ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 517.929

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ ИМПУЛЬСНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ю. Ф. Долгий, А. Н. Сесекин

Рассматривается вырожденная задача стабилизации линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием и импульсными управлениями. Для ее регуляризации используется невырожденный критерий качества переходных процессов, близкий к вырожденному. Применяется преобразование регуляризованной задачи стабилизации для импульсных управлений к вспомогательной невырожденной задаче оптимальной стабилизации для не импульсных управлений, содержащих запаздывание. При решении вспомогательной задачи используется принцип динамического программирования Беллмана. При нахождении определяющей системы уравнений для коэффициентов квадратичного функционала Беллмана осуществляется постановка задачи оптимальной стабилизации в функциональных пространствах состояний и управлений. Получено представление для импульса оптимального стабилизирующего управления. Сложная задача нахождения решения определяющей системы уравнений для функционала Беллмана заменяется задачей нахождения решения определяющей системы уравнений для коэффициентов представления оптимального стабилизирующего управления. Последняя задача имеет меньшую размерность. Найдена асимптотическая зависимость оптимального стабилизирующего управления от параметра регуляризации, когда размерность вектора управления совпадает с размерностью вектора состояний.

Ключевые слова: линейная автономная система, запаздывание, оптимальная стабилизация, импульсное управление.

Yu. F. Dolgii, A. N. Sesekin. Regularization analysis of a degenerate problem of impulsive stabilization for a system with time delay.

A degenerate problem of stabilizing a linear autonomous system of differential equations with time delay and impulse controls is considered. A nondegenerate criterion for the quality of transient processes, close to a degenerate one, is used for its regularization. The regularized stabilization problem for impulse controls is replaced by an auxiliary non-degenerate optimal stabilization problem for non-impulse controls containing time delay. Bellman's dynamic programming principle is used to solve the auxiliary problem. When finding the governing system of equations for the coefficients of the quadratic Bellman functional, the formulation of the optimal stabilization problem in the functional spaces of states and controls is used. A representation is obtained for the impulse of the optimal stabilizing control. The difficult problem of finding a solution to the governing system of equations for the Bellman functional is replaced by the problem of finding a solution to the governing system of equations for the coefficients of the representation of the optimal stabilizing control. The latter problem has a lower dimension. The asymptotic dependence of the optimal stabilizing control on the regularization parameter is found when the dimension of the control vector coincides with the dimension of the state vector.

Keywords: linear autonomous system, time delay, optimal stabilization, impulse control.

MSC: 34K06, 34K20, 34K30, 93C27

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-74-95

1. Введение

Объект управления описывается автономной линейной системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0x(t) + A_1x(t-\tau) + Bu(t), \tag{1.1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $x : [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, A_0, A_1, B — постоянные матрицы. Импульсные управления являются обобщенными функциями, определяемыми формулами $u(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$, $t \in \mathbb{R}^+$, в которых импульсы управления $v : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^r$ имеют ограниченные вариации на любом конечном отрезке, $v(0) = 0$.

Для любой начальной функции $\varphi \in \mathbb{H}$ существует единственное решение $x(t,\varphi)$, $t \geq -\tau$, уравнения (1.1), удовлетворяющее условию $x(t,\varphi) = \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, и интегральному уравнению

$$x(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^t (A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau))\, ds + B\,(v(t) - v(+0))\,, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Здесь $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau,0),\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ — гильбертово пространство функций со скалярным произведением $\langle \varphi, \psi \rangle_H = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \psi^\top(\vartheta)\varphi(\vartheta)d\vartheta$. Согласно методу последовательных приближений для интегрального уравнения решение уравнения (1.1) является функцией с ограниченными вариациями на любом конечном отрезке положительной полуоси $\mathbb{R}^+$.

Изучается задача стабилизации системы с запаздыванием (1.1) с вырожденным критерием качества переходных процессов

$$J = \int\limits_0^{+\infty} x^\top(t) C_x x(t) dt, \tag{1.2}$$

где C_x — положительно определенная матрица.

Задача оптимальной стабилизации автономной линейной системы с запаздыванием для не импульсных управлений с невырожденным критерием качества достаточно хорошо изучена [1–3]. При ее решении используется принцип динамического программирования Беллмана [4, с. 32]. Некорректные задачи оптимальной стабилизации с вырожденным критерием качества переходных процессов для систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследовались в работе [5]. В таких задачах стабилизация возможна, но она не является оптимальной.

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу стабилизации скалярного дифференциального уравнения без запаздывания для не импульсных управлений

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + Bu(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

с вырожденным критерием качества (1.2).

При $B \neq 0$ существуют стабилизирующие управления, формируемые по принципу обратной связи и определяемые формулами $u = kx$, $A_0 + Bk < 0$. Значения критерия качества для них определяются формулами

$$J = -\frac{C_x x_0^2}{2\,(A_0 + Bk)}.$$

При неограниченном возрастании модулей коэффициента обратной связи значения критерия качества стремятся к нулю, но нулевое значение критерия качества не достигается при конечном значении коэффициента обратной связи. Следовательно, оптимальное стабилизирующее управление не реализуется.

П р и м е р 2. Рассмотрим задачу стабилизации скалярного дифференциального уравнения без запаздывания для импульсных управлений

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + B\frac{dv(t)}{dt}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

с вырожденным критерием качества (1.2).

При $B \neq 0$, $A_0 \neq 0$ существуют стабилизирующие управления по принципу обратной связи, импульсы которых имеют вид $v = \dfrac{k}{1+Bk}x$, $A_0\,(1 + Bk) < 0$. Значения критерия качества для них вычисляются по формулам

$$J = -\frac{C_x x_0^2}{2A_0\,(1 + Bk)}.$$

При неограниченном возрастании модулей коэффициента обратной связи значения критерия качества стремятся к нулю, но нулевое значение критерия качества не достигается при конечном значении коэффициента обратной связи. Следовательно, оптимальное стабилизирующее управление не реализуется.

Задачи стабилизации автономных линейных систем с запаздыванием для импульсных управлений с вырожденным критерием качества изучались в работах [6; 7]. При нахождении стабилизирующих управлений использовались определяющие системы уравнений для коэффициентов представлений функционалов Беллмана. Вопросы существования оптимальных стабилизирующих управлений, связанные с регуляризацией задачи импульсной стабилизации, не рассматривались.

Регуляризация вырожденной задачи импульсной стабилизации (1.1), (1.2) достигается введением в критерий качества переходных процессов

$$J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \big(x^\top(t) C_x x(t) + \alpha^2 v^\top(t) v(t)\big)\,dt \tag{1.3}$$

импульсов управлений с малым положительным коэффициентом. Параметр α будем называть *параметром регуляризации.*

В данной работе исследуется регуляризованная вырожденная задача оптимальной импульсной стабилизации для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (1.1), (1.3).

2. Вспомогательная задача оптимальной стабилизации для системы с запаздыванием

При исследовании задачи импульсной стабилизации с вырожденным критерием качества (1.1), (1.2) в [6] использовалось ее сведение к вспомогательной задаче не импульсной стабилизации для автономной линейной системы с запаздыванием, которое входит также в управления. В настоящей работе указанное сведение применяется для регуляризованной задачи оптимальной импульсной стабилизации (1.1), (1.3). Используя замены (см. [6])

$$y(t) = x(t) - Bv(t), \quad t \geq -\tau, \quad v(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 0], \tag{2.1}$$

регуляризованную задачу оптимальной импульсной стабилизации (1.1), (1.3) сводим к вспомогательной задаче оптимальной не импульсной стабилизации для автономной линейной системы с запаздыванием, которое входит также в управления,

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_0 y(t) + A_1 y(t-\tau) + A_0 B v(t) + A_1 B v(t-\tau), \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.2}$$

с невырожденным критерием качества переходных процессов

$$\hat{J}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \Big(y^\top(t) C_{yy} y(t) + 2y^\top(t) C_{yv} v(t) + v^\top(t) C_{vv}(\alpha) v(t)\Big)\,dt, \tag{2.3}$$

где $C_{yy} = C_x$, $C_{yv} = C_x B$, $C_{vv}(\alpha) = B^\top C_x B + \alpha^2 I_r$. Управления вспомогательной задачи v совпадают с импульсами обобщенных управлений регуляризованной задачи оптимальной стабилизации (1.1), (1.3).

Опираясь на трактовку Н. Н. Красовского дифференциального уравнения с последействием, используем описание постановки задачи оптимальной стабилизации (2.2), (2.3) в функциональных пространствах состояний $\mathbb{H}$ и управлений $\mathbb{E} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0), \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R}^r$. В гильбертовом пространстве $\mathbb{E}$ скалярное произведение определяется формулой

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_E = \mathbf{u}^\top(0)\mathbf{v}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} \mathbf{u}^\top(\vartheta)\mathbf{v}(\vartheta)d\vartheta.$$

Системе (2.2) ставится в соответствие дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{y}_t}{dt} = \mathfrak{A}\mathbf{y}_t + \mathfrak{B}\mathbf{v}_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{y}_t(\vartheta) = y(t+\vartheta)$, $\mathbf{v}_t(\vartheta) = v(t+\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $\mathbf{y}_t \in \mathbb{H}$, $\mathbf{v}_t \in \mathbb{E}$. Неограниченный оператор $\mathfrak{A}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ с областью определения $D(\mathfrak{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{H}\colon \mathbf{y} \in \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\}$ запишем следующим образом:

$$(\mathfrak{A}\mathbf{y})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{y}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathfrak{A}\mathbf{y})(0) = A_0\mathbf{y}(0) + A_1\mathbf{y}(-\tau).$$

Неограниченный оператор $\mathfrak{B}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{H}$ с областью определения $D(\mathfrak{B}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{E}\colon \mathbf{v}(-\tau) \in \mathbb{R}^r\}$ задается формулами

$$(\mathfrak{B}\mathbf{v})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathfrak{B}\mathbf{v})(0) = A_0B\mathbf{v}(0) + A_1B\mathbf{v}(-\tau).$$

Критерий качества переходных процессов имеет вид

$$\mathbf{J}(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} \omega(\mathbf{y}_t, \mathbf{v}_t, \alpha)dt.$$

Здесь $\omega(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \alpha) = \langle \mathbf{C_{yy}}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_H + 2\langle \mathbf{C_{yv}}\mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle_H + \langle \mathbf{C_{vv}}(\alpha)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_E$.

Ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор $\mathbf{C_{yy}}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ может быть записан как

$$(\mathbf{C_{yy}}\mathbf{y})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{C_{yy}}\mathbf{y})(0) = C_x\mathbf{y}(0).$$

Ограниченный оператор $\mathbf{C_{yv}}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{H}$ имеет следующий вид:

$$(\mathbf{C_{yv}}\mathbf{v})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{C_{yv}}\mathbf{v})(0) = C_xB\mathbf{v}(0).$$

Ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор $\mathbf{C_{vv}}(\alpha)\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ определяется соотношениями

$$(\mathbf{C_{vv}}(\alpha)\mathbf{v})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{C_{vv}}(\alpha)\mathbf{v})(0) = \big(B^\top C_xB + \alpha I_r\big)\mathbf{v}(0).$$

3. Уравнение Беллмана вспомогательной задачи оптимальной стабилизации

При решении задачи оптимальной не импульсной стабилизации (2.2), (2.3) для системы с запаздыванием в управлениях и невырожденным критерием качества используется уравнение Беллмана [4, с. 38]

$$\min_{\mathbf{v}_t(0) \in \mathbb{R}^r} \Big\{ \frac{dV}{dt}\big|_{(2.4)}(\mathbf{y}_t, \mathbf{v}_t, \alpha) + \omega(\mathbf{y}_t, \mathbf{v}_t, \alpha) \Big\} = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

Применение этого уравнения требует описания представления квадратичного функционала Беллмана. В монографии [4, с. 39] такое представление непосредственно определяется коэффициентами квадратичного функционала. Аналогичное представление используется в [6] при решении вспомогательной задачи не импульсной стабилизации для автономной линейной системы с запаздыванием и вырожденным критерием качества.

В настоящей работе представление квадратичного функционала Беллмана определяется представлениями порождающих его ограниченных операторов:

$$V(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)=\langle\mathbf{U}_1(\alpha)\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle_H+2\langle\mathbf{U}_2(\alpha)\mathbf{v},\mathbf{y}\rangle_H+\langle\mathbf{U}_3(\alpha)\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_2, \tag{3.2}$$

где скалярное произведение в пространстве $\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)$ имеет вид $\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle_2=\int_{-\tau}^{0}\mathbf{u}^\top(\vartheta)\mathbf{v}(\vartheta)d\vartheta$. Ограниченный самосопряженный положительный оператор $\mathbf{U}_1:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathbf{U}_1(\alpha)\mathbf{y})(\vartheta)=K_1(\vartheta,0,\alpha)\mathbf{y}(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}K_1(\vartheta,s,\alpha)\mathbf{y}(s)ds,\quad \vartheta\in[-\tau,0],$$

$$K_1^\top(\vartheta,s,\alpha)=K_1(s,\vartheta,\alpha),\quad \vartheta,s\in[-\tau,0].$$

Ограниченный оператор $\mathbf{U}_2(\alpha):\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)\to\mathbb{H}$ запишем в виде

$$(\mathbf{U}_2(\alpha)\mathbf{v})(\vartheta)=\int\limits_{-\tau}^{0}K_2(\vartheta,s,\alpha)\mathbf{v}(s)ds,\quad \vartheta\in[-\tau,0].$$

Ограниченный самосопряженный положительный оператор $\mathbf{U}_3(\alpha):\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)\to\mathbb{L}_2([-\tau,0],$ $\mathbb{R}^r)$ задается соотношениями

$$(\mathbf{U}_3(\alpha)\mathbf{v})(\vartheta)=\int\limits_{-\tau}^{0}K_3(\vartheta,s,\alpha)\mathbf{v}(s)ds,\quad \vartheta\in[-\tau,0],$$

$$K_3^\top(\vartheta,s,\alpha)=K_3(s,\vartheta,\alpha),\quad \vartheta,s\in[-\tau,0].$$

Находим производную функционала Беллмана в силу уравнения (2.4):

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}|_{(2.4)}(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)=\langle\mathbf{U}_1(\alpha)\left(\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}\right),\mathbf{y}\rangle_H$$

$$+\langle\mathbf{U}_2(\alpha)\mathbf{v},\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}\rangle_H+\langle\mathbf{y},\mathbf{U}_2(\alpha)\mathbf{D}\mathbf{v}\rangle_H+\langle\mathbf{v},\mathbf{U}_3(\alpha)\mathbf{D}\mathbf{v}\rangle_2, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{D}\colon\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)\to\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)$ — неограниченный оператор дифференцирования, $(\mathbf{D}\mathbf{v})(\vartheta)=d\mathbf{v}(\vartheta)/d\vartheta$, $-\tau\le\vartheta\le0$.

Производная функционала Беллмана (3.3) определяет квадратичный неограниченный функционал на пространствах функций $\mathbb{H}$ и $\mathbb{E}$. Введем гильбертовые пространства функций $\mathbb{H}_1=\mathbb{R}^n\times\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}_1=\mathbb{R}^r\times\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^r)\times\mathbb{R}^r$ со скалярными произведениями

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{H_1}=\mathbf{y}^\top(-\tau)\mathbf{x}(-\tau)+\mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta,$$

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{E_1}=\mathbf{v}^\top(-\tau)\mathbf{u}(-\tau)+\mathbf{v}^\top(0)\mathbf{v}(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{v}^\top(\vartheta)\mathbf{v}(\vartheta)d\vartheta.$$

Применение уравнения Беллмана связано с использованием ограниченных сужений неограниченных функционалов. Процедуру построения таких сужений удобно обосновывать, используя операторы для описания представлений квадратичных функционалов.

Лемма 1. *Сужение функционала, определяемого формулой* (3.3), *на пространства* $\mathbb{H}_1$ *и* $\mathbb{E}_1$ *является квадратичным ограниченным функционалом, если коэффициенты представлений операторов* $\mathbf{U}_1(\alpha)$, $\mathbf{U}_2(\alpha)$, $\mathbf{U}_3(\alpha)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) *матричнозначная функция* $K_1(\cdot,\cdot,\alpha)$ *дифференцируема по второму аргументу,*

$$\frac{\partial K_1(\cdot,\cdot,\alpha)}{\partial s}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0)\times(-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times n}),$$

$$K_1(\cdot,0,\alpha),K_1,(\cdot,-0,\alpha),K_1(\cdot,-\tau,\alpha)\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times n})\times\mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\frac{\partial K_1(0,\cdot,\alpha)}{\partial s}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times n});$$

2) *матричнозначная функция* $K_2(\cdot,\cdot,\alpha)$ *дифференцируема по первому и второму аргументам,*

$$K_2(\cdot,-0,\alpha),\;\; K_2(\cdot,-\tau,\alpha)\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times r})\times\mathbb{R}^{n\times r},$$

$$\frac{\partial K_2(\cdot,\cdot,\alpha)}{\partial\vartheta},\;\;\frac{\partial K_2(\cdot,\cdot,\alpha)}{\partial s}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0)\times(-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times r}),$$

$$K_2(0,\cdot,\alpha),\;\; K_2(-0,\cdot,\alpha),\;\; K_2(-\tau,\cdot,\alpha),\frac{\partial K_2(0,\cdot,\alpha)}{\partial s}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times r});$$

3) *матричнозначная функция* $K_3(\cdot,\cdot,\alpha)$ *дифференцируема по второму аргументам,*

$$\frac{\partial K_3(\cdot,\cdot,\alpha)}{\partial s}\in\mathbb{L}_2((-\tau,0)\times(-\tau,0),\mathbb{R}^{r\times r}),$$

$$K_3(\cdot,-0,\alpha),\;\; K_3(\cdot,-\tau,\alpha)\in\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{r\times r}).$$

Доказательство. Используя определения неограниченных операторов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathbf{D}$, найдем сужение квадратичного функционала, определяемого формулой (3.3), на пространства $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{E}_1$. Имеют место формулы

$$(\mathbf{U}_1(\alpha)\,(\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}))\,(\vartheta)=(K_1(\vartheta,0,\alpha)A_0+K_1(\vartheta,-0,\alpha))\,\mathbf{y}(0)+K_1(\vartheta,0,\alpha)A_0B\mathbf{v}(0)$$

$$+\,(K_1(\vartheta,0,\alpha)A_1-K_1(\vartheta,-\tau,\alpha))\,\mathbf{y}(-\tau)+K_1(\vartheta,0,\alpha)A_1B\mathbf{v}(-\tau)-\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{\partial K_1(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\mathbf{y}(s)ds,$$

$$(\mathbf{U}_2(\alpha)\mathbf{D}\mathbf{v})\,(\vartheta)=K_2(\vartheta,-0,\alpha)\mathbf{v}(0)-K_2(\vartheta,-\tau,\alpha)\mathbf{v}(-\tau)-\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{\partial K_2(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\mathbf{v}(s)ds,\;\; -\tau\le\vartheta\le 0,$$

$$(\mathbf{U}_3(\alpha)\mathbf{D}\mathbf{v})\,(\vartheta)=K_3(\vartheta,-0,\alpha)\mathbf{v}(0)-K_3(\vartheta,-\tau,\alpha)\mathbf{v}(-\tau)-\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{\partial K_3(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\mathbf{v}(s)ds,\;\; -\tau\le\vartheta< 0,$$

$$\langle\mathbf{U}_2(\alpha)\mathbf{v},\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}\rangle_H$$

$$=\left(\mathbf{y}^\top(0)A_0^\top+\mathbf{y}^\top(-\tau)A_1^\top+\mathbf{v}^\top(0)B^\top A_0^\top+\mathbf{v}^\top(-\tau)B^\top A_1^\top\right)\int\limits_{-\tau}^{0}K_2(0,s,\alpha)\mathbf{v}(s)ds$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\left(\mathbf{y}^\top(0)K_2(-0,s,\alpha)-\mathbf{y}^\top(-\tau)K_2(-\tau,s,\alpha)-\int\limits_{-\tau}^{0}\mathbf{y}^\top(\vartheta)\frac{\partial K_2(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta}d\vartheta\right)\mathbf{v}(s)ds.$$

При выполнении условий леммы из полученных формул и неравенства Коши — Буняковского следует, что ограничены сужения операторов $\mathbf{U}_1(\alpha)\mathfrak{A}$, $\mathbf{U}_1(\alpha)\mathfrak{B}$, $\mathbf{U}_2(\alpha)\mathbf{D}$, $\mathbf{U}_3(\alpha)\mathbf{D}$, а также ограничено сужение функционала $\langle\mathbf{U}_2(\alpha)\mathbf{v},\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}\rangle_H$ на пространства функций $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{E}_1$. Используя формулу (3.3), завершаем доказательство леммы.

4. Определяющая система уравнений функционала Беллмана

Для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием в управлениях и невырожденным критерием качества оптимальное стабилизирующее управление является решением интегрального уравнения, коэффициенты которого находятся из определяющей системы уравнений функционала Беллмана [4, с. 39]. Для системы (2.2) с вырожденным критерием качества стабилизирующее управление можно также связать с решением интегрального уравнения, коэффициенты которого находятся из определяющей системы уравнений функционала Беллмана [7]. В настоящей работе определяющая система уравнений функционала Беллмана (3.2) вспомогательной задачи оптимальной стабилизации (2.2), (2.3) описывается в терминах коэффициентов представлений операторов $\mathbf{U}_1(\alpha)$, $\mathbf{U}_2(\alpha)$, $\mathbf{U}_3(\alpha)$.

Лемма 2. *Пусть существует решение вспомогательной задачи оптимальной стабилизации* (2.2), (2.3). *Тогда оптимальное стабилизирующее управление является решением интегрального уравнения*

$$C_{vv}(\alpha)v(t) + \Big(B^\top\big(C_x + A_0^\top K_1(0,0,\alpha)\big) + K_2^\top(0,-0,\alpha)\Big)\,y(t)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(B^\top A_0^\top K_1(0,\vartheta,\alpha) + K_2^\top(\vartheta,-0,\alpha)\Big)\,y(t+\vartheta)d\vartheta$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(B^\top A_0^\top K_2(0,\vartheta,\alpha) + K_3^\top(\vartheta,-0,\alpha)\Big)\,v(t+\vartheta)d\vartheta = 0, \quad t>0, \quad v(t)=0, \quad t\in[-\tau,0]. \tag{4.1}$$

Коэффициенты представлений операторов $\mathbf{U}_1(\alpha)$, $\mathbf{U}_2(\alpha)$, $\mathbf{U}_3(\alpha)$ *удовлетворяют определяющей системе уравнений функционала Беллмана*

$$\frac{\partial K_1(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta} + \frac{\partial K_1(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s} + \big(K_2(\vartheta,-0,\alpha) + K_1(\vartheta,0,\alpha)A_0B\big)C_{vv}^{-1}(\alpha)$$
$$\times\ \Big(K_2^\top(s,-0,\alpha) + B^\top A_0^\top K_1^\top(s,0,\alpha)\Big) = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial K_2(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta} + \frac{\partial K_2(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s} + \big(K_2(\vartheta,-0,\alpha) + K_1(\vartheta,0,\alpha)A_0B\big)C_{vv}^{-1}(\alpha)$$
$$\times\ \Big(K_3^\top(s,-0,\alpha) + B^\top A_0^\top K_2(0,s,\alpha)\Big) = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial K_3(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta} + \frac{\partial K_3(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s} + \Big(K_3(\vartheta,-0,\alpha) + K_2^\top(0,\vartheta,\alpha)A_0B\Big)\,C_{vv}^{-1}(\alpha)$$
$$\times\ \Big(K_3^\top(s,-0,\alpha) + B^\top A_0^\top K_2(0,s,\alpha)\Big) = 0, \tag{4.4}$$

$$-\tau\le\vartheta,s<0,$$

$$\frac{\partial K_1(0,\vartheta,\alpha)}{\partial\vartheta} = A_0^\top K_1(0,\vartheta,\alpha) + K_1(-0,\vartheta,\alpha) - \big(K_2(0,-0,\alpha) + (C_x + K_1(0,0,\alpha)A_0)\,B\big)C_{vv}^{-1}(\alpha)$$
$$\times\Big(K_2^\top(\vartheta,-0,\alpha) + B^\top A_0^\top K_1(0,\vartheta,\alpha)\Big)\,, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial K_2(0,\vartheta,\alpha)}{\partial\vartheta} = A_0^\top K_2(0,\vartheta,\alpha) + K_2(-0,\vartheta,\alpha) - \big(K_2(0,-0,\alpha) + (C_x + K_1(0,0,\alpha)A_0)\,B\big)C_{vv}^{-1}(\alpha)$$
$$\times\Big(K_3^\top(\vartheta,-0,\alpha) + B^\top A_0^\top K_2(0,\vartheta,\alpha)\Big)\,, \tag{4.6}$$

$$K_1(\vartheta,-\tau,\alpha) = A_1^\top K_1(0,\vartheta,\alpha), \quad K_2(-\tau,\vartheta,\alpha) = A_1^\top K_2(0,\vartheta,\alpha), \tag{4.7}$$

$$K_2^\top(\vartheta,-\tau,\alpha)=B^\top A_1^\top K_1(0,\vartheta,\alpha),\quad K_3(-\tau,\vartheta,\alpha)=B^\top A_1^\top K_2(0,\vartheta,\alpha),\tag{4.8}$$
$$-\tau\le\vartheta<0,$$

$$K_1(0,-\tau,\alpha)=K_1(0,0,\alpha)A_1,\quad K_2(0,-\tau,\alpha)=K_1(0,0,\alpha)A_1B,\tag{4.9}$$

$$A_0^\top K_1(0,0,\alpha)+K_1(0,0,\alpha)A_0+K_1^\top(0,-0,\alpha)+K_1(0,-0,\alpha)+C_x$$
$$-\big(K_2(0,-0,\alpha)+(C_x+K_1(0,0,\alpha)A_0)\,B\big)C_{vv}^{-1}(\alpha)$$
$$\times\Big(K_2^\top(0,-0,\alpha)+B^\top\big(C_x+A_0^\top K_1(0,0,\alpha)\big)\Big)=0.\tag{4.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условий леммы 1 сужение квадратичного функционала, определяемого формулами $\Phi(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)=\dfrac{dV}{dt}\big|_{(2.4)}(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)+\omega(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)$, $\mathbf{y}\in\mathbb{H}$, $\mathbf{v}\in\mathbb{E}$, на пространства $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{E}_1$ является квадратичным ограниченным функционалом. Используя методы построения сужений, предложенные в лемме 1, находим представление квадратичного ограниченного функционала

$$\Phi(\mathbf{y},\mathbf{v},\alpha)=\langle\hat{\mathbf{U}}_1(\alpha)\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle_{H_1}+2\langle\hat{\mathbf{U}}_2(\alpha)\mathbf{v},\mathbf{y}\rangle_{H_1}+\langle\hat{\mathbf{U}}_3(\alpha)\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{E_1}.\tag{4.11}$$

Здесь ограниченный самосопряженный оператор $\hat{\mathbf{U}}_1:\mathbb{H}_1\to\mathbb{H}_1$ определяется формулами

$$(\hat{\mathbf{U}}_1(\alpha)\mathbf{y})(-\tau)=\Big(A_1^\top K_1(0,0,\alpha)-K_1^\top(0,-\tau,\alpha)\Big)\,\mathbf{y}(0)+\int_{-\tau}^{0}\Big(A_1^\top K_1^\top(s,0,\alpha)-K_1^\top(s,-\tau,\alpha)\Big)\mathbf{y}(s)ds,$$

$$(\hat{\mathbf{U}}_1(\alpha)\mathbf{y})(\vartheta)=\big(K_1(\vartheta,0,\alpha)A_1-K_1(\vartheta,-\tau,\alpha)\big)\mathbf{y}(-\tau)$$
$$+\Big(-\frac{\partial K_1(\vartheta,0,\alpha)}{\partial\vartheta}+K_1(\vartheta,0,\alpha)A_0+K_1(\vartheta,-0,\alpha)\Big)\,\mathbf{y}(0)$$
$$-\int_{-\tau}^{0}\Big(\frac{\partial K_1(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial K_1(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\Big)\,\mathbf{y}(s)ds,\ \vartheta\in(-\tau,0),$$

$$(\hat{\mathbf{U}}_1(\alpha)\mathbf{y})(0)=(K_1(0,0,\alpha)A_1B-K_2(0,-\tau,\alpha))\,\mathbf{v}(-\tau)+\big(C_xB+K_1(0,0,\alpha)A_0B+K_2(0,-0,\alpha)\big)\mathbf{y}(0)$$
$$+\int_{-\tau}^{0}\Big(-\frac{\partial K_1(0,s,\alpha)}{\partial s}+A_0^\top K_1(0,s,\alpha)+K_1(-0,s,\alpha)\Big)\,\mathbf{y}(s)ds.$$

Ограниченный оператор $\hat{\mathbf{U}}_2:\mathbb{E}_1\to\mathbb{H}_1$ задается соотношениями

$$\big(\hat{\mathbf{U}}_2(\alpha)\mathbf{v}\big)(-\tau)=\int_{-\tau}^{0}\big(A_1^\top K_2^\top(0,s,\alpha)-K_2^\top(-\tau,s,\alpha)\big)\mathbf{v}(s)ds,$$

$$(\hat{\mathbf{U}}_2(\alpha)\mathbf{v})(\vartheta)=\big(K_1(\vartheta,0,\alpha)A_1B-K_2(\vartheta,-\tau,\alpha)\big)\mathbf{v}(-\tau)+\big(K_1(\vartheta,0,\alpha)A_0B+K_2(\vartheta,-0,\alpha)\big)\mathbf{v}(0)$$
$$-\int_{-\tau}^{0}\Big(\frac{\partial K_2(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial K_2(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\Big)\,\mathbf{v}(s)ds,\quad\vartheta\in(-\tau,0),$$

$$(\hat{\mathbf{U}}_2(\alpha)\mathbf{v})(0)=\big(K_1(0,0,\alpha)A_1-K_1(0,-\tau,\alpha)\big)\mathbf{v}(-\tau)$$
$$+\Big(C_x+K_1(0,0,\alpha)A_0+A_0^\top K_1(0,0,\alpha)+K_1(0,-0,\alpha)+K_1^\top(0,-0,\alpha)\Big)\,\mathbf{v}(0)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(-\frac{\partial K_2(0,s,\alpha)}{\partial s}+A_0^\top K_2(0,s,\alpha)+K_2(-0,s,\alpha)\Big)\mathbf{v}(s)ds.$$

Ограниченный самосопряженный оператор $\hat{\mathbf{U}}_3:\mathbb{E}_1\to\mathbb{E}_1$ определяется формулами

$$(\hat{\mathbf{U}}_3(\alpha)\mathbf{v})(-\tau)=\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(B_1^\top A_1^\top K_2^\top(0,s,\alpha)-K_3^\top(s,-\tau,\alpha)\Big)\,\mathbf{v}(s)ds,$$

$$(\hat{\mathbf{U}}_3(\alpha)\mathbf{v})(\vartheta)=\Big(K_2^\top(0,\vartheta,\alpha)A_1B-K_3(\vartheta,-\tau,\alpha)\Big)\,\mathbf{v}(-\tau)$$
$$+\Big(K_2^\top(0,\vartheta,\alpha)A_0B+K_3(\vartheta,-0,\alpha)\Big)\,\mathbf{v}(0)$$
$$-\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(\frac{\partial K_3(\vartheta,s,\alpha)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial K_3(\vartheta,s,\alpha)}{\partial s}\Big)\mathbf{v}(s)ds,\ \vartheta\in(-\tau,0),$$

$$(\hat{\mathbf{U}}_3(\alpha)\mathbf{v})(0)=C_{vv}(\alpha)\mathbf{v}(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(B^\top A_0^\top K_2(0,s,\alpha)+K_3(-0,s,\alpha)\Big)\,\mathbf{v}(s)ds.$$

Для произвольной функции $\mathbf{v}\in\mathbb{E}_1$ рассмотрим разложение $\mathbf{v}=\mathbf{v}^1+\mathbf{v}^2$, $\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2\in\mathbb{E}_1$, где $\mathbf{v}^1(\vartheta)=0$, $\vartheta\in[-\tau,0)$, $\mathbf{v}^1(0)=\mathbf{v}(0)$, $\mathbf{v}^2(\vartheta)=\mathbf{v}(\vartheta)$, $\vartheta\in[-\tau,0)$, $\mathbf{v}^2(0)=0$. Введем гильбертово пространство функций $\mathbb{E}_2=\mathbb{R}^r\times\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^r)$ со скалярным произведением $\langle\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}}\rangle_{E_2}=\hat{\mathbf{v}}^\top(-\tau)\hat{\mathbf{u}}(-\tau)+\int_{-\tau}^{0}\hat{\mathbf{v}}^\top(\vartheta)\hat{\mathbf{u}}(\vartheta)d\vartheta$. Функция $\hat{\mathbf{v}}$, определяемая формулами $\hat{\mathbf{v}}(\vartheta)=\mathbf{v}(\vartheta)$, $\vartheta\in[-\tau,0)$, принадлежит пространству $\mathbb{E}_2$.

Используя разложение элемента пространства $\mathbb{E}_1$ и описание представления ограниченного функционала (4.11), для функционала, определяемого формулами $\hat{\Phi}(\mathbf{v}(0),\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha)=\Phi(\mathbf{y},\mathbf{v}^1+\mathbf{v}^2,\alpha)$, $\mathbf{v}(0)\in\mathbb{R}^r$, $\mathbf{y}\in\mathbb{H}_1$, $\hat{\mathbf{v}}\in\mathbb{E}_2$, получим следующее представление:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{v}(0),\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha)=\hat{\Phi}^0(\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha)+2\hat{\Phi}^{1\top}(\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha)\mathbf{v}(0)+\mathbf{v}^\top(0)C_{vv}(\alpha)\mathbf{v}(0),$$

коэффициенты которого имеют вид

$$\hat{\Phi}^0(\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha)=\langle\hat{\mathbf{U}}_1(\alpha)\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle_{H_1}+2\langle\hat{\mathbf{U}}_2(\alpha)\mathbf{v}^2,\mathbf{y}\rangle_{H_1}+\langle\hat{\mathbf{U}}_3(\alpha)\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^2\rangle_{E_1},$$

$$\hat{\Phi}^1(\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha)=\Big(K_2^\top(0,-0,\alpha)+B^\top\big(C_x+A_0^\top K_1(0,0,\alpha)\big)\Big)\,\mathbf{y}(0)$$
$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(K_2^\top(\vartheta,-0,\alpha)+B^\top A_0^\top K_1^\top(\vartheta,0,\alpha)\Big)\,\mathbf{y}(\vartheta)d\vartheta$$
$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\Big(K_3^\top(\vartheta,-0,\alpha)+B^\top A_0^\top K_2(0,\vartheta,\alpha)\Big)\,\hat{\mathbf{v}}(\vartheta)d\vartheta. \tag{4.12}$$

Находим $\min\limits_{\mathbf{v}(0)\in\mathbb{R}^r}\hat{\Phi}(\mathbf{v}(0),\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha)=\hat{\Phi}(\mathbf{v}(0)(\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha),\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha)$, где

$$\mathbf{v}(0)(\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha)=-C_{vv}^{-1}(\alpha)\hat{\Phi}^1(\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha). \tag{4.13}$$

Из уравнения Беллмана (3.1) следует тождество $\hat{\Phi}(\mathbf{v}(0)(\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha),\mathbf{y},\hat{\mathbf{v}},\alpha)\equiv 0$, $\mathbf{y}\in\mathbb{H}_1$, $\hat{\mathbf{v}}\in\mathbb{E}_2$. Оно выполняется, когда коэффициенты представлений операторов $\mathbf{U}_1(\alpha)$, $\mathbf{U}_2(\alpha)$, $\mathbf{U}_3(\alpha)$ удовлетворяют определяющей системе уравнений функционала Беллмана (4.2)–(4.10).

В уравнении Беллмана (3.1) $\mathbf{v}(0)$ требуется заменить на $\mathbf{v}_t(0) = v(t)$, а функцию $\hat{\mathbf{v}}(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, — на функцию $\hat{\mathbf{v}}(\vartheta) = \mathbf{v}_t(\vartheta) = v(t+\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, для произвольного $t > 0$. Учитывая формулы (4.12) и (4.13) вспомогательной задачи оптимальной стабилизации (2.2), (2.3) для оптимального стабилизирующего управления вспомогательной задачи оптимальной стабилизации (2.2), (2.3) получим интегральное уравнение (4.1).

Лемма доказана.

5. Метод интегрирования определяющей системы уравнений функционала Беллмана

Задача интегрирования определяющей системы уравнений функционала Беллмана (4.2)–(4.10) является достаточно сложной. Для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием в управлениях и невырожденным критерием качества в работе [4, с. 36] предложен метод последовательных приближений для нахождения решения определяющей системы уравнений функционала Беллмана. Для системы дифференциальных уравнений с последействием в управлениях и с вырожденным критерием качества при нахождении стабилизирующего управления в [7] использовался метод интегрирования определяющей системы уравнений функционала Беллмана, связанный с вариацией критерия качества переходных процессов. Для системы дифференциальных уравнений без последействия в управлениях и с невырожденным критерием качества в [8] для интегрирования определяющей системы уравнений функционала Беллмана предложена процедура понижения размерности определяющей системы. В настоящей работе для новой определяющей системы уравнений функционала Беллмана (4.2)–(4.10) разработана процедура понижения размерности определяющей системы.

Рассмотрим матричное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial \Phi(\vartheta, s)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi(\vartheta, s)}{\partial s} = F(\vartheta, s), \quad -\tau \le s, \vartheta < 0.$$

Его решение задается соотношениями

$$\Phi(\vartheta, s) = \Phi(\vartheta - s - \tau, -\tau) + \int\limits_{-\tau}^{s} F(\xi + \vartheta - s, \xi) d\xi, \quad -\tau \le s \le \vartheta < 0,$$

$$\Phi(\vartheta, s) = \Phi(-\tau, s - \vartheta - \tau) + \int\limits_{-\tau}^{\vartheta} F(\xi, \xi - \vartheta + s) d\xi, \quad -\tau \le \vartheta < s < 0.$$

Используем последние формулы при нахождении решений определяющей системы уравнений (4.2)–(4.10). Введем обозначения $X_1(\vartheta, \alpha) = K_2(0, \vartheta, \alpha)$, $X_2(\vartheta, \alpha) = K_1(0, \vartheta, \alpha)$, $X_3(\vartheta, \alpha) = K_3(\vartheta, -0, \alpha) + K_2^\top(0, \vartheta, \alpha) A_0 B$, $X_4(\vartheta, \alpha) = K_2(\vartheta, -0, \alpha) + K_1^\top(0, \vartheta, \alpha) A_0 B$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$.

Решение уравнения (4.2) обладает симметрией $K_1(\vartheta, s, \alpha) = K_1^\top(s, \vartheta, \alpha)$, $-\tau \le \vartheta \le s < 0$, и с учетом условия (4.7) принимает следующий вид:

$$K_1(\vartheta, s, \alpha) = X_2^\top(\vartheta - s - \tau, \alpha) A_1 - \int\limits_{-\tau}^{s} X_4(\xi + \vartheta - s, \alpha) C_{vv}^{-1}(\alpha) X_4^\top(\xi, \alpha) d\xi, \ -\tau \le s \le \vartheta < 0. \quad (5.1)$$

Решение уравнения (4.3) с учетом условий (4.7), (4.8) определяется формулами

$$K_2(\vartheta, s, \alpha) = X_2^\top(\vartheta - s - \tau, \alpha) A_1 B - \int\limits_{-\tau}^{s} X_4^\top(\xi + \vartheta - s, \alpha) C_{vv}^{-1}(\alpha) X_3^\top(\xi, \alpha) d\xi, \quad -\tau \le s \le \vartheta < 0, \quad (5.2)$$

$$K_2(\vartheta,s,\alpha)=A_1^\top X_1(s-\vartheta-\tau,\alpha)-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}X_4^\top(\xi+\vartheta-s,\alpha)C_{vv}^{-1}(\xi)X_3^\top(\xi)d\xi,\quad -\tau\le\vartheta<s<0. \quad (5.3)$$

Решение уравнения (4.4) обладает симметрией $K_3(\vartheta,s,\alpha)=K_3^\top(s,\vartheta,\alpha)$, $-\tau\le\vartheta<s<0$, и с учетом условия (4.8) задается в виде

$$K_3(\vartheta,s,\alpha)=X_1^\top(\vartheta-s-\tau,\alpha)A_1B-\int\limits_{-\tau}^{s}X_3(\alpha+\vartheta-s,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_3^\top(\xi)d\xi,\quad -\tau\le s\le\vartheta<0. \quad (5.4)$$

Предложенная процедура понижения размерности определяющей системы позволяет при нахождении оптимального стабилизирующего управления вспомогательной системы искать непосредственно коэффициенты интегрального уравнения, которое определяет это управление.

Теорема 1. *Пусть существует решение вспомогательной задачи оптимальной стабилизации* (2.2), (2.3). *Тогда оптимальное стабилизирующее управление является решением интегрального уравнения*

$$C_{vv}(\alpha)v(t)+D^\top(\alpha)y(t)+\int\limits_{-\tau}^{0}X_4^\top(\vartheta,\alpha)y(t+\vartheta)d\vartheta+\int\limits_{-\tau}^{0}X_3^\top(\vartheta,\alpha)v(t+\vartheta)d\vartheta=0,\quad t>0, \quad (5.5)$$

$$v(t)=0,\quad t\in[-\tau,0].$$

Коэффициенты интегрального уравнения удовлетворяют следующей системе функционально-дифференциальных и интегральных уравнений:

$$X_1'(\vartheta,\alpha)=A_0^\top X_1(\vartheta,\alpha)+X_2^\top(-\vartheta-\tau,\alpha)A_1B$$

$$+D(\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_3^\top(\vartheta,\alpha)+\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}X_4(s-\vartheta,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_3^\top(s,\alpha)ds, \quad (5.6)$$

$$X_2'(\vartheta,\alpha)=A_0^\top X_2(\vartheta,\alpha)+X_2^\top(-\vartheta-\tau,\alpha)A_1$$

$$+D(\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_4^\top(\vartheta,\alpha)+\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}X_4(s-\vartheta,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_4^\top(s,\alpha)ds, \quad (5.7)$$

$$X_3(\vartheta,\alpha)=X_1^\top(\vartheta,\alpha)A_0B+B^\top A_1^\top X_1(-\vartheta-\tau,\alpha)+\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}X_3(s,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_3^\top(s-\vartheta,\alpha)ds, \quad (5.8)$$

$$X_4(\vartheta,\alpha)=X_2^\top(\vartheta,\alpha)A_0B+A_1^\top X_1(-\vartheta-\tau,\alpha)+\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}X_4(s,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_3^\top(s-\vartheta,\alpha)ds, \quad (5.9)$$

с краевыми условиями

$$X_1(-\tau,\alpha)=K(\alpha)A_1B,\ X_2(-\tau,\alpha)=K(\alpha)A_1. \quad (5.10)$$

Матрица $D(\alpha)$ *определяется формулой*

$$D(\alpha)=X_1(-0,\alpha)+(C_x+K(\alpha)A_0)\,B,$$

а симметричная положительно определенная матрица $K(\alpha)$ *удовлетворяет уравнению*

$$A_0^\top K(\alpha)+K(\alpha)A_0+D(\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)D^\top(\alpha)+X_2(-0,\alpha)+X_2^\top(-0,\alpha)+C_x=0. \quad (5.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя новые обозначения интегральное уравнение (4.1) запишем в форме (5.5).

Из (4.9) следует, что функции $X_1(\cdot,\alpha)$, $X_2(\cdot,\alpha)$ удовлетворяют краевым условиям (5.10). Из (4.10) следует, что матрица $K(\alpha)=K_1(0,0,\alpha)$ удовлетворяет уравнению (5.11).

Используя формулы (5.1)–(5.4), находим

$$K_1(-0,\vartheta,\alpha)=X_2^\top(-\vartheta-\tau,\alpha)A_1-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}X_4(\xi-\vartheta,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_4^\top(\xi,\alpha)d\xi,\quad -\tau\le\vartheta<0,\qquad(5.12)$$

$$K_2(-0,\vartheta,\alpha)=X_2^\top(-\vartheta-\tau,\alpha)A_1B-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}X_4(\xi-\vartheta,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_4^\top(\xi,\alpha)d\xi,\quad -\tau\le\vartheta<0,\qquad(5.13)$$

$$K_2(\vartheta,-0,\alpha)=A_1^\top X_1(-\vartheta-\tau,\alpha)-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}X_4(\xi,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_3^\top(\xi-\vartheta,\alpha)d\xi,\quad -\tau\le\vartheta<0,\qquad(5.14)$$

$$K_3(\vartheta,-0,\alpha)=B^\top A_1^\top X_1(-\vartheta-\tau,\alpha)-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}X_3(\xi,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_3^\top(\xi-\vartheta,\alpha)d\xi,\quad -\tau\le\vartheta<0.\qquad(5.15)$$

Учитывая формулы (5.14), (5.15) и определения функций $X_3(\cdot,\alpha)$, $X_4(\cdot,\alpha)$, находим интегральные уравнения (5.8), (5.9). Имея в виду формулы (5.12)–(5.15) и уравнения (4.5), (4.6), получим уравнения (5.6), (5.7).

Теорема доказана.

6. Оптимальное импульсное стабилизирующее управление

Покажем, что оптимальное управление регуляризованной вырожденной задачи импульсной стабилизации для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (1.1), (1.3) является обобщенной функцией. Для нерегуляризованной вырожденной задачи импульсной стабилизации системы с запаздыванием обобщенные управления рассматривались в [7].

Теорема 2. *Пусть существует решение задачи оптимальной импульсной стабилизации* (1.1), (1.3). *Тогда оптимальное импульсное стабилизирующее управление определяется формулами*

$$u^0(t,\alpha,x)=v^0(+0,\alpha,x)\delta(t)$$

$$-\,\big(C_{vv}(\alpha)-B^\top\hat D^\top(\alpha)B\big)^{-1}B^\top\left(\hat D^\top(\alpha)\frac{dx(t)}{dt}+\int\limits_{-\tau}^{0}\hat X_4^\top(s,\alpha)\frac{dx(t+s)}{ds}ds\right),\quad t>0,\qquad(6.1)$$

где $\delta(\cdot)$ — *функция Дирака,* $v^0(+0,\alpha,x)$ — *начальный импульс вида*

$$v^0(+0,\alpha,x)=-\big(C_{vv}(\alpha)-B^\top\hat D^\top(\alpha)B\big)^{-1}B^\top\left(\hat D^\top(\alpha)\varphi(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\hat X_4^\top(s,\alpha)\varphi(s)ds\right),\qquad(6.2)$$

$\varphi\in\mathbb{H}$ — *начальная функция решения системы* (1.1).

Коэффициенты оптимального стабилизирующего управления удовлетворяют следующей системе, состоящей из интегрального уравнения

$$\hat X_4(\vartheta,\alpha)=A_1^\top\big(\hat D(\alpha)-C_x\big)+\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\hat X_4(s,\alpha)ds\big(I_n-\tilde C_{vv}(\alpha)\hat D^\top(\alpha)\big)A_0$$

$$- A_1^\top\big(I_n - \hat{D}(\alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\big)\int\limits_{-\vartheta-\tau}^{0}\hat{X}_4^\top(s,\alpha)ds - \int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\hat{X}_4(s,\alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\hat{X}_4^\top(s-\vartheta,\alpha)ds, \quad \vartheta\in[-\tau,0], \quad (6.3)$$

и алгебраического уравнения

$$\hat{D}(\alpha)+\hat{D}^\top(\alpha) - C_x - \hat{D}(\alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\hat{D}^\top(\alpha) = 0, \quad \tilde{C}_{vv}(\alpha) = BC_{vv}^{-1}(\alpha)B^\top, \quad (6.4)$$

для решения которого матрица $K(\alpha)$, определяемая уравнением

$$\hat{D}(\alpha) = K(\alpha)\,(A_0+A_1) + C_x + \big(I_n - \hat{D}(\alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\big)\int\limits_{-\tau}^{0}\hat{X}_4^\top(s,\alpha)ds, \quad (6.5)$$

должна быть симметричной и положительно определенной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В интегральном уравнении (5.5) проведем замену (2.1). Имеем

$$\big(C_{vv}(\alpha) - D^\top(\alpha)B\big)v(t) + D^\top(\alpha)x(t) + \int\limits_{-\tau}^{0}X_4^\top(s,\alpha)x(t+s)ds$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\big(X_3^\top(s,\alpha) - X_4^\top(s,\alpha)B\big)v(t+s)ds = 0, \quad t\in\mathbb{R}^+. \quad (6.6)$$

Введем новые матричнозначные функции $\tilde{X}_1(\vartheta,\alpha) = X_1(\vartheta,\alpha) - X_2(\vartheta,\alpha)B$, $\tilde{X}_3(\vartheta,\alpha) = X_3(\vartheta,\alpha) - B^\top X_4(\vartheta,\alpha)$, $\vartheta\in[-\tau,0)$.

Используя уравнения (5.6), (5.7) и краевые условия (5.10), находим дифференциальное уравнение

$$\tilde{X}_1'(\vartheta,\alpha) = A_0^\top\tilde{X}_1(\vartheta,\alpha) - D(\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)\tilde{X}_3^\top(\vartheta,\alpha)$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}X_4(s-\vartheta,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)\tilde{X}_3^\top(s,\alpha)ds, \quad \vartheta\in[-\tau,0), \quad (6.7)$$

с краевым условием $\tilde{X}_1(-\tau,\alpha) = 0$. Исходя из уравнений (5.8) и (5.9), находим интегральное уравнение

$$\tilde{X}_3(\vartheta,\alpha) = \tilde{X}_1^\top(\vartheta,\alpha)A_0B - \int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\tilde{X}_3(s,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_3^\top(s-\vartheta,\alpha)ds, \quad \vartheta\in[-\tau,0). \quad (6.8)$$

Решение уравнения (6.7) определяется формулой

$$\tilde{X}_1(\vartheta,\alpha) = -\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\exp\big(A_0^\top(\vartheta-\xi)\big)\bigg(D(\alpha) + \int\limits_{\xi}^{\vartheta}\exp\big(A_0^\top(\xi-s)\big)X_4(\xi-s,\alpha)ds\bigg)$$

$$\times\, C_{vv}^{-1}(\alpha)\tilde{X}_3(\xi,\alpha)d\xi, \ \vartheta\in[-\tau,0). \quad (6.9)$$

Подставляя его в уравнение (6.8), получим интегральное уравнение

$$\tilde{X}_3(\vartheta,\alpha) = -\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\tilde{X}_3(\xi,\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)\bigg(\Big(D^\top(\alpha)\exp\big(A_0(\vartheta-\xi)\big)$$

$$+\int\limits_{\xi}^{\vartheta} X_4^\top(\xi - s, \alpha)\exp\left(A_0(\vartheta - s)\right) ds\Big)A_0B + X_3^\top(\xi - \vartheta, \alpha)\Big)d\xi, \quad \vartheta \in [-\tau, 0).$$

Неизвестная матричнозначная функция $\tilde{X}_3(\cdot, \alpha)$ является решением однородного интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Поэтому $\tilde{X}_3(\vartheta, \alpha) \equiv 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Из формулы (6.9) следует, что $\tilde{X}_1(\vartheta, \alpha) \equiv 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Отсюда находим $X_1(\vartheta, \alpha) = X_2(\vartheta, \alpha)B$ и $X_3(\vartheta, \alpha) = B^\top X_4(\vartheta, \alpha)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$.

Из (5.7), (5.9), (5.10) получим функционально-дифференциальное уравнение

$$X_2'(\vartheta, \alpha) = A_0^\top X_2(\vartheta, \alpha) + X_2^\top(-\vartheta - \tau, \alpha)A_1$$

$$- D(\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_4^\top(\vartheta) - \int\limits_{-\tau}^{\vartheta} X_4(s - \vartheta, \alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_4^\top(s)ds, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \tag{6.10}$$

с краевым условием $X_2(-\tau, \alpha) = K(\alpha)A_1$ и интегральное уравнение

$$X_4(\vartheta, \alpha) = X_2^\top(\vartheta, \alpha)A_0B + A_1^\top X_2(-\vartheta - \tau, \alpha)B$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta} X_4(s, \alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)X_4^\top(s - \vartheta, \alpha)dsB, \ \vartheta \in [-\tau, 0]. \tag{6.11}$$

Из (6.11) имеем $X_4(\vartheta, \alpha) = \hat{X}_4(\vartheta, \alpha)B$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, где матричнозначная функция $\hat{X}_4(\cdot, \alpha)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\hat{X}_4(\vartheta, \alpha) = X_2^\top(\vartheta, \alpha)A_0 + A_1^\top X_2(-\vartheta - \tau, \alpha) - \int\limits_{-\tau}^{\vartheta} \hat{X}_4(s, \alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\hat{X}_4{}^\top(s - \vartheta, \alpha)ds, \ \vartheta \in [-\tau, 0]. \tag{6.12}$$

Используя определение матрицы $D(\alpha)$, имеем $D(\alpha) = \hat{D}(\alpha)B$, где

$$\hat{D}(\alpha) = X_2(-0, \alpha) + C_x + K(\alpha)A_0. \tag{6.13}$$

Из (5.11) следует, что матрица $\hat{D}(\alpha)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению (6.4)

Преобразуя уравнение (6.10), выводим

$$X_2'(\vartheta, \alpha) = A_0^\top X_2(\vartheta, \alpha) + X_2^\top(-\vartheta - \tau, \alpha)A_1$$

$$- \hat{D}(\alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\hat{X}_4^\top(\vartheta, \alpha) - \int\limits_{-\tau}^{\vartheta} \hat{X}_4(s - \vartheta, \alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\hat{X}_4^\top(s, \alpha)ds, \quad \vartheta \in [-\tau, 0].$$

Учитывая уравнение (6.12), получим $X_2'(\vartheta, \alpha) = \big(I_n - \hat{D}(\alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\big)\hat{X}_4^\top(\vartheta, \alpha)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $X_2(-\tau, \alpha) = K(\alpha)A_1$. Отсюда находим

$$X_2(\vartheta, \alpha) = K(\alpha)A_1 + \big(I_n - \hat{D}(\alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\big)\int\limits_{-\tau}^{\vartheta} \hat{X}_4^\top(s, \alpha)ds, \quad \vartheta \in [-\tau, 0].$$

Тогда из (6.13) следует уравнение (6.5). Исключая $X_2(\cdot)$ в (6.12), получим нелинейное матричное интегральное уравнение

$$\hat{X}_4(\vartheta, \alpha) = A_1^\top K(\alpha)\left(A_0 + A_1\right) + \int\limits_{-\tau}^{\vartheta} \hat{X}_4(s, \alpha)ds\big(I_n - \tilde{C}_{vv}(\alpha)\hat{D}^\top(\alpha)\big)A_0$$

$$+ A_1^\top\big(I_n - \hat{D}(\alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\big)\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\hat{X}_4^\top(s,\alpha)ds - \int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\hat{X}_4(s,\alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\hat{X}_4^\top(s-\vartheta,\alpha)ds, \quad \vartheta\in[-\tau,0],$$

которое с учетом (6.5) преобразуется к виду (6.3).

Используя полученные результаты, из (6.6) находим

$$\big(C_{vv}(\alpha) - B^\top\hat{D}^\top(\alpha)B\big)v(t) + B^\top\hat{D}^\top(\alpha)x(t) + B^\top\int\limits_{-\tau}^{0}\hat{X}_4^\top(s,\alpha)x(t+s)ds = 0,\ t\in\mathbb{R}^+. \tag{6.14}$$

Покажем, что матрица $Y(\alpha) = C_{vv}(\alpha) - B^\top\hat{D}^\top(\alpha)B$ является невырожденной. Умножая равенство (6.4) слева и справа на матрицы $B^\top$ и B соответственно, имеем

$$B^\top\hat{D}(\alpha)B + B^\top\hat{D}^\top(\alpha)B - B^\top C_xB - B^\top\hat{D}(\alpha)\tilde{C}_{vv}(\alpha)\hat{D}^\top(\alpha)B = 0.$$

Последнее равенство преобразуется к виду $Y^\top(\alpha)C_{vv}^{-1}(\alpha)Y(\alpha) = \alpha^2 I_r$. Следовательно, $\det Y(\alpha)\neq 0$ и из (6.14) следует, что импульсы оптимального стабилизирующего управление определяются формулой

$$v^0(t,\alpha,x) = -\big(C_{vv}(\alpha) - B^\top\hat{D}^\top(\alpha)B\big)^{-1}B^\top\left(\hat{D}^\top(\alpha)x(t) + \int\limits_{-\tau}^{0}\hat{X}_4^\top(s,\alpha)x(t+s)ds\right), \quad t>0. \tag{6.15}$$

Для оптимального стабилизирующего управления задачи (1.1), (1.3) они определяют значения $v^0(t,\alpha,x)$ дифференцируемой функции импульсов и значения управлений $u^0(t,\alpha,x) = \dfrac{dv(t,\alpha,x)}{dt}$ при $t>0$. Поскольку $v^0(t,\alpha,x) = 0$ при $t\in[-\tau,0]$, то функция импульсов имеет одну точку разрыва первого рода при $t=0$. Для этой точки значение $v(+0,\alpha,x)$ определяется формулой (6.2). Оптимальное стабилизирующее управления задачи (1.1), (1.3) задается обобщенной функцией и определяется формулой (6.1).

Теорема доказана.

7. Асимптотика оптимального импульсного стабилизирующего управления

Пусть $A = A_0 + A_1$, $\operatorname{rank} B = n$. Рассмотрим матричное уравнение Риккати

$$\tilde{K}^1 A C_x^{-1}A^\top\tilde{K}^1 = B^{-1\top}B^{-1}. \tag{7.1}$$

Для существования симметричного положительно определенного матричного решения этого уравнения требуется, чтобы матрица

$$M = \begin{pmatrix} 0 & AC_x^{-1}A^\top \\ B^{\top-1}B^{-1} & 0\end{pmatrix}$$

не имела чисто мнимых собственных чисел [10, с. 161]. Справедливо равенство $\det(M-\lambda I_{2n}) = \det\left(\lambda^2 I_n - AC_x^{-1}A^\top B^{\top-1}B^{-1}\right)$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Следовательно, если все собственные числа матрицы $AC_x^{-1}A^\top B^{\top-1}B^{-1}$ положительные, то уравнение (7.1) имеет единственное симметричное положительно определенное матричное решение $\tilde{K}^1$.

Рассмотрим также матричное уравнение Ляпунова

$$\tilde{K}^2\tilde{A} + \tilde{A}^\top\tilde{K}^2 = F^0, \tag{7.2}$$

где $\tilde{A} = AC_x^{-1}A^\top\tilde{K}^1$, $F^0 = \tilde{K}^1AC_x^{-1}\left(\tau A_1^\top + I_n\right)B^{-1\top}B^{-1} + B^{-1\top}B^{-1}\left(\tau A_1 + I_n\right)C_x^{-1}A^\top\tilde{K}^1$. Если матрица $\tilde{A}$ имеет простые собственные числа λ_j, $j=\overline{1,n}$, для которых $\lambda_j+\lambda_k\neq 0$ при всех $j,k=\overline{1,n}$, то уравнение (7.2) имеет единственное симметричное матричное решение $\tilde K_0^2$ (см. [11, с. 82]).

Рассматривается задача нахождения асимптотики оптимального импульсного стабилизирующего управления задачи (1.1), (1.3) вблизи значения $\alpha=0$ регуляризующего параметра. Будем искать решение поставленной задачи при выполнении у с л о в и й А:

1) все собственные числа матрицы $AC_x^{-1}A^\top B^{\top -1}B^{-1}$ являются положительными;

2) матрица $AC_x^{-1}\tilde K^1$ имеет простые собственные числа λ_j, $j=\overline{1,n}$, для которых $\lambda_j+\lambda_k\neq 0$ при всех $j,k=\overline{1,n}$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* А. *Тогда система уравнений* (6.3)–(6.5) *имеет единственное решение при малых положительных значениях параметра α, аналитически зависящее от параметра α и допускающее асимптотические разложения*

$$\hat D(\alpha)=C_x+\alpha\tilde K^1A+\alpha^2\big(\tilde K_0^2A-\tau C_x^{-1}AA^\top\tilde K^1A_1\big)+O\left(\alpha^3\right), \tag{7.3}$$

$$\hat X(\vartheta,\alpha)=\alpha A_1^\top\tilde K^1A+\alpha^2\Big(A_1^\top\tilde K_0^2A+\vartheta A_1^\top C_x^{-1}\tilde K^1AA^\top\tilde K^1A_1 - (\vartheta+\tau)A_1^\top\tilde K^1AA^\top\tilde K^1C_x^{-1}A_0\Big)+O\left(\alpha^3\right),\quad \vartheta\in[-\tau,0], \tag{7.4}$$

$$K(\alpha)=\alpha\tilde K^1+\alpha^2\tilde K_0^2+O\left(\alpha^3\right). \tag{7.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В малой окрестности значения $\alpha=0$ матрица $\tilde C_{vv}(\alpha)=B\left(B^\top C_xB+\alpha^2I_n\right)^{-1}B^\top$ аналитически зависит от α и допускает асимптотическое представление $\tilde C_{vv}(\alpha)=C_x^{-1}-\alpha^2\tilde C_{vv}^1(\alpha)$.

Решение системы уравнений (6.3)–(6.5) ищем в асимптотической форме

$$\hat D(\alpha)=C_x+\alpha\tilde D(\alpha),\ K(\alpha)=\alpha\tilde K(\alpha),\quad \hat X_4(\vartheta,\alpha)=\alpha\tilde X_4(\vartheta,\alpha),\quad \vartheta\in[-\tau,0]. \tag{7.6}$$

Система уравнений (6.3)–(6.5) преобразуется к следующему виду:

$$C_x\tilde C_{vv}^1(\alpha)C_x-\tilde D(\alpha)\big(C_x^{-1}-\alpha^2\tilde C_{vv}^1(\alpha)\big)\tilde D^\top(\alpha)+\alpha\big(\tilde D(\alpha)\tilde C_{vv}^1(\alpha)C_x+C_x\tilde C_{vv}^1(\alpha)\tilde D^\top(\alpha)\big)=0, \tag{7.7}$$

$$\tilde D(\alpha)=\tilde K(\alpha)A+\alpha\tilde P(\alpha)\int\limits_{-\tau}^{0}\tilde X_4^\top(s,\alpha)ds, \tag{7.8}$$

$$\tilde X_4(\vartheta,\alpha)=A_1^\top\tilde D(\alpha)+\alpha\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\tilde X_4(s,\alpha)ds\tilde P^\top(\alpha)A_0-\alpha A_1^\top\tilde P(\alpha)\int\limits_{-\tau-\vartheta}^{0}\tilde X_4^\top(s,\alpha)ds - \alpha\int\limits_{-\tau}^{\vartheta}\tilde X_4(s,\alpha)\big(C_x^{-1}-\alpha^2\tilde C_{vv}^1(\alpha)\big)\tilde X_4^\top(s-\vartheta,\alpha)ds,\quad \vartheta\in[-\tau,0], \tag{7.9}$$

где $\tilde P(\alpha)=\tilde D(\alpha)\big(-C_x^{-1}+\alpha^2\tilde C_{vv}^1(\alpha)\big)+\alpha C_x\tilde C_{vv}^1(\alpha)$.

Исходя из принципа сжатых отображений [9, с. 213] для нелинейного интегрального уравнения (7.9) в пространстве функций $\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times n})$, приходим к выводу о существовании единственного решения этого уравнения $\tilde X_4(\vartheta,\tilde D(\alpha),\alpha)$, $\vartheta\in[-\tau,0]$, для произвольной фиксированной матрицы $\tilde D(\alpha)$, аналитически зависящего от малого параметра α и удовлетворяющего условию $\tilde X_4(\vartheta,\tilde D(\alpha),0)=A_1^\top\tilde D(\alpha)$, $\vartheta\in[-\tau,0]$. Нетрудно убедиться, что решение уравнения (7.9) принадлежит пространству $\mathbb{W}_2^1((-\tau,0),\mathbb{R}^{n\times n})$.

Используя найденное решение уравнения (7.9), преобразуем уравнение (7.8) к виду

$$\tilde D(\alpha)=\tilde K(\alpha)A+\alpha\tilde P(\alpha)\int\limits_{-\tau}^{0}\tilde X_4^\top(s,\tilde D(\alpha),\alpha)ds. \tag{7.10}$$

Применяя принцип сжатых отображений [9, с. 213] для нелинейного алгебраического уравнения (7.10) в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$, убеждаемся в существовании единственного решения этого уравнения $\tilde D(\tilde K(\alpha),\alpha)$ для произвольной фиксированной симметричной матрицы $\tilde K(\alpha)$, аналитически зависящего от малого параметра α и удовлетворяющего условию $\tilde D(\tilde K(\alpha),0)=\tilde K(\alpha)A$.

На основе найденного решения уравнения (7.10) преобразуем уравнение (7.7) следующим образом:

$$\begin{aligned} &C_x\tilde C^1_{vv}(\alpha)C_x-\tilde D(\tilde K(\alpha),\alpha)\big(C_x^{-1}-\alpha^2\tilde C^1_{vv}(\alpha)\big)\tilde D^\top(\tilde K(\alpha),\alpha)\\ &+\alpha\left(\tilde D(\tilde K(\alpha),\alpha)\tilde C^1_{vv}(\alpha)C_x+C_x\tilde C^1_{vv}(\alpha)\tilde D^\top(\tilde K(\alpha),\alpha)\right)=0. \end{aligned}\tag{7.11}$$

При $\alpha=0$ уравнение (7.11) совпадает с алгебраическим уравнением Риккати (7.1). Будем искать решение нелинейного матричного уравнения (7.11) в асимптотической форме

$$\tilde K(\alpha)=\tilde K^1+\alpha\tilde K^2(\alpha).\tag{7.12}$$

В результате замены (7.12) уравнение (7.11) запишем в виде соотношения

$$\begin{aligned} &\tilde K^1AC_x^{-1}\left(A^\top\tilde K^2(\alpha)-\tau A_1^\top\tilde K^1AA^\top C_x^{-1}+\alpha\tilde D^2(\tilde K^2(\alpha),\alpha)\right)\\ &+\big(\tilde K^2(\alpha)A-\tau C_x^{-1}AA^\top\tilde K^1A_1+\alpha\tilde D^2(\tilde K^2(\alpha),\alpha)\big)\tilde C_{vv}(\alpha)\big(A^\top\tilde K^1+\alpha\tilde D^{1\top}(\tilde K^2(\alpha),\alpha)\big)\\ &-\big(\tilde K^1A+\alpha\tilde D^1(\tilde K^2(\alpha),\alpha)\big)\tilde C^1_{vv}(\alpha)C_x-C_x\tilde C^1_{vv}(\alpha)\big(A^\top\tilde K^1+\alpha\tilde D^{1\top}(\tilde K^2(\alpha),\alpha)\big)\\ &=\alpha C_x\tilde C^2_{vv}(\alpha)C_x+\alpha\big(\tilde K^1A+\alpha\tilde D^1(\tilde K^2(\alpha),\alpha)\big)\tilde C^1_{vv}(\alpha)\big(A^\top\tilde K^1+\alpha\tilde D^{1\top}(\tilde K^2(\alpha),\alpha)\big), \end{aligned}\tag{7.13}$$

где $\tilde C_{vv}(\alpha)=C_x^{-1}-\alpha^2\tilde C^1_{vv}(\alpha)=C_x^{-1}-\alpha^2C_x^{-1}B^{\top-1}B^{-1}C_x^{-1}+\alpha^2\tilde C^2_{vv}(\alpha)$, $\tilde D(\tilde K(\alpha),\alpha)=\tilde K^1A+\alpha\tilde D^1(\tilde K^2(\alpha),\alpha)=\tilde K^1A+\alpha^2\left(\tilde K^2(\alpha)A-\tau C_x^{-1}AA^\top\tilde K^1A_1\right)+\alpha\tilde D^2(\tilde K^2(\alpha),\alpha)$.

Нелинейное матричное уравнение (7.13) представимо в виде

$$\tilde K^2(\alpha)\tilde A+\tilde A^\top\tilde K^2(\alpha)=F^0+\alpha F^1(\tilde K^2(\alpha),\alpha),\tag{7.14}$$

где матричнозначная функция $F^1(\cdot,\alpha):\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ аналитически зависит от параметра α.

Полагая в (7.14) $\alpha=0$, получим матричное уравнение Ляпунова (7.2). При выполнении условий леммы уравнение Ляпунова имеет единственное решение $\tilde K^2_0$.

Используя кронекереровские произведения уравнению (7.2), можно поставить в соответствие эквивалентную линейную систему уравнений [11]

$$\mathcal{A}\vec{K^2}=\vec{f^0},\tag{7.15}$$

где $\vec{K^2}$ — вектор размерности n^2, соответствующий матрице $\tilde K^2$ при обходе ее элементов по строкам, $\vec{K^2}=(\tilde K^2_{11},\dots,\tilde K^2_{1n},\tilde K^2_{21},\dots,\tilde K^2_{nn})^\top$, $\vec{f^0}$ — вектор размерности n^2, соответствующий матрице F^0 при обходе ее элементов по строкам, $\vec{f^0}=(F^0_{11},\dots,F^0_{1n},F^0_{21},\dots,F^0_{nn})^\top$, $\mathcal{A}$ — матрица размерности $n^2\times n^2$, задаваемая формулой $\mathcal{A}=I_n\bigotimes\tilde A^\top+\tilde A^\top\bigotimes I_n$.

Решение линейной системы (7.15) определяется формулой $\vec{K^2_0}=\mathcal{A}^{-1}\vec{f^0}$. Нелинейному матричному уравнению (7.14) ставится в соответствие эквивалентная нелинейная система уравнений

$$\mathcal{A}\vec{K^2}=\vec{f^0}+\alpha\vec{f^1}(\vec{K^2},\alpha),\tag{7.16}$$

где векторнозначная функция $\vec{f^1}(\cdot,\alpha)\colon\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}^{n^2}$ аналитически зависит от параметра α. Используя принцип сжатых отображений для нелинейной системы уравнений (7.16) в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$, убеждаемся в существовании единственного решения системы (7.16) $\vec{K^2}(\alpha)$, аналитически зависящего от малого параметра α и удовлетворяющего условию $\vec{K^2}(0)=\vec{K^2_0}$.

Проводя обратные преобразования, убеждаемся в существовании единственного решения системы уравнений (6.4)–(6.5), аналитически зависящее от параметра α. При нахождении коэффициентов асимптотических разложений (7.3)–(7.5) используется метод последовательных приближений.

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A. *Тогда оптимальное импульсное стабилизирующее управление задачи* (1.1), (1.3) *определяется асимптотической формулой*

$$u^0(t,\alpha,x) = \alpha^{-1}K^0(\alpha)\left(\frac{dx(t)}{dt} + \varphi(0)\delta(t)\right) + \int\limits_{-\tau}^{0} K(s,\alpha)\left(\frac{dx(t+s)}{ds} + \varphi(s)\delta(t)\right)ds,\ t>0. \quad (7.17)$$

Здесь коэффициенты задаются соотношениями

$$K^0(\alpha) = -\alpha\big(C_{vv}(\alpha) - B^\top \hat{D}^\top(\alpha)B\big)^{-1}B^\top \hat{D}^\top(\alpha), \quad (7.18)$$

$$K(s,\alpha) = -\big(C_{vv}(\alpha) - B^\top \hat{D}^\top(\alpha)B\big)^{-1}B^\top \hat{X}_4^\top(s,\alpha), \quad s\in[-\tau,0], \quad (7.19)$$

аналитически зависят от малого положительного параметра α *и допускают следующие асимптотики:*

$$K^0(\alpha) = \big(\tilde{K}^1\big)^{-1}A^{\top-1}C_x$$

$$+\,\alpha\Big(I_n - \big(\tilde{K}^1\big)^{-1}A^{\top-1}\big(A^\top\tilde{K}^2 - \tau A_1^\top\tilde{K}^1AA^\top C_x^{-1}\big)\big(\tilde{K}^1\big)^{-1}A^{\top-1}\Big)C_x + O(\alpha^2), \quad (7.20)$$

$$K(s,\alpha) = A_1 + O(s,\alpha), \quad s\in[-\tau,0]. \quad (7.21)$$

Доказательство. Оптимальное импульсное стабилизирующее управление задачи (1.1), (1.3) описано в теореме 2. Из (6.1), (6.2) следует

$$u^0(t,\alpha,x) = -\big(C_{vv}(\alpha) - B^\top\hat{D}^\top(\alpha)B\big)^{-1}B^\top\hat{D}^\top(\alpha)\left(\frac{dx(t)}{dt} + \varphi(0)\delta(t)\right)$$

$$-\,\big(C_{vv}(\alpha) - B^\top\hat{D}^\top(\alpha)B\big)^{-1}B^\top\int\limits_{-\tau}^{0}\hat{X}_4^\top(s,\alpha)\left(\frac{dx(t+s)}{ds} + \varphi(s)\delta(t)\right)ds, \quad t>0.$$

Полученная формула с учетом обозначений (7.18), (7.19) совпадает с (7.17).

Применяя лемму 3, находим

$$\big(C_{vv}(\alpha) - B^\top\hat{D}^\top(\alpha)B\big)^{-1}$$

$$= -\alpha^{-1}B^{-1}\big(\tilde{K}^1\big)^{-1}A^{\top-1}\Big(I_n + \alpha\big(\tilde{D}^{1\top}(\tilde{K}^2(\alpha),\alpha) - B^{\top-1}B^{-1}\big)\big(\tilde{K}^1\big)^{-1}A^{\top-1}\Big)^{-1}B^{\top-1},$$

где $\tilde{K}^2(\alpha)$ — решение уравнения (7.14), аналитически зависящее от параметра α. Из формул (7.18), (7.19) и результатов леммы 3 выводим, что коэффициенты $K^0(\alpha)$ и $K(s,\alpha)$, $s\in[-\tau,0]$, аналитически зависят от параметра α. Используя асимптотику функций $\tilde{D}^{1\top}(\tilde{K}^2(\alpha),\alpha)$, $\hat{D}^\top(\alpha)$ находим асимптотическую формулу (7.20). С учетом асимптотики функций $K^0(\alpha)$, $\hat{D}^\top(\alpha)$, $\hat{X}_4(s,\alpha)$, $s\in[-\tau,0]$, определяем асимптотическую формулу (7.21).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда импульсы оптимального стабилизирующего управление определяются асимптотической формулой*

$$v^0(t,\alpha,x) = \alpha^{-1}K^0(\alpha)x(t) + \int\limits_{-\tau}^{0}K(s,\alpha)x(t+s)ds, \quad t>0. \quad (7.22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из теоремы и формулы (6.15). □

Решение $x^0(t,\varphi,\alpha)$, $t\geq -\tau$, управляемой системы, отвечающее оптимальному импульсному стабилизирующему управлению, удовлетворяет условию $x^0(t,\varphi,\alpha)=\varphi(t)$, $-\tau\leq t\leq 0$, и дифференциальному уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt}=A_0x(t)+A_1x(t-\tau)+Bu^0(t,\alpha,x),\quad t>0.$$

С учетом формулы (7.17) последнее уравнение преобразуем к виду

$$\frac{dx(t)}{dt}=\mathrm{A}_0(\alpha)x(t)+\mathrm{A}_1(\alpha)x(t-\tau)+\int\limits_{-\tau}^{0}\mathrm{A}(s,\alpha)x(t+s)ds+f(\varphi,\alpha)\delta(t),\quad t>0,\tag{7.23}$$

где

$$\mathrm{A}_0(\alpha)=\big(C_x+\alpha^2B^{-1\top}B^{-1}\big)^{-1}\Big(\big(C_x-\hat{D}^\top(\alpha)+\alpha^2B^{-1\top}B^{-1}\big)A_0-\hat{X}_4^\top(0,\alpha)\Big),$$

$$\mathrm{A}_1(\alpha)=\alpha^2\big(C_x+\alpha^2B^{-1\top}B^{-1}\big)^{-1}B^{-1\top}B^{-1}A_1,$$

$$\mathrm{A}(s,\alpha)=\big(C_x+\alpha^2B^{-1\top}B^{-1}\big)^{-1}\frac{d\hat{X}_4^\top(s,\alpha)}{ds},\quad s\in[-\tau,0],$$

$$f(\varphi,\alpha)=-\big(C_x+\alpha^2B^{-1\top}B^{-1}\big)^{-1}\Bigg(\hat{D}^\top(\alpha)\varphi(0)+\int\limits_{-\tau}^{0}\hat{X}_4^\top(\alpha,s)\varphi(s)ds\Bigg).$$

Используя результаты леммы 3, находим асимптотику коэффициентов функционально-дифференциального уравнения (7.23). Имеем

$$\mathrm{A}_0(\alpha)=-\alpha C_x^{-1}A^\top\tilde{K}^1A+\alpha^2C_x^{-1}\left(\tau\left(A_1^\top B^{\top-1}B^{-1}A_0+A_0^\top B^{\top-1}B^{-1}A_1\right)-A^\top\tilde{K}^2A\right)+O(\alpha^3),$$

$$\mathrm{A}_1(\alpha)=\alpha^2C_x^{-1}B^{\top-1}B^{-1}A_1+O(\alpha^3),$$

$$\mathrm{A}(s,\alpha)=\alpha^2C_x^{-1}\big(A_1^\top-A_0^\top\big)B^{\top-1}B^{-1}A_1+O(\alpha^3,s),\quad s\in[-\tau,0],$$

$$f(\varphi,\alpha)=-\varphi(0)-\alpha C_x^{-1}A^\top\tilde{K}^1\Bigg(\varphi(0)+A_1\int\limits_{-\tau}^{0}\varphi(s)ds\Bigg)+O(\alpha^2,\varphi).$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* A. *Тогда для критерия качества переходных процессов* (1.3) *регуляризованной задачи оптимальной импульсной стабилизации* (1.1), (1.3) *справедлива асимптотическая формула*

$$J(\alpha)=O\left(\alpha\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение функционально-дифференциального уравнения (7.23) определяется формулой [12, с. 180]

$$x^0(t,\varphi,\alpha)=V(t,\alpha)\varphi(0)+\int\limits_0^\tau V(t-s,\alpha)\Bigg(\mathrm{A}_1(\alpha)\varphi(s-\tau)+\int\limits_{-\tau}^{0}\mathrm{A}(s_1,\alpha)\varphi(s+s_1)ds_1\Bigg)ds$$

$$+\int\limits_0^t V(t-s,\alpha)f(\varphi,\alpha)\delta(s)ds,\quad t>0,\tag{7.24}$$

где $V(t,\alpha)$, $t \geq -\tau$, — решение уравнения

$$\frac{dV(t)}{dt} = \mathrm{A}_0(\alpha)V(t) + \mathrm{A}_1(\alpha)V(t-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} \mathrm{A}(s,\alpha)V(t+s)ds, \quad t > 0,$$

с начальным условием $V(t) = 0$, $t \in [-\tau, 0)$, $V(0) = I_n$.

Асимптотика решения $V(t,\alpha)$ при $t \to +\infty$ определяется корнями характеристического уравнения

$$\det\left(\mathrm{A}_0(\alpha) + \mathrm{A}_1(\alpha)e^{-\lambda\tau} + \int\limits_{-\tau}^{0} \mathrm{A}(s,\alpha)e^{\lambda s}ds - \lambda I_n\right) = 0. \tag{7.25}$$

При нахождении корня характеристического уравнения с максимальной действительной частью используем асимптотические формулы для коэффициентов уравнения (7.23), заменяя его асимптотическим характеристическим уравнением $\det\left(\alpha C_x^{-1}A^\top \tilde{K}^1 A + \lambda I_n + O(\alpha^2)\right) = 0$. Матрица $\tilde{K}^1$ — положительно определена. Поэтому собственные числа матрицы $C_x^{-1}A^\top\tilde{K}^1 A$ — вещественные положительные числа. Тогда существует такое положительное число β, что действительные части всех корней характеристического уравнения (7.25) меньше числа $-\beta\alpha$ при всех достаточно малых значениях параметра α, а также существует постоянная $P > 1$ такая, что при всех достаточно малых значениях параметра α выполняется неравенство $|V(t,\alpha)| \leq Pe^{-\beta\alpha t}$, $t > 0$.

Значения критерия качества переходных процессов задаются формулами

$$J(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} \left(x^{0\top}(t,\varphi,\alpha)C_x x^0(t,\varphi,\alpha) + \alpha^2 v^{0\top}(t,\varphi,\alpha)v^0(t,\varphi,\alpha)\right)dt,$$

где $v^0(t,\varphi,\alpha) = v^0(t,\alpha,x^0(t,\varphi,\alpha))$, $t > 0$.

Преобразуя формулу (7.24), имеем

$$x^0(t,\varphi,\alpha) = V(t,\alpha)\left(\varphi(0) + f(\varphi,\alpha)\right)$$

$$+ \int\limits_{0}^{\tau} V(t-s,\alpha)\Bigg(\mathrm{A}_1(\alpha)\varphi(s-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} \mathrm{A}(s_1,\alpha)\varphi(s+s_1)ds_1\Bigg)ds, \quad t > 0.$$

Из этой формулы следует, что при всех достаточно малых значениях параметра α выполняется неравенство

$$|x^0(t,\varphi,\alpha)| \leq \alpha X^0 e^{-\beta\alpha t}\|\varphi\|_H, \quad t > 0, \tag{7.26}$$

для некоторой положительной постоянной X^0.

Из формулы (7.22) следует, что

$$v^0(t,\varphi,\alpha) = \alpha^{-1}K^0(\alpha)x^0(t,\varphi,\alpha) + \int\limits_{-\tau}^{0} K(s,\alpha)x^0(t+s,\varphi,\alpha)ds, \quad t > 0.$$

Используя неравенство (7.26) находим, что при всех достаточно малых значениях параметра α справедливо неравенство

$$|v^0(t,\varphi,\alpha)| \leq V^0 e^{-\beta\alpha t}\|\varphi\|_H, \quad t > 0,$$

для некоторой положительной постоянной V^0.

В результате находим оценки значений критерия качества переходных процессов

$$J(\alpha) \leq \frac{\alpha}{2\beta}\left(|C_x|X^{02} + V^{02}\right)\|\varphi\|_H.$$

Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
2. **Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K.** Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 48–88. doi: 10.1137/0313004 .
3. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optim. 1983. Vol. 21. no. 5. P. 95–135. doi: 10.1137/0321006 .
4. **Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.** Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 336 с.
5. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3-53.
6. **Андреева И.Ю., Сесекин А.Н.** Импульсная линейно-квадратичная задача оптимизации в системах с последействием // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 10–14.
7. **Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н.** Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 2013. № 11. С. 39–48.
8. **Долгий Ю.Ф.** К стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 92–105.
9. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
10. **Егоров А.И.** Уравнения Риккати. М.: СОЛОН-Пресс, 2017. 448 с.
11. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.
12. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

Поступила 4.10.2021
После доработки 1.02.2022
Принята к публикации 17.02.2022

Долгий Юрий Филиппович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

Сесекин Александр Николаевич
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор, зав. кафедрой
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: a.n.sesekin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. On the analytic construction of an optimal control in a system with time lags. *J. Appl. Math. Mech.*, 1962, vol. 26, no. 1, pp. 50–67. doi: 10.1016/0021-8928(62)90101-6 .
2. Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K. Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems. *SIAM J. Control*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 48–88. doi: 10.1137/0313004 .
3. Gibson J.S. Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations. *SIAM J. Control optimiz.*, 1983, vol. 21, no. 1, pp. 95–139. doi: 10.1137/0321006 .

4. Kolmanovskii V.B., Shaikhet L.E. *Control of systems with aftereffect.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1996, 336 p. ISBN: 0821803743 . Original Russian text published in Andreeva E.A., Kolmanovskii V.B., Shaikhet L.E. *Upravlenie sistemami s posledeistviem.* Moscow: Nauka Publ., 1992, 336 p.
5. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. doi: 10.1134/S0005117906010012 .
6. Andreeva I.Yu., Sesekin A.N. An impulse linear-quadratic optimization problem in systems with aftereffect. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1995, vol. 39, no. 10, pp. 8–12.
7. Zhelonkina N.I., Lozhnikov A.B., Sesekin A.N. On pulse optimal control of linear systems with aftereffect. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 11, pp. 1802–1809. doi: 10.1134/S0005117913110039 .
8. Dolgii Yu.F. Stabilization of linear autonomous systems of differential equations with distributed delay. *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 10, pp. 1813–1825. doi: 10.1134/S0005117907100098 .
9. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional analysis.* NY: Pergamon Press Ltd, 1982, 589 p. ISBN: 0-08-023036-9 . Original Russian text published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 744 p.
10. Egorov A.I. *Riccati equations.* Russian Academic Monographs, no. 5, Sofia: Pensoft, 2007, 383 p. ISBN: 9789546422965 . Original Russian text (2nd ed.) published in Egorov A.I. *Uravneniya Rikkati.* Moscow: SOLON-Press, 2017, 448 p.
11. Ikramov Kh.D. *Chislennoe reshenie matrichnykh uravnenii* [Numerical solution of matrix equations]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 192 p.
12. Hale J.K. *Theory of functional differential equations.* NY: Springer, 1977, 366 p. doi: 10.1007/978-1-4612-9892-2 . Translated to Russian under the title *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii.* Moscow: Mir Publ., 1984, 421 p.

Received October 4, 2021
Revised February 1, 2022
Accepted February 17, 2022

Yuriy Filippovich Dolgii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekateriburg, 620000, Russia, e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru .

Alexander Nikolaevich Sesekin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: a.n.sesekin@urfu.ru .

Cite this article as: Yu. F. Dolgii, A. N. Sesekin. Regularization analysis of a degenerate problem of impulsive stabilization for a system with time delay, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 74–95 .