m$. Далее $\mathbb{Z}^m$ и $\mathbb{Z}^m_+$ — m–кратное декаротово произведения множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_+$ соответственно.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, которые имеют 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left(\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 \big(f^*(t)\big)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1}dt\right)^{1/\tau}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad 1 \leqslant \tau < \infty,$$

конечна, где $f^*(y)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1, гл. 1, разд. 3, с. 213–216]).

Известно, что $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|^*_{p,\tau} = \left[\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t f^*(y)dy\right)^\tau t^{\tau(\frac{1}{p}-1)-1}dt\right]^{1/\tau} < +\infty, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leqslant \tau < \infty,$$

[1]Работа выполнена в рамках грантового финансирования Министерства образования и науки РК (проект AP08855579).

и эта норма эквивалентна величине $\|f\|_{p,\tau}$ (см. [1, гл. 1, разд. 3, теорема 3.21]), т. е. существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1\|f\|_{p,\tau} \leqslant \|f\|^*_{p,\tau} \leqslant C_2\|f\|_{p,\tau}$.

В случае $\tau = p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$ (см. [2, гл. 1, разд. 1.1, с. 11; 1, гл. 5, разд. 3, с. 216]).

Функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m) = L(\mathbb{T}^m)$ сопоставим ее ряд Фурье

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f) e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}$ и $\langle\overline{y},\overline{x}\rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$. Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\rho(\overline{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbb{Z}^m \colon [2^{s_j-1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1,\dots,m\right\}$, $\overline{s} = (s_1,\dots,s_m), s_j = 0, 1, 2, \dots$, $[a]$ — целая часть числа a.

Для заданного $p \in [1,\infty)$ числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}$ принадлежит l_p, если

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_p} = \Big(\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} |a_{\overline{n}}|^p\Big)^{1/p} < \infty.$$

Далее для вектора $\overline{r} = (r_1,\dots,r_m)$ и нулевого вектора $\overline{0} = (0,\dots,0)$ неравенство $\overline{r} > \overline{0}$ означает, что $r_j > 0$ при всех $j = 1,2,\dots,m$. Пусть $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Рассмотрим пространство всех функций $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, для которых

$$\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta} ||\delta_{\overline{s}}(f)||^{\theta}_{p,\tau} < \infty,$$

где $\mathbb{Z}^m_+$ — множество элементов $\overline{s} = (s_1,\dots,s_m) \in \mathbb{Z}^m$ с неотрицательными координатами и $\mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — множество всех функций $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ таких, что $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j = 0, \quad j = 1,\dots,m.$ Это пространство обозначается символом $S^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B$ и называется пространством Никольского — Бесова. В этом пространстве рассмотрим единичный шар

$$\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B = \left\{f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m) : \left\| \left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_{p,\tau}\right\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_\theta} \leqslant 1\right\}.$$

В случае $\tau = p$ пространство $S^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B$ совпадает с пространством $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$, которое изучали П. И. Лизоркин и С. М. Никольский [3], а также Т. И. Аманов [4].

Для данного вектора $\overline{r} = (r_1,\dots,r_m) > \overline{0}$ положим $\overline{\gamma} = \overline{r}/r_1$ и

$$Q_n^{(\overline{\gamma})} = \bigcup_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle<n} \rho(\overline{s}), \quad T(Q_n^{(\overline{\gamma})}) = \left\{T(\overline{x}) = \sum_{\overline{k}\in Q_n^{(\overline{\gamma})}} b_{\overline{k}} e^{i\langle\overline{k},\overline{x}\rangle}\right\}.$$

Обозначим через $E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{p,\tau}$ наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{(\overline{\gamma})})$, а через $S_n^{(\overline{\gamma})}(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{k}\in Q_n^{(\overline{\gamma})}} a_{\overline{k}}(f) e^{i\langle\overline{k},2\pi\overline{x}\rangle}$ — частичную сумму ряда Фурье функции f (см. [5, с. 134]).

Пусть $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ и $\left\{\bar{k}^{(j)}\right\}_{j=1}^M$ система векторов $\bar{k}^{(j)} = (k_1^{(j)},\dots,k_m^{(j)})$ с целыми координатами. Рассмотрим величину

$$e_M(f)_{p,\tau} = \inf_{\bar{k}^{(j)},b_j} \Big\|f - \sum_{j=1}^M b_j e^{\langle i\bar{k}^{(j)},\bar{x}\rangle}\Big\|_{p,\tau},$$

где b_j — произвольные числа. Величина $e_M(f)_{p,\theta}$ называется *наилучшим M-членным приближением функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$*. Для заданного класса $F \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ положим

$$e_M\,(F)_{p,\tau} = \sup_{f\in F} e_M(f)_{p,\tau}.$$

В случае $\tau = p$ в место $e_M(F)_{p,\tau}$ будем писать $e_M(F)_p$.

Впервые наилучшее M-членное приближение функции $f \in L_2[0,1]$ полиномами по ортонормированной системе определил С. Б. Стечкин [6] и установил критерий абсолютной сходимости ряда Фурье по этой системе. Первые результаты, показавшие преимущество n-членного приближения по отношению к одномерной тригонометрической системе перед линейным приближением тригонометрическими полиномами порядка n, были получены Р. С. Исмагиловым [7].

Дальнейшие важные результаты оценки M-членных приближений функций из различных классов Соболева, Никольского — Бесова, Лизоркина — Трибеля получили Р. С. Исмагилов [7], Э. С. Белинский [8–10], Ю. Маковоз [11], В. Е. Майоров [12], Б. С. Кашин [13], Р. Девор [14], В. Н. Темляков [5;15–18], А. С. Романюк [19;20], Динь Дунг [21], Ван Хэпин и Сун Юншэн [22], Л. К. Дуан и Г. С. Фан [23], М. Хансен и У. Зикель [24;25], С. А. Стасюк [26–28], А. Л. Шидлич [29].

Для оценки M-членных приближений функций класса Никольского — Бесова $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в пространстве $L_q(\mathbb{T}^m)$ использовались два метода: неконструктивный и конструктивный. Первый метод основан на лемме 2.3 из [10] (также см. [11;12]), которая доказана вероятностными рассуждениями. Второй метод разработан В. Н. Темляковым [17;18] на основе жадных алгоритмов. Далее конструктивный метод M-членных приближений по тригонометрической системе был развит Д. Б. Базархановым и В. Н. Темляковым в [30;31]. Теория жадных алгоритмов изложена в монографии В. Н. Темлякова [16]. Обзор результатов по теории приближений функций дан в [32] (также см. библиографию в [5;14]).

Оценки M-членных приближений функций класса Никольского — Бесова в пространствах Лоренца и Лебега с анизотропными нормами исследованы в [33–38].

Основная цель статьи — найти точный порядок величины $e_n\big(S^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\big)_{q,\tau_2}$.

Известно, что для пространств Лоренца имеем включения $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \tau_1, \tau_2 < \infty$ и $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$, если $1 \leqslant \tau_2 < \tau_1 < \infty$ [1, теорема 3.11].

Далее, для неотрицательных величин $A_n(f), B_n(f)$ запись $A_n(f) \asymp B_n(f)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2, значения которых могут зависеть от заданных в условии утверждения параметров, но независящих от функции f и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $C_1A_n(f) \leqslant B_n(f) \leqslant C_2A_n(f)$. Для краткости записи, в место неравенств $A_n(f) \leqslant CB_n(f)$ и $A_n(f) \geqslant CB_n(f)$, иногда будем писать $A_n(f) << B_n(f)$ и $A_n(f) >> B_n(f)$ соответственно.

1. О порядках наилучших M-членных приближений функций классов Никольского — Бесова в пространстве Лоренца

Пусть Ω_M — множество, содержащее не более чем M векторов $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ с целочисленными координатами, а $P(\Omega_M, \bar{x})$ — произвольный тригонометрический полином, состоящий из гармоник с "номерами" из Ω_M. Справедлива

Лемма 1. *Пусть $2 \leqslant q < +\infty$, $1 < \tau < \infty$. Тогда для всякого тригонометрического полинома $P(\Omega_N)$ и для любого натурального числа $M < N$ найдется тригонометрический полином $P(\Omega_M)$, для которого имеет место оценка*

$$\|P(\Omega_N) - P(\Omega_M)\|_{q,\tau} \leq C_1(NM^{-1})^{1/2}\|P(\Omega_N)\|_2,$$

причем $\Omega_M \subset \Omega_N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть число $p > q$. Тогда $\|f\|_{q,\tau} \leq C\|f\|_p$ для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$. Поэтому утверждение леммы 1 следует из леммы 2.3 [10] (см. также [39, p. 438]) . $\square$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1/p - 1/q < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \ldots \leq r_m$. *Если* $r_1 = 1/p$, *то*

$$e_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\right)_{q,\tau_2} \asymp M^{-1/2}\left(\log M\right)^{\nu/\theta'}, \quad M > 1, \tag{1.1}$$

где $\theta' = \theta/(\theta - 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$. Для произвольного натурального числа M найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Приближающий полином $P(\Omega_M, \overline{x})$ будем искать в виде

$$P(\Omega_M, \bar{x}) = \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle < n} \delta_{\overline{s}}(f, \bar{x}) + \sum_{n \leq \langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle < \alpha n} P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x}), \tag{1.2}$$

где $\bar{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m'), \gamma_1' = \gamma_1 = \ldots = \gamma_\nu' = \gamma_\nu = 1$ и $1 < \gamma_j' < \gamma_j, j = \nu + 1, \ldots, m$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = 1, \ldots, m$. В формуле (1.2) полиномы $P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x})$ будут построены для каждого блока $\delta_{\overline{s}}(f, \bar{x})$ согласно лемме 1, а число $\alpha > 1$ будет выбрано в процессе построения. Предположим, что искомый полином построен. Тогда в силу равенства (1.2), свойства нормы получим

$$\begin{aligned} &\|f - P(\Omega_M)\|_{q,\tau_2} \leqslant \\ &\quad C\Bigg(\Big\|\sum_{n \leq \langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle < \alpha n} (\delta_{\overline{s}}(f) - P(\Omega_{N_{\bar{s}}}))\Big\|_{q,\tau_2} + \Big\|\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle \geq \alpha n} \delta_{\overline{s}}(f)\Big\|_{q,\tau_2}\Bigg) \\ &\quad = C\left(J_1(f) + J_2(f)\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Оценим $J_2(f)$. Так как $p < q$, то, пользуясь теоремой 3.1 (см. Г. Акишев. Оценки наилучших приближений функций класса Никольского — Бесова в пространстве Лоренца тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 5–27), выводим

$$J_2(f) \leq C\Bigg(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle \geq \alpha n} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})\tau_2} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Bigg)^{1/\tau_2} = C J_3(f). \tag{1.4}$$

Оценим $J_3(f)$. Пусть $1 \leqslant \theta \leq \tau_2$. Тогда в силу неравенства Йенсена (см. [2, гл. III, п. 3.3.3])

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\beta_2}\Big)^{1/\beta_2} \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\beta_1}\Big)^{1/\beta_1}, \quad 0 < \beta_1 \leq \beta_2 < +\infty,$$

учитывая, что $\gamma_j' \leq \gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$, имеем

$$J_3(f) \leqslant \Bigg(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle \geq \alpha n} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})\theta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Bigg)^{1/\theta} \leqslant \Bigg(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle \geq \alpha n} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle \theta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle (r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})\theta}\Bigg)^{1/\theta}$$

$$\leqslant 2^{-n\alpha(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \Bigg(\sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle \theta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Bigg)^{1/\theta} \tag{1.5}$$

для любой функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ в случае $1 \leqslant \theta \leq \tau_2$.

Пусть $\tau_2 < \theta < \infty$. Тогда, применяя неравенство Гельдера с показателем $\beta = \theta/\tau_2 > 1$, $1/\beta + 1/\beta' = 1$ и лемму Б из [15], получим

$$J_3(f) \leq \Bigg(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}^{'} \rangle \geq \alpha n} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle \theta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta} \Bigg)^{1/\theta} \Bigg(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}^{'} \rangle \geq \alpha n} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})\tau_2 \beta^{'}} \Bigg)^{1/(\tau_2 \beta^{'})}$$

$$\leq C \Bigg(\sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle \theta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta} \Bigg)^{1/\theta} 2^{-n\alpha(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\theta})} \tag{1.6}$$

для любой функции $f \in \mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}} B$ в случае $\tau_2 < \theta < \infty$.

Пусть $\theta = \infty$. Тогда

$$J_3(f) \leq \Bigg(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}^{'} \rangle \geq \alpha n} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})\tau_2} \Bigg)^{1/\tau_2} \sup_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}$$

$$\leqslant C 2^{-n\alpha(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \sup_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1} \tag{1.7}$$

для любой функции $f \in \mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}} B$ в случае $\theta = \infty$. Из неравенств (1.4)–(1.7) следует, что

$$J_2(f) \leq C 2^{-\alpha n(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\theta})_{+}} \tag{1.8}$$

для любой функции $f \in \mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}} B$ для $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, где $a_{+} = \max\{0, a\}$.

Оценим

$$J_1(f) = \Bigg\| \sum_{n \leq \langle \overline{s}, \overline{\gamma}^{'} \rangle < \alpha n} \big(\delta_{\overline{s}}(f) - P(\Omega_{N_{\overline{s}}})\big) \Bigg\|_{q,\tau_2}.$$

По условию теоремы $2 < q < \infty$. Выберем число $q_0 \in (q, \infty)$. Известно, что $L_{q_0}(\mathbb{T}^m) \subset L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_{q,\tau_2} << \|f\|_{q_0}$ для функции $f \in L_{q_0}(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant \tau_2 < \infty$ (см. [1, теорема 3.11]). Так как функция

$$\sum_{n \leq \langle \overline{s}, \overline{\gamma}^{'} \rangle < \alpha n} \big(\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) - P(\Omega_{N_{\overline{s}}}, \overline{x})\big)$$

непрерывна, то она принадлежит пространству $L_{q_0}(\mathbb{T}^m)$ и выполняется неравенство

$$J_1(f) = \Bigg\| \sum_{n \leq \langle \overline{s}, \overline{\gamma}^{'} \rangle < \alpha n} \big(\delta_{\overline{s}}(f) - P(\Omega_{N_{\overline{s}}})\big) \Bigg\|_{q,\tau_2} \leqslant C \Bigg\| \sum_{n \leq \langle \overline{s}, \overline{\gamma}^{'} \rangle < \alpha n} \big(\delta_{\overline{s}}(f) - P(\Omega_{N_{\overline{s}}})\big) \Bigg\|_{q_0},$$

для $q_0 \in (q, \infty)$, $1 \leqslant \tau_2 < \infty$.

Поскольку $2 < q < q_0 < \infty$, то по теореме 1.2 из вышеуказанной статьи автора при $p = \tau = q_0$ отсюда получим, что

$$J_1(f) \leqslant C \Bigg(\sum_{n \leq \langle \overline{s}, \overline{\gamma}^{'} \rangle < \alpha n} \|\delta_{\overline{s}}(f) - P(\Omega_{N_{\overline{s}}})\|_{q_0}^{2} \Bigg)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Теперь, пользуясь леммой 1 и неравенством разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца (см. [33, лемма 6]) из (1.9), получим

$$J_1(f) \leqslant \Bigg(\sum_{n \leq \langle \overline{s}, \overline{\gamma}^{'} \rangle < \alpha n} N_{\overline{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{2}^{2} \Bigg)^{1/2} << \Bigg(\sum_{n \leq \langle \overline{s}, \overline{\gamma}^{'} \rangle < \alpha n} N_{\overline{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p}} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{2} \Bigg)^{1/2} \tag{1.10}$$

в случае $1 < \tau_2 < \infty$, $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_1 < \infty$.

Рассмотрим число $\alpha = \frac{q}{2}\Big(1+\frac{\nu-1}{n}\log n\Big)$. Каждому вектору $\overline{s}\in\mathbb{Z}_{+}^{m}$ удовлетворяющему условию $n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n$, поставим в соответствие число

$$N_{\overline{s}} = \Big[2^{n}n^{\frac{\nu}{\theta}-1}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j r_1}\Big]+1,$$

если $1\le\theta<\infty$, и

$$N_{\overline{s}} = \Big[2^{n}n^{-1}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j r_1}\Big]+1,$$

если $\theta=\infty$, где $[a]$ — целая часть числа a.

Для $1<\theta<\infty$, применяя неравенство Гельдера с показателями θ, θ', $1/\theta+1/\theta'=1$ и [15, лемма Б], будем иметь

$$\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}N_{\overline{s}} \leqslant n^{m}+2^{n}n^{\frac{\nu}{\theta}-1}\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_{+}^{m}}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta}\Big(\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta'}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j r_1\theta'}\Big)^{1/\theta'}$$

$$<< n^{m}+2^{n}n^{\frac{\nu}{\theta}-1}n^{\frac{\nu}{\theta'}}\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_{+}^{m}}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta} << M$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B$.

Если $\theta=1$, то, учитывая, что $r_1\leqslant r_j,\ j=1,\ldots,m$, выводим

$$\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle\,<\,\alpha n}N_{\overline{s}} \leqslant n^{m}+2^{n}n^{\nu-1}\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j r_1}$$

$$\leqslant n^{m}+2^{n}n^{\nu-1}\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_{+}^{m}}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1} << M$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B$.

Если $\theta=\infty$, то по определению чисел $N_{\overline{s}}$ и согласно лемме 3 из [40] получим

$$\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}N_{\overline{s}} \leqslant n^{m}+2^{n}n^{-1}\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j r_1}$$

$$\leqslant n^{m}+2^{n}n^{-1}\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}\sup_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_{+}^{m}}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}$$

$$<< n^{m}+2^{n}n^{\nu-1} << M$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}_{p,\tau_1,\infty}^{\overline{r}}B$.

Таким образом, $\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}N_{\overline{s}} << M$ для любой функции $f\in\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$. Подставив значения чисел $N_{\overline{s}}$ в (1.10) и учитывая, что $r_1=1/p$, имеем

$$J_1(f)\le 2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{\theta}-1)}\Big(\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j r_1}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}\Big)^{1/2}. \qquad (1.11)$$

Теперь, применяя неравенство Гельдера для суммы и лемму Б [15], выводим

$$\sum_{n\leq\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<\alpha n}\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_1}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}<<\Bigg(\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle\theta}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Bigg)^{1/\theta}\Bigg(\sum_{n\leq\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<\alpha n}2^{-\langle\bar{s},\bar{r}\rangle\theta'}\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_1\theta'}\Bigg)^{1/\theta'}$$

$$\leq C\Bigg(\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle\theta}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Bigg)^{1/\theta}n^{\frac{\nu}{\theta'}}. \tag{1.12}$$

Из неравенств (1.11) и (1.12) следует, что

$$J_1(f)<<\ 2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu}{\theta}}n^{\frac{\nu+1}{2}}. \tag{1.13}$$

По выбору $\alpha=\dfrac{q}{2}\Big(1+\dfrac{\nu-1}{n}\log n\Big)$. Значит, при $r_1=1/p$ имеем

$$2^{-n\alpha(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}=2^{-n\frac{\alpha}{q}}=2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu-1}{2}}.$$

Поэтому из (1.8) получим

$$J_2(f)<<\ 2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu-1}{2}}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})_+} \tag{1.14}$$

при $r_1=1/p$.

Если $1/\tau_2-1/\theta\leqslant 0$, то (1.14) имеет вид $J_2(f)<<\ 2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu-1}{2}}$. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu}{\theta}}n^{\frac{\nu+1}{2}}}{2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu-1}{2}}}=n^{\nu(1-\frac{1}{\theta})}\geqslant 1.$$

Следовательно,

$$J_2(f)<<\ 2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu}{\theta}}n^{\frac{\nu+1}{2}} \tag{1.15}$$

при $1/\tau_2-1/\theta\leqslant 0$, $r_1=1/p$, $1<\tau_2<\infty$, $1<p<2<q<\infty$, $1<\tau_1<\infty$.

Если $1/\tau_2-1/\theta>0$, то (1.14) имеет вид

$$J_2(f)<<\ 2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu-1}{2}}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{1.16}$$

С другой стороны, поскольку $1<\tau_2<\infty$ и $1/\tau_2-1/\theta>0$, то

$$\frac{2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu}{\theta}}n^{\frac{\nu+1}{2}}}{2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu-1}{2}}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})}}=n^{\nu(1-\frac{1}{\tau_2})+\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta}}\geqslant 1.$$

Таким образом, из (1.16) получим

$$J_2(f)<<\ 2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu}{\theta}}n^{\frac{\nu+1}{2}} \tag{1.17}$$

при $1/\tau_2-1/\theta>0$, $r_1=1/p$, $1<\tau_2<\infty$, $1<p<2<q<\infty$, $1<\tau_1<\infty$.

Теперь из неравенств (1.3), (1.13), (1.15) и (1.17) следует, что

$$\|f-P(\Omega_M)\|_{q,\tau_2}\leqslant\ C2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu}{\theta}}n^{\frac{\nu+1}{2}}$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}^{\bar{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ в случае $r_1=1/p$, $1<\tau_2<\infty$, $1<p<2<q<\infty$, $1<\tau_1<\infty$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$.

Поэтому, учитывая, что $M\asymp 2^nn^{\nu-1}$, отсюда выводим

$$e_M\left(\mathbb{S}^{\bar{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\right)_{q,\tau_2}<<\ 2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{\nu}{\theta}}n^{\frac{\nu+1}{2}}<<M^{-\frac{1}{2}}(\log M)^{\nu(1-\frac{1}{\theta})}$$

в случае $r_1=1/p$ при условиях $1<p<2<q<\infty$, $1<\tau_1,\tau_2<\infty$ и $1\leqslant\theta\leqslant\infty$.

Оценка сверху в (1.1) доказана. $\square$

Докажем оценку снизу величины $e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\big)_{q,\tau_2}$. Выберем число $q_0 \in (2, q)$. Тогда известно, что $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{q_0}(\mathbb{T}^m)$ — пространство Лебега и $\|f\|_{q_0} \le C\|f\|_{q,\tau_2}$ для функции $f \in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$. Значит,

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\big)_{q,\tau_2} \ge Ce_M\big(S^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\big)_{q_0}. \tag{1.18}$$

для $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ и $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$.

Так как $1 < p < 2$, то существует число $p_0 \in (1, p)$. Тогда согласно неравенству Джексона — Никольского для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца [33, лемма 6] имеем

$$\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1} \le C\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(r_j+\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0}, \quad 1 < \tau_1 < \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1} << \sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(r_j+1/p_0-1/p)\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p_0}.$$

Таким образом, $S^{\overline{\rho}}_{p_0,\theta}B \subset S^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$, где $\overline{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$, $\rho_j = r_j + 1/p_0 - 1/p$, $1 < p_0 < p < 2$, $1 < \tau_1 < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. Значит, из (1.18) будем иметь

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\big)_{q,\tau_2} \ge Ce_M\big(S^{\overline{\rho}}_{p_0,\theta}B\big)_{q_0}. \tag{1.19}$$

В [19] доказано, что

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{\rho}}_{p_0,\theta}B\big)_{q_0} >> M^{-1/2}(\log^{\nu} M)^{1-1/\theta} \tag{1.20}$$

в случае $\rho_1 = 1/p_0$ при условиях $1 < p_0 < 2 < q_0 < \infty$. Так как $\rho_1 = r_1 + 1/p_0 - 1/p$, то из неравенств (1.19) и (1.20) получим, что

$$e_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\right)_{q,\tau_2} >> M^{-1/2}(\log^{\nu} M)^{1-1/\theta}$$

при $r_1 = 1/p$ и $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_2 < \infty$, $1 < \tau_1 < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. □

Теорема 2. *Пусть $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1/p - 1/q < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$.*

Если $r_1 > 1/p$, то

$$e_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\right)_{q,\tau_2} \asymp M^{-\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad M > 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$. Для произвольного натурального числа M найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Приближающий полином $P(\Omega_M, \overline{x})$ будем искать в виде (1.2).

Если $2 \le \theta \le \infty$, то положим

$$N_{\bar{s}} = \left[2^{n(r_1-\frac{1}{p}+1)}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{p})}\right] + 1, \tag{1.21}$$

где $[a]$ — целая часть числа a. Тогда по лемме Б [15] имеем

$$\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} N_{\bar{s}} \le n^m + 2^{n(r_1-\frac{1}{p_1}+1)}\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{p})} << \left(n^m + 2^n n^{\nu-1}\right) \asymp M.$$

Подставляя в (1.10) вместо чисел $N_{\bar{s}}$ их значения (1.21) и пользуясь неравенством Гельдера с показателями $\beta = \theta/2$, $1/\beta + 1/\beta' = 1$ и леммой Б из [15], получим

$$J_1(f) << \ 2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{p}+1)}\Bigg(\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}2^{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\frac{2}{p}}2^{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{p})}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^2\Bigg)^{1/2}$$

$$<< \ 2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{p}+1)}\Bigg(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^\theta\Bigg)^{1/\theta}\Bigg(\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{p})\beta'}\Bigg)^{1/(2\beta')}$$

$$<< \ 2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{p}+1)}\Bigg(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^\theta\Bigg)^{1/\theta}2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{p_1})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Таким образом,

$$J_1(f) << \ 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.22}$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B$ в случае $r_1>1/p$ и $2\leq\theta<\infty$ при условиях $1<p<2<q<\infty$ и $1<\tau_2<\infty$.

Если $\theta=\infty$, то по определению пространства $S_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B$ и лемме Б из [15] выводим

$$J_1(f) << 2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{p}+1)}\Bigg(\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{p})}\Bigg)^{1/2}\sup_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}$$

$$<< 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)\frac{1}{2}}$$

в случае $r_1>1/p$ при условиях $1<p<2<q<\infty$ и $1<\tau_2<\infty$.

Значит, отсюда и из (1.22) следует, что

$$J_1(f) << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.23}$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B$ в случае $r_1>1/p$ и $2\leqslant\theta\leqslant\infty$ при условиях $1<p<2<q<\infty$ и $1<\tau_2<\infty$.

Выберем число

$$\alpha=\frac{r_1-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{2}}{r_1-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}}.$$

Тогда из (1.8) следует, что

$$J_2(f) << 2^{-n\alpha(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})_+} << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{1.24}$$

Если $1/\tau_2-1/\theta\leqslant 0$, то $(1/\tau_2-1/\theta)_+=0$. Поэтому из (1.24) получим $J_2(f) << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}$ для $2\leqslant\theta\leqslant\infty$ и $\theta\leqslant\tau_2$. Так как $1/2-1/\theta\geqslant 0$, то отсюда и из (1.23) следует, что

$$J_1(f)+J_2(f) << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.25}$$

в случае $r_1>1/p$ при $2\leqslant\theta\leqslant\tau_2<\infty$.

Если $1/\tau_2-1/\theta>0$, то из (1.24) имеем $J_2(f) << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})}$. Если $2\leqslant\tau_2<\theta\leqslant\infty$, то из (1.23) и (1.25) следует, что

$$J_1(f)+J_2(f) << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.26}$$

в случае $r_1>1/p$, $1<p<2<q<\infty$.

Если $1 < \tau_2 < 2 \leqslant \theta \leqslant \infty$, то выберем число

$$\alpha = \frac{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} + (\nu-1)\Big(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{2}\Big)\frac{\log n}{n}}{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}. \tag{1.27}$$

Тогда

$$2^{-n\alpha(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} = 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{-(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{2})}.$$

Поэтому из (1.8) следует, что

$$J_2(f) << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{-(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})} = C2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.28}$$

в случае $1 < \tau_2 < 2 \leq \theta \leqslant \infty$, $r_1 > 1/p$.

Теперь из (1.23) и (1.28) получим

$$J_1(f) + J_2(f) << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.29}$$

для $1 < \tau_2 < 2 \leq \theta \leqslant \infty$, $r_1 > 1/p$.

Таким образом,

$$J_1(f) + J_2(f) << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.30}$$

для $2 \leq \theta \leqslant \infty$ и $r_1 > 1/p$, $1 < \tau_2 < \infty$, $1 < p < 2 < q < \infty$.

Теперь из неравенств (1.3) и (1.30) следует, что

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{q,\tau_2} << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

для любой функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ в случае $r_1 > 1/p$ и $2 \leq \theta \leqslant \infty$, $1 < \tau_2 < \infty$, $1 < p < 2 < q < \infty$. Следовательно,

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\right)_{q,\tau_2} << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

в случае $r_1 > 1/p$ и $2 \leq \theta \leq \infty$ при условиях $1 < p < 2 < q < \infty$ и $1 < \tau_2 < \infty$.

Если $1 \leq \theta < 2$ и $r_1 > 1/p$, то положим

$$\alpha = \frac{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} - (\nu-1)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\Big)\frac{\log n}{n}}{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, \tag{1.31}$$

$$N_{\overline{s}} = \left[2^{n(r_1-\frac{1}{p}+1)}n^{\nu-1}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{p})}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}\right] + 1.$$

В этом случае, учитывая, что $f \in S^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ и $\gamma'_j \leq \gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$, $r_1 - 1/p > 0$, получим

$$\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} N_{\overline{s}} \leq n^m + 2^{n(r_1-\frac{1}{p}+1)}n^{\nu-1}\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{p})}$$

$$<< n^m + 2^{n(r_1-\frac{1}{p}+1)}n^{\nu-1}2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1} << \left(n^m + 2^n n^{\nu-1}\right) \asymp M.$$

Подставив в формулу (1.10) значения $N_{\overline{s}}$, мы имеем

$$J_1(f) << 2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{p}+1)}n^{-\frac{\nu-1}{2}}\left(\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1+\frac{1}{p})}2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{2-\theta}_{p,\tau_1}\right)^{1/2}$$

$$= C2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{p}+1)}n^{-\frac{\nu-1}{2}}\Bigg(\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{p})}(2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1})^{2-\theta}\Bigg)^{1/2}. \tag{1.32}$$

Так как $1\le\theta<2$, то $\beta=\theta/(2-\theta)>1$. Поэтому, применяя к сумме в правой части формулы (1.32) неравенство Гельдера при $1/\beta+1/\beta'=1$ и лемму Б из [15], выводим

$$J_1(f)<<2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{p}+1)}n^{-\frac{\nu-1}{2}}\Bigg(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Bigg)^{1/(2\beta)}\Bigg(\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{p})\beta'}\Bigg)^{1/(2\beta')}$$

$$<<2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{p}+1)}n^{-\frac{\nu-1}{2}}\Bigg(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Bigg)^{1/\theta-1/2}2^{-n(r_1-\frac{1}{p})\frac{1}{2}}n^{\frac{\nu-1}{2\beta'}}.$$

Значит,

$$J_1(f)<<2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.33}$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B$ в случае $1\le\theta<2$ и $r_1>1/p$ при условиях $1<p<2<q<\infty$ и $1<\tau_2<\infty$.

По выбору α (см. (1.31)): $2^{-n\alpha(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}=2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$. Поэтому из (1.8) получим

$$J_2(f)<<2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Если $1/\tau_2-1/\theta\leqslant0$, то отсюда следует, что

$$J_2(f)<<2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

в случае $1\leqslant\theta\leqslant2$, $\theta\leqslant\tau_2<\infty$, $r_1>1/p$.

Если $1/\tau_2-1/\theta>0$, то $(1/\tau_2-1/\theta)_+=1/\tau_2-1/\theta$. Для этого случая выберем число, аналогичное (1.27). Тогда

$$2^{-n\alpha(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}=2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{-(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{2})}.$$

Поэтому из формулы (1.8) получим

$$J_2(f)<<2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{-(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})}=C2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

в случае $1/\tau_2-1/\theta>0$, т. е. $1<\tau_2<\theta\leqslant2$. Таким образом, для $1\leqslant\theta\leqslant2$ доказано неравенство

$$J_2(f)<<2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.34}$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B$. Теперь из (1.33) и (1.34) получим

$$J_1(f)+J_2(f)<<2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.35}$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B$, в случае $1\leqslant\theta\leqslant2$. Из неравенств (1.3) и (1.35) следует, что

$$\|f-P(\Omega_M)\|_{q,\tau_2}<<2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{-(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B$ в случае $1\leqslant\theta\leqslant2$ и $r_1>1/p$ при условиях $1<p<2<q<\infty$ и $1<\tau_2<\infty$. Значит,

$$e_M\big(\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\overline{r}}B\big)_{q,\tau_2}<<2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

в случае $1\leqslant\theta<2$ и $r_1>1/p$ при условиях $1<p<2<q<\infty$ и $1<\tau_2<\infty$.

Таким образом,

$$e_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\right)_{q,\tau_2} << 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}(\log^{\nu-1}M)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}(\log^{\nu-1}M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}$$

в случае $r_1 > 1/p$ при условиях $1 < p < 2 < q < \infty$ и $1 < \tau_2 < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 < \tau_1 < \infty$.

Оценки сверху доказаны. $\square$

Докажем оценки снизу величины $e_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{q,\tau_2}$. В [19] доказано, что

$$e_M\left(\mathbb{S}^{\overline{\rho}}_{p_0,\theta}B\right)_{q_0} >> M^{-(\rho_1-\frac{1}{p_0}+\frac{1}{2})}(\log^{\nu-1}M)^{-(\rho_1-\frac{1}{p_0}+\frac{1}{2})}(\log^{\nu-1}M)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.36}$$

в случае $\rho_1 > 1/p_0$ при условиях $1 < p_0 < 2 < q_0 < \infty$. Так как $\rho_1 = r_1 + 1/p_0 - 1/p$, то из неравенств (1.19) и (1.36) получим, что

$$e_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B\right)_{q,\tau_2} >> M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}(\log^{\nu-1}M)^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}(\log^{\nu-1}M)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

при $r_1 > 1/p$ и $1 < \tau_2 < \infty$, $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_1 < \infty$. $\square$

Рассмотрим случай $p = 2$. В теореме 2 нижняя оценка величины $e_M(S^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{q,\tau_2}$ верна и в случае $p = 2$. Однако, в следующей теореме содержится более точная оценка.

Теорема 3. *Пусть* $p = 2 < q < \infty$, $2 \leqslant \tau_1 < \infty$, $1 < \tau_2 < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1/2 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$. *Тогда*

$$e_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\tau_1,\theta}B\right)_{q,\tau_2} \asymp M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1}M\right)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}(\log M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}}, \quad M > 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $2 < \tau_1 < \infty$, то пользуясь леммой 1 и неравенством разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца из леммы 3.1 (см. Г. Акишев. Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 3–21), с учетом неравенства (1.9) получим

$$J_1(f) \leqslant \left(\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} N^{-1}_{\overline{s}}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j}\left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|_2^2\right)^{1/2}$$

$$<< \left(\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} N^{-1}_{\overline{s}}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j}\left(\sum_{j=1}^{m}s_j\right)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1})2}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^2_{2,\tau_1}\right)^{1/2}. \tag{1.37}$$

Если $2 \leqslant \theta \leqslant \infty$, то числа $N_{\overline{s}}$ определим по формуле (1.21). Эти значения $N_{\overline{s}}$, подставляя в (1.37), выводим

$$J_1(f) << 2^{-\frac{n}{2}(r_1+\frac{1}{2})}\left(\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{2})}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j}\left(\sum_{j=1}^{m}s_j\right)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1})2}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^2_{2,\tau_1}\right)^{1/2}$$

$$<< 2^{-\frac{n}{2}(r_1+\frac{1}{2})}\left(\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1+\frac{1}{2})}\left(\sum_{j=1}^{m}s_j\right)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1})2}\left(\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}\right)^2\left(2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{2,\tau_1}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{1.38}$$

Если $2 \leqslant \theta < \infty$, то, применяя неравенство Гельдера при $\beta = \theta/2$, $1/\beta + 1/\beta' = 1$ и пользуясь леммой Б [15], из формулы (1.38), имеем

$$J_1(f) << 2^{-\frac{n}{2}(r_1+\frac{1}{2})}\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{2,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta}\Bigg(\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{2})\beta'}\Big(\sum_{j=1}^{m}s_j\Big)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1})2\beta'}\Bigg)^{1/(2\beta')}$$

$$<< \; 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}}\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{2,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta}$$

в случае $2\leqslant\theta<\infty$, $2<\tau_1<\infty$.

Если $\theta=\infty$, то по определению класса $S^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ и лемме Б [15] получим

$$J_1(f) << 2^{-\frac{n}{2}(r_1+\frac{1}{2})}\Bigg(\sum_{n\leq\langle\overline{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{2})}\Big(\sum_{j=1}^{m}s_j\Big)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1})2}\Bigg)^{1/2}\sup_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{2,\tau_1}$$

$$<< \; 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}}\sup_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{2,\tau_1}$$

в случае $2<\tau_1<\infty$.

Таким образом,

$$J_1(f) << 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}} \tag{1.39}$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\tau_1,\theta}B$ в случае $2\leqslant\theta\leqslant\infty$ и $2<\tau_1<\infty$.

Пусть $\tau_1=2$. Тогда в (1.9) подставляя значения чисел $N_{\bar{s}}$ определенные по формуле (1.21) и повторяя предудущие рассуждения можно убедиться, что

$$J_1(f) << \; 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{1.40}$$

для $2\leqslant\theta\leqslant\infty$.

Если $1/\tau_2-1/\theta\leqslant 0$, то из (1.8) следует, что

$$J_2(f) << \; 2^{-n\alpha(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}.$$

Выберем число $\alpha=\dfrac{r_1}{r_1+1/q-1/2}$. Тогда $J_2(f)<<2^{-nr_1}$. Поэтому, учитывая, что $2\leqslant\theta\leqslant\infty$ и $2\leqslant\tau_1<\infty$, отсюда и из (1.39), (1.40) имеем

$$J_1(f)+J_2(f) << \; 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}} \tag{1.41}$$

для любой функции $f\in\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\tau_1,\theta}B$ в случае $2\leqslant\theta\leqslant\tau_2\leqslant\infty$ и $2\leqslant\tau_1<\infty$.

Если $1/\tau_2-1/\theta>0$, то, учитывая, что $\alpha=r_1/(r_1+1/q-1/2)$, из (1.8) выводим

$$J_2(f) << 2^{-n\alpha(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{1.42}$$

Если $2\leqslant\theta\leqslant\infty$, то из (1.38), (1.39) и (1.42) следует, что

$$J_1(f)+J_2(f) << \; 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}} \tag{1.43}$$

для $2\leqslant\tau_1<\infty$.

Если $1<\tau_2<2\leqslant\theta\leqslant\infty$, то выбирая число

$$\alpha=\frac{r_1+(\nu-1)\Big(\dfrac{1}{\tau_2}-\dfrac{1}{2}\Big)\dfrac{\log n}{n}}{r_1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{q}}, \tag{1.44}$$

из (1.42), (1.39) и (1.40) получим

$$J_1(f)+J_2(f) << 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}} \tag{1.45}$$

для $2 \leqslant \tau_1 < \infty$. Теперь из неравенств (1.3), (1.41), (1.43), (1.45) и соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ следует, что

$$e_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\tau_1,\theta}B\right)_{q,\tau_2} \leqslant C_2 M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} (\log M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}}$$

для $2 \leqslant \theta \leqslant \infty$ и $2 \leqslant \tau_1 < \infty$.

Пусть $1 \leqslant \theta < 2$ и $r_1 > 1/2$. Положим

$$N_{\bar{s}} = \left[2^{n(r_1+\frac{1}{2})} n^{\nu-1} 2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{2})} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{2,\tau_1}\right]+1.$$

Эти значения $N_{\bar{s}}$ подставляя в (1.37) имеем

$$J_1(f) << \ 2^{-\frac{n}{2}(r_1+\frac{1}{2})} n^{-\frac{\nu-1}{2}} \Bigg(\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{2})} 2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j}\Big(\sum_{j=1}^{m} s_j\Big)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1})2} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{2-\theta}_{2,\tau_1}\Bigg)^{1/2}$$

$$<< \ 2^{-\frac{n}{2}(r_1+\frac{1}{2})} n^{-\frac{\nu-1}{2}} \Bigg(\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{2})} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j}\Big(\sum_{j=1}^{m} s_j\Big)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1})2} 2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle 2}(2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\ \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{2,\tau_1})^{2-\theta}\Bigg)^{1/2}. \tag{1.46}$$

Так как $1 \le \theta < 2$, то $\beta = \theta/(2-\theta) > 1$. Поэтому, применяя к сумме в правой части формулы (1.46) неравенство Гельдера при $1/\beta + 1/\beta' = 1$ и лемму Б из [15], получим

$$J_1(f) << \ 2^{-\frac{n}{2}(r_1+\frac{1}{2})} n^{-\frac{\nu-1}{2}} \Bigg(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{2,\tau_1}\Bigg)^{1/(2\beta)}$$

$$\times\Bigg(\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n} 2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{2})\beta'}\Big(\sum_{j=1}^{m} s_j\Big)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1})2\beta'}\Bigg)^{1/(2\beta')}$$

$$<< \ 2^{-\frac{n}{2}(r_1+\frac{1}{2})} n^{-\frac{\nu-1}{2}} \Bigg(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{2,\tau_1}\Bigg)^{1/\theta-1/2} 2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{2})} n^{\frac{\nu-1}{2\beta'}} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}}.$$

Таким образом,

$$J_1(f) << 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}} \tag{1.47}$$

для любой функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ в случае $1 \le \theta < 2$ и $r_1 > 1/2$ при условиях $p = 2 < q < \infty$ и $1 < \tau_2 < \infty$, $2 < \tau_1 < \infty$.

Если $\tau_1 = 2$, то (1.46) принимает следующий вид:

$$J_1(f) << \ 2^{-\frac{n}{2}(r_1+\frac{1}{2})} n^{-\frac{\nu-1}{2}} \Bigg(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{2,2}\Bigg)^{1/(2\beta)} \Bigg(\sum_{n\le\langle\overline{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n} 2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle(r_1-\frac{1}{2})\beta'}\Bigg)^{1/(2\beta')}$$

$$<< \ 2^{-\frac{n}{2}(r_1+\frac{1}{2})} n^{-\frac{\nu-1}{2}} \Bigg(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{2,2}\Bigg)^{1/\theta-1/2} 2^{-\frac{n}{2}(r_1-\frac{1}{2})} n^{\frac{\nu-1}{2\beta'}}.$$

Следовательно, неравенство (1.47) верно и в случае $\tau_1 = 2$.

Теперь оценим $J_2(f)$. Для $p = 2$ из (1.8) имеем

$$J_2(f) << 2^{-n\alpha(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{1.48}$$

Если $1/\tau_2 - 1/\theta \leqslant 0$, то выбирая число

$$\alpha = \frac{r_1 - (\nu-1)\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\theta}\Big)\dfrac{\log n}{n}}{r_1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{q}},$$

и учитывая, что $2 \leqslant \tau_1 < \infty$, из неравенств (1.47) и (1.48) получим

$$J_1(f) + J_2(f) << 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}} \tag{1.49}$$

для любой функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\tau_1,\theta}B$.

Если $1/\tau_2 - 1/\theta > 0$, то выбирая число α, аналогичное (1.44), можно убедиться, в справедливости (1.49). Теперь из неравенств (1.3), (1.49) и соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ следует, что

$$e_M\left(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\tau_1,\theta}B\right)_{q,\tau_2} \leqslant C_2 M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} (\log M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}}$$

в случае $1 \leqslant \theta < 2$. Оценка сверху доказана. □

Докажем оценку снизу величины $e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\tau_1,\theta}B\big)_{q,\tau_2}$. Если $r_1 = \ldots = r_m$ т.е. $\nu = m$, то $S^{r_1}_{2,\tau_1,\theta}B \subset S^{\overline{r}}_{2,\tau_1,\theta}B$. Поэтому оценку снизу достаточно доказать для $\nu = m$. Для краткости записи введем обозначения

$$\varphi_{s_j}(\overline{x}) = \prod_{k\in\{1,2,\ldots m\}\setminus\{j\}} e^{i2^{s_k-1}2\pi x_k} \sum_{\nu_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} (\nu_j - 2^{s_j-1}+1)^{-\frac{1}{2}} \cos \nu_j 2\pi x_j,$$

для $j = 1,\ldots,m$ и $\Im_{\overline{s}}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^m \varphi_{s_j}(\overline{x})$, $\overline{s} = (s_1,\ldots,s_m) \in \mathbb{Z}^m_+$. Согласно формуле (19) (см. Г. Акишев. О точности неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в обобщенном пространстве Лоренца // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, No 2. С. 9–20)

$$\|\Im_{\overline{s}}\|_{2,\tau_1} \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^m s_j\Big)^{1/\tau_1}, \quad 1 < \tau_1 < \infty. \tag{1.50}$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(\overline{x}) = l^{-\frac{1}{\tau_1}-\frac{m-1}{\theta}} \sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{1}\rangle<l+m} 2^{-\langle\overline{s},\overline{1}\rangle r_1}\Im_{\overline{s}}(\overline{x}),$$

где $l \in \mathbb{N}$ такое, что $M \asymp 2^l l^{m-1}$.

В силу непрерывности функция $f_0 \in L_{2,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$, $1 < \tau_1 < \infty$. Пользуясь неравенством (1.50) получим

$$\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle r_1\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f_0)\|^{\theta}_{2,\tau_1}\Big)^{1/\theta} \leqslant C l^{-\frac{1}{\tau_1}-\frac{m-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{1}\rangle<l+m}\Big(\sum_{j=1}^m s_j\Big)^{\frac{\theta}{\tau_1}}\Bigg)^{1/\theta}$$

$$\leqslant C l^{-\frac{1}{\tau_1}-\frac{m-1}{\theta}}(l+m)^{\frac{1}{\tau_1}}\Bigg(\sum_{0<\langle\overline{s},\overline{1}\rangle<l+m} 1\Bigg)^{1/\theta} \leqslant C l^{-\frac{1}{\tau_1}-\frac{m-1}{\theta}}(l+m)^{\frac{1}{\tau_1}}(l+m)^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_0$$

для $l \geqslant m$. Следовательно, функция $F_0 = C_0^{-1} f_0 \in S^{r_1}_{2,\tau_1,\theta}B$.

Рассмотрим полиномы

$$\upsilon(\overline{x}) = \sum_{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle\leqslant l}\Im_{\overline{s}}(\overline{x}), \quad u(\overline{x}) = \sum_{\substack{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle\leqslant l,\\ \rho(\overline{s})\cap\Omega_M\neq\varnothing}}\Im_{\overline{s}}(\overline{x}).$$

Положим $w(\overline{x}) = v(\overline{x}) - u(\overline{x})$. Тогда функция $w(\overline{x})$ не содержит слагаемых с индексами из множества Ω_M. Следовательно, полиномы $P(\Omega_M, \overline{x}) = \sum_{\overline{k}\in\Omega_M} b_{\overline{k}} e^{i\langle\overline{k},\overline{x}\rangle}$ будут ортогональны к $w(\overline{x})$. В силу равенства Парсеваля имеем

$$\|w\|_2 \leqslant \|v\|_2 + \|u\|_2 \leqslant C\Bigg(\sum_{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle\leqslant l}\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{\nu_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1}(\nu_j - 2^{s_j-1}+1)^{-1}\Big)\Bigg)^{1/2}$$

$$\leqslant C\Bigg(\sum_{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle\leqslant l}\sum_{j=1}^{m} s_j\Bigg)^{1/2} \leqslant Cl^{\frac{1}{2}}\Bigg(\sum_{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle\leqslant l} 1\Bigg)^{1/2} \leqslant C_1 l^{\frac{1}{2}} l^{(m-1)/2}.$$

Следовательно, для функции $P_0(\overline{x}) = C_1^{-1} l^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{m-1}{2}} w(\overline{x})$ выполняется неравенство $\|P_0\|_2 \leqslant 1$. Полиномы $P(\Omega_M, \overline{x})$ и $P_0(\overline{x})$ ортогональны. Поэтому

$$\|f_0 - P(\Omega_M)\|_2 \geqslant \left|\int_{\mathbb{T}^m}\big(f_0(\overline{x}) - P(\Omega_M,\overline{x})\big)P_0(\overline{x})d\overline{x}\right| = \left|\int_{\mathbb{T}^m} f_0(\overline{x})P_0(\overline{x})d\overline{x}\right|$$

$$\geqslant Cl^{-\frac{1}{\tau_1}-\frac{m-1}{\theta}} l^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{m-1}{2}} \sum_{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle\leqslant l} 2^{-\langle\overline{s},\overline{1}\rangle r_1}\sum_{j=1}^{m}\Bigg(\sum_{\nu_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1}(\nu_j - 2^{s_j-1}+1)^{-1}\Bigg)$$

$$\geqslant Cl^{-\frac{1}{\tau_1}-\frac{m-1}{\theta}} l^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{m-1}{2}} 2^{-lr_1}\sum_{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle\leqslant l}\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k_j=1}^{2^{s_j-1}} k_j^{-1}\Big)$$

$$\geqslant Cl^{-\frac{1}{\tau_1}-\frac{m-1}{\theta}} l^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{m-1}{2}} 2^{-lr_1}\sum_{\langle\overline{s},\overline{1}\rangle\leqslant l}\sum_{j=1}^{m} s_j \geqslant C2^{-lr_1} l^{(m-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} l^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1})}.$$

Теперь, учитывая определение наилучшего M-членного приближения и соотношение $M \asymp 2^l l^{m-1}$, отсюда получим

$$e_M(f_0)_2 \geqslant CM^{-r_1}(\log^{m-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}(\log M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}} \geqslant CM^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}(\log M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}}$$

для натуральных чисел $M > M_0 > 1$. Следовательно, так как $2 < q < \infty$ отсюда имеем

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\tau_1,\theta}B\big)_{q,\tau_2} \geqslant Ce_M\big(\mathbb{S}^{r_1}_{2,\tau_1,\theta}B\big)_{q,\tau_2} \geqslant Ce_M\big(\mathbb{S}^{r_1}_{2,\tau_1,\theta}B\big)_2 \geqslant Ce_M(f_0)_2$$

$$\geqslant CM^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}(\log M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}}$$

для натуральных чисел $M > M_0 > 1$. □

Заключение. В теореме 1 нижняя оценка величины $e_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{q,\tau_2}$ верна и в случае $p = 2$. В случае $\tau_1 = p < 2$ и $\tau_2 = q$ из теоремы 1 и теоремы 2 следует теорема 2.1 [19]. При $\tau_1 = 2$ теорема 3 совпадает с утверждением теоремы 2.1 из [19] при $p = 2$ и $r_1 = 1/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва: Мир, 1974. 333 с.
2. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
3. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
4. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата: Наука, 1976. 224 с.

5. **Temlyakov V.** Multivariate approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2018. 551 p. doi: 10.1017/9781108689687 .
6. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102, № 2. С. 37–40.
7. **Исмагилов Р.С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. Т. 29, № 3. С. 161–178.
8. **Белинский Э.С.** Приближение "плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. 1987. Т. 132, № 1. С. 20–27.
9. **Белинский Э.С.** Приближение периодических функций с "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Исследования по теории функций многих вещественных переменных: сб. статей. Ярославль, 1984. С. 10–24.
10. **Белинский Э.С.** Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных: сб. статей. Ярославль, 1988. С. 16–33.
11. **Makovoz Y.** On trigonometric n-widths and their generalization // J. Approx.Theory. 1984. Vol. 41, no. 4. P. 361–366. doi: 10.1016/0021-9045(84)90092-3 .
12. **Майоров В.Е.** Тригонометрические поперечники соболевских классов W_p^r в пространстве L_q // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 2. С. 161–173.
13. **Кашин Б.С.** Аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 172. С. 187–201.
14. **DeVore R.A.** Nonlinear approximation // Acta Numerica. 1998. Vol. 7, no. 51. P. 51–150. doi: 10.1017/S0962492900002816 .
15. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
16. **Temlyakov V.N.** Greedy approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. 434 p. ISBN 978-1-108-42875-0.
17. **Темляков В.Н.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 11. С. 131–1160.
18. **Temlyakov V.N.** Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 467–495. doi: 10.1007/s00365-016-9345-3 .
19. **Романюк А.С.** Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. математическая. 2003. Т. 67, № 2. С. 61–100.
20. **Романюк А.С.** Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 2. С. 247–261.
21. **Dinh Dung** On asymptotic order of n-term approximations and non-linear n-widths // Vietnam J. Math. 1999. Vol. 27, no. 4. P. 363–367.
22. **Wang Heping, Sun Yongsheng** Representation and m-term approximation for anisotropic classes // Theory of approximation of function and applications / eds. S. M. Nikol'skii et al. Moscow: Institute of Russian Academy, 2003. P. 250–268.
23. **Duan L.Q., Fang G.S.** Trigonometric widths and best N-term approximations of the generalized periodic Besov classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // J. Math. Resear. Expos. 2011. Vol. 31, no. 1. P. 129–141. doi: 10.3770/j.issn:1000-341X.2011.01.015 .
24. **Hansen M., Sickel W.** Best m-term approximation and Lizorkin–Triebel spaces // J. Approx. Theory. 2011. Vol. 163, no. 8. P. 923–954. doi: 10.1016/j.jat.2011.02.006 .
25. **Hansen M., Sickel W.** Best m-term approximation and Sobolev–Besov spaces of dominating mixed smoothness the case of compact embeddings // Constr. Approx. 2012. Vol. 36, no. 1. P. 1–51. doi: 10.1007/S00365-012-9161-3 .
26. **Stasyuk S.A.** Best m-term trigonometric approximation for the classes $B^r_{p,\theta}$ of functions of low smoothness // Ukr. Math. J. 2010. Vol. 62, no. 1. P. 114–122. doi: 10.1007/s11253-010-0336-4 .
27. **Stasyuk S.A.** Best m-term trigonometric approximation of periodic function of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness// J. Approx. Theory. 2014. Vol. 177. P. 1–16. doi: 10.1016/j.jat.2013.09.006 .
28. **Stasyuk S.A.** Approximating characteristics of the analogs of Besov classes with logarithmic smoothness// Ukr. Math. J. 2014. Vol. 66, no. 4. P. 553–560. doi: 10.1007/s11253-014-0952-5 .
29. **Shidlich A.L.** Approximation of certain classes of functions of several variables by greedy approximates in the integral metrics. 2013. 16 p. URL: arXiv:1302.2790v1 [mathCA].

30. **Bazarkhanov D.B., Temlyakov V.N.** Nonlinear tensor product approximation of functions. 2014. 23 p. URL: arXiv:1409.1403v1 [stat ML].
31. **Базарханов Д.Б.** Нелинейные тригонометрические приближения классов функций многих переменных // Тр. математического ин-та РАН. 2016. Т. 293. С. 8–42.
32. **Dũng Dinh, Temlyakov V., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation. Cham: Birkhäuser, 2018. 218 p. doi: 10.1007/978-3-319-92240-9 .
33. **Акишев Г.** О порядках M-членных приближений классов функций симметричного пространства // Мат. журн. 2014. Т. 14, № 4. С. 46–71.
34. **Акишев Г.** О точности оценок наилучшего M-членного приближения класса Бесова // Сиб. электронные мат. изв. 2010. Т. 7. С. 255–274.
35. **Акишев Г.** О порядках M-членного приближения классов в пространстве Лоренца // Мат. журн. 2011. Т. 11, № 1. С. 5–29.
36. **Акишев Г.** Тригонометрические поперечники классов Никольского — Бесова в пространстве Лебега со смешанной нормой// Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 6. С. 723–732.
37. **Akishev G.** On M-term approximations of the Nikol'skii–Besov class // Hacet. Jour. Math. and Stat. 2016. Vol. 45, no. 2. P. 297–310. doi: 10.15672/HJMS.20164512492 .
38. **Akishev G.** Estimations of the best M-term approximationsof functions in the Lorentz space with constructive methods // Bull. Karaganda Univer. Math. Ser. 2017. № 3. P. 13–26.
39. **Trigub R.M. and Belinsky E.S.** Fourier analysis and approximation of functions. Dordrecht: Springer, 2004. 585 p. doi: 10.1007/978-1-4020-2876-2 .
40. **Галеев Э.М.** Порядковые оценки производных периодического многомерного — ядра Дирихле в смешанной норме // Мат. сб. 1982. Т. 117, № 1. С. 32–43.

Поступила 24.08.2021
После доработки 14.10.2021
Принята к публикации 18.10.2021

Акишев Габдолла
д-р физ.-мат. наук, профессор
Казахстанский филиал
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
г. Нур-Султан;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 069108078X. Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*, Moscow: Mir Publ., 1974, 333 p.
2. Nikolski S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems.* NY: Springer-Verlag, 1975. Original Russian text published in Nikol'skii S.M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*, Moscow: Nauka Publ., 1977, 456 p.
3. Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Functional spaces of mixed smoothness from decompositional point of view. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 187, pp. 163–184.
4. Amanov T.I. *Prostranstva differentsiruemykh funktsii s dominiruyushchei smeshannoi proizvodnoi* [Spaces of differentiable functions with dominant mixed derivative]. Alma-ata: Nauka Publ., 1976, 224 p.
5. Temlyakov V. *Multivariate approximation.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2018, 534 p. doi: 10.1017/9781108689687 .
6. Stechkin S.B. On the absolute convergence of orthogonal series. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1955, vol. 102, no. 2, pp. 37–40.
7. Ismagilov R.S. Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials. *Russian Math. Surveys*, 1974, vol. 29, no. 3, pp. 169–186. doi: 10.1070/RM1974v029n03ABEH001287 .

8. Belinskii E.S. Approximation by a “floating” system of exponentials on classes of smooth periodic functions. *Math. USSR-Sb.*, 1988, vol. 60, no. 1, pp. 19–27. doi: 10.1070/SM1988v060n01ABEH003153 .
9. Belinskii E.S. Approximation of periodic functions by a “floating” system of exponents and trigonometric diameters. In: *Research on the theory of functions of many real variables.* Yaroslavl’: Yaroslavl’ State University, 1984, pp. 10–24 (in Russian).
10. Belinsky E.S. Approximation by a “floating” system of exponentials on the classes of smooth periodic functions with bounded mixed derivative. In: *Research on the theory of functions of many real variables.* Yaroslavl’: Yaroslavl’ State University, 1988, pp. 16–33 (in Russian).
11. Makovoz Y. On trigonometric n-widths and their generalization. *J. Approx. Theory*, 1984, vol. 41, no. 4, pp. 361–366. doi: 10.1016/0021-9045(84)90092-3 .
12. Maiorov V.E. Trigonometric diameters of the Sobolev classes W_p^r in the space L_q. *Math. Notes*, 1986, vol. 40, no. 2, pp. 590–597. doi: 10.1007/BF01159113 .
13. Kashin B.S. On approximation properties of complete orthonormal systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1987, vol. 172, pp. 207–211.
14. DeVore R.A. Nonlinear approximation. *Acta Numerica*, 1998, vol. 7, no. 51, pp. 51–150. doi: 10.1017/S0962492900002816 .
15. Temlyakov V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 178, pp. 1–121.
16. Temlyakov V.N. *Greedy approximation.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011, 434 p. ISBN: 978-1-108-42875-0.
17. Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness. *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 11, pp. 1628–1656. doi: 10.1070/SM2015v206n11ABEH004507 .
18. Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness. *Constr. Approx.*, 2017, vol. 45, no. 3, pp. 467–495. doi: 10.1007/s00365-016-9345-3 .
19. Romanyuk A.S. Best m-term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables. *Izv. Math.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 265–302. doi: 10.1070/IM2003v067n02ABEH000427 .
20. Romanyuk A.S. Best trigonometric approximations for some classes of periodic functions of several variables in the uniform metric. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, no. 2, pp. 216–228. doi: 10.1134/S0001434607070279 .
21. Dung D. On asymptotic orders of n-term approximations and non-linear n-widths. *Vietnam J. Math.*, 1999, vol. 27, no. 4, pp. 363–367.
22. Wang Heping, Sun Yongsheng. Representation and m-term approximation for anisotropic classes. In: S.M. Nikol’skii et al. (eds), *Theory of approximation of function and applications*, Moscow: Institute of Russian Academy, 2003, pp. 250–268.
23. Duan L.Q., Fang G.S. Trigonometric widths and best N-term approximations of the generalized periodic Besov classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$. *Journal Math. Resear. and Expos.*, 2011, vol. 31, no. 1, pp. 129–141. doi: 10.3770/j.issn:1000-341X.2011.01.015 .
24. Hansen M., Sickel W. Best m-term approximation and Lizorkin – Triebel spaces. *J. Approx. Theory*, 2011, vol. 163, no. 8, pp. 923–954. doi: 10.1016/j.jat.2011.02.006 .
25. Hansen M., Sickel W. Best m-term approximation and Sobolev–Besov spaces of dominating mixed smoothness – the case of compact embeddings. *Constr. Approx.*, 2012, vol. 36, no. 1, pp. 1–51. doi: 10.1007/S00365-012-9161-3 .
26. Stasyuk S.A. Best m-term trigonometric approximation for the classes $B^r_{p,\theta}$ of functions of low smoothness. *Ukr. Math. J.*, 2010, vol. 62, no. 1, pp. 114–122. doi: 10.1007/s11253-010-0336-4 .
27. Stasyuk S.A. Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol’skii – Besov classes for small smoothness. *J. Approx. Theory*, 2014, vol. 177, pp. 1–16. doi: 10.1016/j.jat.2013.09.006 .
28. Stasyuk S.A. Approximating characteristics of the analogs of Besov classes with logarithmic smoothness. *Ukr. Math. J.*, 2014, vol. 66, no. 4, pp. 553–560. doi: 10.1007/s11253-014-0952-5 .
29. Shidlich A.L. Approximation of certain classes of functions of several variables by greedy approximates in the integral metrics. 2013. 16 p. Available on: arXiv: 1302.2790v1 [mathCA].
30. Bazarkhanov D.B., Temlyakov V.N. Nonlinear tensor product approximation of functions. 2014. 23 p. Available on: arXiv: 1409.1403v1 [stat ML].
31. Bazarkhanov D.B. Nonlinear trigonometric approximations of multivariate function classes. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, pp. 2–36. doi: 10.1134/S0081543816040027 .

32. Dũng D., Temlyakov V., Ullrich T. *Hyperbolic cross approximation.* Cham: Birkhäuser, 2018, 218 p. doi: 10.1007/978-3-319-92240-9 .
33. Akishev G. On the orders of M-terms approximations of classes of functions of the symmetrical space. *Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 4 (54), pp. 46–71 (in Russian).
34. Akishev G.A. On the exact estimations of the best M-terms approximation of the Besov class. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2010, vol. 7, pp. 255–274 (in Russian).
35. Akishev G. On the order of the M-term approach of the classes approximation in the Lorentz space. *Mat. Zh.*, 2011, vol. 11, no. 1, pp. 5–29 (in Russian).
36. Akishev G. Trigonometric widths of the Nikol'skii–Besov classes in the Lebesgue space with mixed norm. *Ukr. Math. J.*, 2014, vol. 66, no. 6, pp. 807–817. doi: 10.1007/s11253-014-0975-y .
37. Akishev G. On M-term approximations of the Nikol'skii–Besov class. *Hacet. J. Math. Stat.*, 2016, vol. 45, no. 2, pp. 297–310. doi: 10.15672/HJMS.20164512492 .
38. Akishev G. Estimations of the best M-term approximations of functions in the Lorentz space with constructive methods. *Bull. Karaganda Univer. Math. ser.*, 2017, no. 3, pp. 13–26.
39. Trigub R.M., Belinsky E.S. *Fourier analysis and approximation of functions.* Dordrecht: Springer, 2004, 585 p. doi: 10.1007/978-1-4020-2876-2 .
40. Galeev E.M. Order estimates of derivatives of the multidimensional periodic Dirichlet α–kernel in a mixed norm. *Math. USSR-Sb.*, 1983, vol. 45, no. 1, pp. 31–43. doi: 10.1070/SM1983v045n01ABEH002584 .

Received August 24, 2021
Revised October 14, 2021
Accepted October 18, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP08855579).

Gabdolla Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Kazakhstan Branch, Lomonosov Moscow University, Nur–Sultan, 100008 Republic Kazakhstan; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: akishev_g@mail.ru .

Cite this article as: G. Akishev. On the best M-term approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class in the Lorentz space, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 7–26 .