ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 517.984

РЯДЫ ТЕЙЛОРА ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФАХ С МАЛЫМИ РЕБРАМИ[1]

Д. И. Борисов, Л. И. Газизова

В работе рассматривается эллиптический самосопряженный оператор второго порядка на графе с малыми ребрами. Такой граф получается путем сжатия в ε^{-1} раз одного заданного графа с последующим приклеиванием его к другому фиксированному графу; здесь ε — малый положительный параметр. Никаких существенных ограничений на эту пару графов не накладывается. На таком графе задается общий самосопряженный эллиптический оператор второго порядка, его дифференциальное выражение содержит производные всех порядков с переменными коэффициентами и переменный потенциал. Граничные условия в вершинах графа также выбираются общего вида. Все коэффициенты как в дифференциальном выражении, так и в граничных условиях могут дополнительно зависеть от малого параметра ε; данная зависимость предполагается аналитической. Ранее было установлено, что части резольвенты рассматриваемого оператора, соответствующие ее сужениям на ребра фиксированной длины и на малые ребра, аналитичны по ε как операторы в соответствующих пространствах, при этом сужение на малые ребра следует дополнительно обернуть парой операторов растяжения. Аналитичность означает возможность представления этих операторов в виде соответствующих рядов Тейлора. Первый основной результат настоящей работы — процедура, аналогичная согласованию асимптотических разложений, для рекуррентного определения всех коэффициентов данных рядов Тейлора. Второй основной результат — представление резольвенты сходящимся рядом, аналогичным ряду Тейлора с эффективными оценками остатков.

Ключевые слова: граф, малое ребро, эллиптический оператор, резольвента, аналитичность, ряд Тейлора, согласование асимптотических разложений.

D. I. Borisov, L. I. Gazizova. Taylor series for resolvents of operators on graphs with small edges.

We consider a second-order elliptic self-adjoint operator on a graph with small edges. Such a graph is obtained by compressing a given graph by a factor of ε^{-1} and then gluing it to another fixed graph; here ε is a small positive parameter. No significant constraints are imposed on this pair of graphs. On such a graph, a general second-order self-adjoint elliptic operator is specified; its differential expression contains derivatives of all orders with variable coefficients and a variable potential. The boundary conditions at the vertices of the graph are also chosen in a general form. All coefficients both in the differential expression and in the boundary conditions can additionally depend on the small parameter ε; this dependence is assumed to be analytical. As was established earlier, the parts of the resolvent of the operator corresponding to the restrictions of the resolvent to the edges of fixed length and to the small edges are analytic in ε as operators in the corresponding spaces, and the restriction to the small edges should be additionally wrapped by a pair of expansion operators. Analyticity means the possibility to represent these operators in the form of the corresponding Taylor series. The first main result of the paper is a procedure similar to the matching of asymptotic expansions for the recursive determination of all coefficients of these Taylor series. The second main result is the representation of the resolvent by a convergent series similar to a Taylor series with effective estimates of the residuals.

Keywords: graph, small edge, elliptic operator, resolvent, analyticity, Taylor series, matching of asymptotic expansions.

MSC: 34B45, 34L05, 34E15, 34E05

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-40-57

Введение

Одним из направлений современной спектральной теории операторов является теория квантовых графов, которая активно развивается в последние двадцать лет (см. например, монографии, [1; 2]). Теория возмущений для квантовых графов предлагает специфическое возмущение, связанное с геометрической структурой, — это малые ребра. Наиболее ранние

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-19995).

работы касались аппроксимации заданного краевого условия в некоторой вершине с помощью графа с малыми ребрами заданной структуры. Аппроксимация при этом понималась в смысле равномерной резольвентной сходимости соответствующих операторов на исходном и аппроксимирующем графах. Примером является статья [3], где было показано, что произвольное краевое условие в вершине может быть аппроксимировано в смысле равномерной резольвентной сходимости с помощью графа с малыми ребрами и δ-взаимодействиями во внутренних вершинах. Отметим еще известную модель о тканой мембране из теории усреднения, где речь идет о графе с увеличивающимся числом ребер уменьшающейся длины, который геометрически выглядит как мелкое тканое полотно. Операторы Шрёдингера на таких структурах сходятся, в подходящем смысле, к некоторым усредненным операторам на областях, к которым геометрически сходятся графы (см. [1, гл. 2, §2.4; 4]).

Результаты общего характера для графов с конечным числом малых ребер были получены совсем недавно в статьях [5; 6]. В [5] исследовался граф общего вида с произвольным конечным набором малых ребер. На этом графе рассматривался оператор Шрёдингера с граничными условиями общего вида. При некотором нерезонансном условии на структуру малых ребер был выписан предельный оператор и проанализированы вопросы равномерной резольвентной сходимости и сходимости спектров. В [6] рассматривался граф, у которого все ребра за исключением конечного числа имели малые длины, пропорциональную общему малому параметру, а остальные ребра были полубесконечными. На таком графе был изучен достаточно общий оператор второго порядка, чьи коэффициенты могли также зависеть от малого параметра и иметь по нему определенные сингулярности. Кроме того, здесь были исследованы вопросы равномерной резольвентной сходимости для такого оператора, а точнее, выписаны первые члены асимптотики резольвенты.

Результаты, полученные в [5; 6], по сути, открыли новое направление в изучении графов с малыми ребрами, и дальнейшие исследования были направлены на выяснение структуры зависимости резольвент и спектральных характеристик эллиптических операторов на таких графах от длин малых ребер. Для операторов Шрёдингера на серии различных простых модельных вопросы такого рода были изучены в работах [7–9]. В [7] рассматривался звездный граф, составленный из трех ребер, одно из которых было малым, а в единственной внутренней вершине ставилось условие типа δ- или δ'-взаимодействия. В [8; 9] к конечному графу, составленному из одной петли и двух фиксированных ребер приклеивался граф произвольной структуры, полученный сжатием из заданного конечного графа в ε^{-1} раз, где ε — малый параметр. В работах [7–9] обнаружилось, что резольвенты и спектры таких модельных операторов аналитическим образом зависят от малого параметра, характеризующего длины малых ребер; были построены первые члены соответствующих рядов Тейлора для резольвент, собственных значений и собственных функций. В [9] были найдены все коэффициенты рядов Тейлора для собственных значений и собственных функций рассматриваемого оператора. Подчеркнем, что факт наличия аналитичности резольвент, собственных значений и собственных функций по малому параметру оказывается достаточно неожиданным и интригующим, так как малое ребро является примером сингулярного возмущения. Как правило, при сингулярных возмущениях для собственных значений удается построить лишь асимптотические разложения и вопрос о сходимости таких рядов, а тем более об аналитической зависимости собственных значений от малого параметра, остается открытым (см., например, [10; 11]).

Получение результатов для модельных операторов мотивировало дальнейшее изучение общих операторов на графах общего вида с малыми ребрами. В недавней работе [12] рассматривался фиксированный граф общего вида, к которому приклеивался произвольный заданный граф с малыми ребрами, чьи длины были пропорциональны общему малому параметру ε. На таком графе исследовался эллиптический самосопряженный оператор второго порядка общего вида с переменными коэффициентами и общими граничными условиями. Коэффициенты дифференциального выражения и граничных условий могли дополнительно аналитически зависеть от малого параметра ε. Основной полученный результат [12] утверждал аналитичность по ε частей резольвенты, суженной на фиксированные ребра и на малые ребра, второе сужение дополнительно обертывалось парой операторов растяжения, которые фактически трансформировали малые ребра к конечным с одновременной заменой уравнения и граничных условий на этих ребрах и в соответствующих вершинах. Эти результаты позволили определить предельный оператор в смысле равномерной резольвентной сходимости и показать, что малые ребра можно заменить на одну вершину с некоторым предельным краевым условием. При этом был выявлен качественно новый эффект по сравнению с результатами [5; 6]: в предельном краевом условии может возникать часть, соответствующая условию Робена, причем коэффициенты в этом условии определяются следующими членами рядов Тейлора по ε в коэффициентах дифференциального выражения и граничных условий возмущенного оператора.

В работе [13] было продолжено изучение оператора из [12] и показана сходимость его спектра и соответствующих спектральных проекторов к аналогичным объектам предельного оператора. Также было установлено, что собственные значения возмущенного оператора, сходящиеся к предельным изолированным собственным значениям, аналитичны по ε. Аналогичное утверждение оказалось верным для соответствующих собственных функций. В [13] была предложена рекуррентная процедура определения коэффициентов рядов Тейлора для таких собственных значений и собственных функций возмущенного оператора в предположении, что предельное собственное значение простое. Эта процедура, по сути, была переносом классического метода согласования асимптотических разложений [11] на собственные значения рассматриваемых операторов на графах с малыми ребрами.

В настоящей работе мы продолжаем исследование общего оператора из статей [12; 13] и изучаем его резольвенту. Наш первый основной результат — рекуррентная процедура для коэффициентов рядов Тейлора частей резольвенты, аналитичность которых была установлена в [12]. Эта процедура является адаптацией такой же процедуры из [13], но для резольвенты рассматриваемого оператора. На основе этих результатов получено разложение типа равномерно сходящегося ряда Тейлора для резольвенты рассматриваемого оператора. Выписаны эффективные оценки остатков этого ряда в различных операторных нормах.

1. Задача и результаты

1.1. Постановка задачи

Основной объект исследования настоящей статьи — самосопряженный эллиптический оператор второго порядка на сингулярном возмущенном графе. Суть сингулярного возмущения состоит в наличии малых ребер. Граф с малыми ребрами получается путем приклеивания определенным образом малого графа к заданному графу с ребрами фиксированной длины. Последний граф обозначается символом Γ и является конечным метрическим графом. Это означает, что в нем содержится конечное число ребер и вершин, на каждом ребре введены направление и соответствующая переменная. В качестве меры на каждом ребре выбирается стандартная мера Лебега. У графа Γ допускается наличие ребер бесконечной длины. Одновременно считаем, что этот граф не содержит изолированных ребер и вершин.

Через γ мы обозначаем еще один конечный метрический граф без изолированных вершин и ребер, причем теперь уже предполагаем, что граф γ содержит ребра только конечной длины. Граф γ сжимаем в ε^{-1} раз, т. е. каждое его ребро e длины $|\mathrm{e}|$ заменяем на ребро $\varepsilon|\mathrm{e}|$ с сохранением остальной структуры графа. Получившийся граф обозначаем через γ_ε.

Упомянутый выше граф с малыми ребрами получается приклеиванием графа γ_ε к графу Γ. Процедура приклеивания выглядит следующим образом. В графе Γ произвольно выберем вершину, которую далее обозначаем через M_0. Степень этой вершины, т. е. число ребер, выходящих из M_0, обозначаем через d_0. Далее произвольно выбираем n вершин M_j, $j = 1, \ldots, n$, в графе γ_ε, где $n \leqslant d_0$ — натуральное число.

Ребра e_i, $i = 1, \ldots, d_0$, графа Γ, выходящие из вершины M_0, произвольно разбиваем на n

непустых групп $\{\mathrm{e}_i\}_{i\in J_j}$, $j=1,\ldots,n$, где J_j — непустые непересекающиеся множества индексов и $\bigcup_{j=1}^n J_j=\{1,\ldots,n\}$. Далее заменим вершину M_0 на ее n копий, по одной для каждой группы $\{\mathrm{e}_i\}_{i\in J_j}$, и отождествим эти копии с выбранными вершинами M_j графа γ_ε. В результате получаем новый граф, который далее обозначается через Γ_ε. В этом графе вершины M_j склеивают подграфы Γ и g_ε, а именно, из этих вершин выходят как соответствующие ребра графа γ_ε, так и ребра $\{\mathrm{e}_i\}_{i\in J_j}$ графа Γ.

Всюду далее мы часто будем отождествлять исходные графы Γ и γ_ε с соответствующими подграфами графа Γ_ε, для которых будут использоваться те же обозначения. Направления и переменные на ребрах Γ и γ_ε после описанной склейки сохраняются. Поэтому каждая функция, заданная на графах Γ и γ_ε, одновременно считается заданной и на соответствующих подграфах графа Γ_ε. И наоборот, функцию, заданную на Γ_ε, полагаем заданной и на графах Γ и γ_ε.

На графе Γ_ε мы рассматриваем эллиптический оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ с дифференциальным выражением

$$\hat{\mathcal{H}}(\varepsilon):=-\frac{d}{dx}p_\varepsilon\frac{d}{dx}+\mathrm{i}\left(\frac{d}{dx}q_\varepsilon+q_\varepsilon\frac{d}{dx}\right)+V_\varepsilon, \tag{1.1}$$

где i — мнимая единица, а коэффициенты задаются равенствами

$$p_\varepsilon:=\begin{cases}p_\Gamma(\,\cdot\,,\varepsilon) & \text{на}\quad\Gamma,\\ \mathcal{S}_\varepsilon p_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon) & \text{на}\quad\gamma_\varepsilon,\end{cases}\qquad q_\varepsilon:=\begin{cases}q_\Gamma(\,\cdot\,,\varepsilon) & \text{на}\quad\Gamma,\\ \varepsilon^{-1}\mathcal{S}_\varepsilon q_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon) & \text{на}\quad\gamma_\varepsilon,\end{cases}$$

$$V_\varepsilon:=\begin{cases}V_\Gamma(\,\cdot\,,\varepsilon) & \text{на}\quad\Gamma,\\ \varepsilon^{-2}\mathcal{S}_\varepsilon V_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon) & \text{на}\quad\gamma_\varepsilon.\end{cases}$$

Здесь $p_\Gamma=p_\Gamma(\,\cdot\,,\varepsilon)\in W_\infty^1(\Gamma)$, $q_\Gamma=q_\Gamma(\,\cdot\,,\varepsilon)\in W_\infty^1(\Gamma)$, $V_\Gamma=V_\Gamma(\,\cdot\,,\varepsilon)\in L_2(\Gamma)$ и $p_\gamma=p_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon)\in W_\infty^1(\gamma)$, $q_\gamma=q_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon)\in W_\infty^1(\gamma)$, $V_\gamma=V_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon)\in L_2(\gamma)$ — некоторые вещественные функции, заданные соответственно на графах Γ и γ и аналитичные по ε в норме указанных пространств, а $\mathcal{S}_\varepsilon: L_2(\gamma)\to L_2(\gamma_\varepsilon)$ — линейный оператор, задаваемый формулой

$$(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x):=u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\quad x\in\mathrm{e}_\varepsilon, \tag{1.2}$$

на каждом ребре e_ε графа γ_ε.

Дифференциальное выражение $\hat{\mathcal{H}}(\varepsilon)$ считаем равномерно эллиптическим: с учетом аналитичности функций p_Γ и p_γ по ε мы предполагаем выполнение неравенств

$$p_\Gamma(x,0)\geqslant c_{\mathcal{H}}\quad\text{п.в. на}\quad\Gamma,\quad p_\gamma(\xi,0)\geqslant c_{\mathcal{H}}\quad\text{п.в. на}\quad\gamma$$

с некоторой фиксированной константой $c_{\mathcal{H}}>0$.

Граничные условия для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ задаются следующим образом. Для произвольной вершины $M\in\Gamma_\varepsilon$ степени $d(M)>0$ через $\mathrm{e}_i(M)$, $i=1,\ldots,d(M)$, обозначаем ребра, выходящие из M. Введем пару $d(M)$-мерных векторов

$$\mathcal{U}_M(u):=\begin{pmatrix}u_1(M)\\ \vdots\\ u_{d(M)}(M)\end{pmatrix},\quad \mathcal{U}_M'(u):=\begin{pmatrix}\dfrac{du_1}{dx_1}(M)\\ \vdots\\ \dfrac{du_{d(M)}}{dx_{d(M)}}(M)\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где x_i — переменная на ребре e_i. Граничные условия в вершине $M\in\Gamma_\varepsilon$ задаются в общем виде:

$$\mathrm{A}_M(\varepsilon)\mathcal{U}_M(u)+\mathrm{B}_M(\varepsilon)\mathcal{U}_M'(u)=0, \tag{1.4}$$

где $\mathrm{A}_M(\varepsilon)$ и $\mathrm{B}_M(\varepsilon)$ — аналитичные по ε матрицы размера $d(M)\times d(M)$.

Строго $\mathcal{H}_\varepsilon$ определяется как неограниченный оператор в $L_2(\Gamma_\varepsilon)$, чье действие описывается дифференциальным выражением (1.1) на области определения, составленной из функций из пространства $\dot W_2^2(\Gamma_\varepsilon)$, удовлетворяющих граничным условиям (1.4); здесь принято обозначение $\dot W_2^j(\,\cdot\,) := \bigoplus\limits_{\mathrm{e}\in\,\cdot} W_2^j(\mathrm{e})$, $j = 1,2$. Все остальные операторы, которые далее используются в работе, строго определяются аналогичным образом на основе своих дифференциальных выражений и граничных условий.

Мы ограничиваем наше рассмотрение самосопряженными операторами, что означает необходимость наложить определенные условия на коэффициенты дифференциального выражения (1.1) и матрицы в граничных условиях (1.4). Как было установлено в [12], критерием самосопряженности оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ является одновременное выполнение равенства

$$\operatorname{rank}\big(\mathrm{A}_M(0)\ \ \mathrm{B}_M(0)\big) = d(M) \tag{1.5}$$

и наличие самосопряженности матрицы

$$\mathrm{A}_M(\varepsilon)\Pi_M^{-1}(\varepsilon)\mathrm{B}_M^*(\varepsilon) + \mathrm{i}\mathrm{B}_M(\varepsilon)\Pi_M^{-1}(\varepsilon)\Theta_M(\varepsilon)\Pi_M^{-1}(\varepsilon)\mathrm{B}_M^*(\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned}\Pi_M(\varepsilon) &:= \operatorname{diag}\big\{\nu_i(M)p_\varepsilon\big|_{\mathrm{e}_i(M)}(M)\big\}_{i=1,\ldots,d(M)},\\ \Theta_M(\varepsilon) &:= \operatorname{diag}\big\{\nu_i(M)q_\varepsilon\big|_{\mathrm{e}_i(M)}(M)\big\}_{i=1,\ldots,d(M)},\end{aligned} \tag{1.6}$$

$\mathrm{e}_i(M)$ — ребра, выходящие из вершины M, а числа $\nu_i(M)$ определяются так: $\nu_i(M) := 1$, если направление на ребре $\mathrm{e}_i(M)$ внутрь от вершины M совпадает с исходно выбранным направлением на этом ребре, и $\nu_i(M) := -1$, если эти направления противоположны.

Граничное условие (1.4), по сути, не изменяется при умножении его слева на невырожденные квадратные матрицы размера $d(M) \times d(M)$. С учетом равенства (1.5) такую свободу в выборе матриц $\mathrm{A}_M(\varepsilon)$ и $\mathrm{B}_M(\varepsilon)$ частично ограничим следующим условием. Обозначим $r(M) := \operatorname{rank}\mathrm{B}_M(0)$ и будем предполагать, что первые $r(M)$ строк матрицы $\mathrm{B}_M(0)$ линейно независимы, а последние $d(M) - r(M)$ строк обращаются в нуль. Одновременно считаем, что последние $d(M) - r(M)$ строк матрицы $\mathrm{A}_M(0)$ не равны нулю.

Основной целью настоящей работы является детальное описание зависимости резольвенты оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ от параметра ε. Для формулировки основного результата нам необходимо ввести вспомогательные обозначения и процитировать известные результаты из [12]. Это будет сделано в подразд. 1.2 и 1.3.

1.2. Вспомогательные обозначения и основное условие

Для удобства и для упрощения ряда технических вычислений всюду в работе считаем, что направления на ребрах e_i, $i = 1,\ldots,d_0$, графа Γ, выходящих из вершины M_0, выбраны внутрь ребер от вершины M_0. Если среди ребер e_i имеется петля, то, чтобы добиться выполнения такого условия, на петлях введем дополнительную искусственную вершину, на которой поставим стандартное условие Кирхгофа. Такая вершина не изменяет ни оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$, ни его резольвенту, ни его спектр.

Введем еще один вспомогательный граф γ_∞, который получается прикреплением ребер бесконечной длины e_i^∞, $i \in J_j$, $j = 1,\ldots,n$, к вершинам M_j, $j = 1,\ldots,n$, графа γ. Переменная на графе γ обозначается через ξ. На графе γ_∞ определяется вспомогательный оператор $\mathcal{H}_\infty$. Это неограниченный оператор в $L_2(\gamma_\infty)$ с дифференциальным выражением

$$\begin{aligned}&\hat{\mathcal{H}}_\infty := -\frac{d}{d\xi}p_\gamma(\,\cdot\,,0)\frac{d}{d\xi} + \mathrm{i}\Big(\frac{d}{d\xi}q_\gamma(\,\cdot\,,0) + q_\gamma(\,\cdot\,,0)\frac{d}{d\xi}\Big) + V_\gamma(\,\cdot\,,0) \quad \text{на} \quad \gamma,\\ &\hat{\mathcal{H}}_\infty := -\mathsf{p}_i(0)\frac{d^2}{d\xi^2} \quad \text{на} \quad \mathrm{e}_i^\infty, \quad i \in J_j, \quad j = 1,\ldots,n, \quad \mathsf{p}_i(\varepsilon) := p_\Gamma\big|_{\mathrm{e}_i}(M_0,\varepsilon),\end{aligned}$$

и краевыми условиями

$$\mathrm{A}_M^{(0)}\mathcal{U}_M(u)+\mathrm{B}_M^{(0)}\mathcal{U}_M'(u)=0 \quad \text{в вершинах} \quad M\in\gamma_\infty.$$

Здесь векторы $\mathcal{U}_M(u)$ и $\mathcal{U}_M'(u)$ вводятся аналогично (1.3) с заменой производных $\dfrac{du_i}{dx_i}$ на $\dfrac{du_i}{d\xi_i}$. Матрицы $\mathrm{A}_M^{(0)}$ и $\mathrm{B}_M^{(0)}$ определяются формулами

$$\mathrm{A}_M^{(0)}:=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{A}_M^-(0)\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}_M^{(0)}:=\begin{pmatrix}\mathrm{B}_M^+(0)\\ \dfrac{d\mathrm{B}_M^-}{d\varepsilon}(0),\end{pmatrix}$$

где $\mathrm{A}_M^-(\cdot)$ и $\mathrm{B}_M^-(\cdot)$ — матрицы, составленные из последних $d(M)-r(M)$ строк матриц $\mathrm{A}_M(\cdot)$ и $\mathrm{B}_M(\cdot)$, а матрица $\mathrm{B}_M^+(\cdot)$ образована первыми $r(M)$ строками матрицы B_M. В [12] было показано, что оператор $\mathcal{H}_\infty$ самосопряжен, а его существенный спектр есть полуось $[0,+\infty)$.

Основное условие, налагаемое на оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$, выражается в терминах оператора $\mathcal{H}_\infty$:

(A) *Оператор $\mathcal{H}_\infty$ не имеет вложенных собственных значений на краю своего существенного спектра.*

Эквивалентно условие (A) можно переформулировать следующим образом. Рассмотрим краевую задачу

$$\hat{\mathcal{H}}_\infty\psi=0 \ \text{ на } \ \gamma_\infty,\quad \mathrm{A}_M^{(0)}\mathcal{U}_M(\psi)+\mathrm{B}_M^{(0)}\mathcal{U}_M'(\psi)=0 \ \text{ в вершинах } \ M\in\gamma_\infty. \tag{1.7}$$

В силу определения дифференциального выражения $\hat{\mathcal{H}}_\infty$ на полубесконечных ребрах e_i^∞ решение этой задачи на данных ребрах дается линейной функцией. Поэтому отсутствие вложенного собственного значения на краю существенного спектра оператора $\mathcal{H}_\infty$ эквивалентно отсутствию нетривиальных решений $\psi\in\dot{W}_2^2(\gamma)\oplus\bigoplus\limits_{i\in J_j,\ j=1,\dots,n} W_{2,loc}^2(\mathrm{e}_i^\infty)$ у задачи (1.7), которые тождественно обращаются в нуль на всех ребрах e_i^∞. Одновременно с этим не исключается наличие нетривиальных решений, постоянных на этих ребрах и не обращающихся одновременно в нуль на всех ребрах e_i^∞. Другими словами, на краю существенного спектра оператора $\mathcal{H}_\infty$ допускается наличие виртуального уровня.

Пусть $\psi^{(j)}$, $j=1,\dots,k$, — линейно независимые решения задачи (1.7), постоянные на ребрах e_i^∞. По условию (A) эти функции не обращаются тождественно в нуль одновременно на всех ребрах e_i^∞. Ясно, что $k\leqslant d_0$. Если таких решений нет, то полагаем $k:=0$.

Для произвольной функции u, заданной на ребрах e_i^∞, $i\in J_j$, $j=1,\dots,n$, по крайней мере, в окрестности вершины M_j и непрерывной вплоть до этой вершины, введем обозначение

$$\mathcal{U}_\gamma(u):=\Big(u\big|_{\mathrm{e}_i^\infty}(M_j)\Big)_{i\in J_j,\ j=1,\dots,n}.$$

Обозначим: $\Psi^{(j)}:=\mathcal{U}_\gamma(\psi^{(j)})$, $j=1,\dots,k$, причем функции $\psi^{(j)}$ выберем так, чтобы введенные векторы $\Psi^{(j)}$ оказались ортонормированными в $\mathbb{C}^{d_0}$. Если $k<d_0$, то мы дополнительно выберем произвольные векторы $\Psi^{(j)}\in\mathbb{C}^{d_0}$, $j=k+1,\dots,d_0$, так, чтобы вся совокупность векторов $\Psi^{(j)}\in\mathbb{C}^{d_0}$, $j=1,\dots,d_0$, образовала ортонормированный базис в $\mathbb{C}^{d_0}$. Это означает, что матрица $\Psi:=\begin{pmatrix}\Psi^{(1)} & \dots & \Psi^{(k)} & \Psi^{(k+1)} & \dots & \Psi^{(d_0)}\end{pmatrix}$ унитарна.

Важную роль будет играть еще один вспомогательный оператор на еще одном графе, обозначаемом γ_{ex} и полученном путем прикрепления единичных ребер e_i^{ex}, $i\in J_j$, $j=1,\dots,n$, к вершинам M_j, $j=1,\dots,n$, графа γ. Вершины M_j будем считать началом ребер e_i^∞, т.е. направление на этих ребрах выбирается внутрь от M_j. Вершины, являющиеся концами ребер e_i^∞, обозначим через M_i^{ex}, $i\in J_j$, $j=1,\dots,n$. Упомянутый вспомогательный оператор обозначается через $\mathcal{H}_{ex}(\varepsilon)$ и определяется дифференциальным выражением

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{H}}_{ex}(\varepsilon) := -\frac{d}{d\xi}p_\gamma(\cdot,\varepsilon)\frac{d}{d\xi} + \mathrm{i}\Big(\frac{d}{d\xi}q_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon) + q_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon)\frac{d}{d\xi}\Big) + V_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon)u \quad \text{на} \quad \gamma,\\
&\hat{\mathcal{H}}_{ex}(\varepsilon) := -\mathsf{p}_i(\varepsilon)\frac{d^2}{d\xi_i^2} + 2\mathrm{i}\varepsilon\mathsf{q}_i(\varepsilon)\frac{d}{d\xi_i} \quad \text{на} \quad \mathrm{e}_i^{ex}, \quad i \in J_j, \quad j = 1,\ldots,n,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

и краевыми условиями

$$\varepsilon \mathrm{A}_M(\varepsilon)\mathcal{U}_M(u) + \mathrm{B}_M(\varepsilon)\mathcal{U}'_M(u) = 0 \tag{1.9}$$

в вершинах $M \in \gamma_\infty$ и краевыми условиями третьего типа

$$\Pi_{\Gamma,M_0}(\varepsilon)\mathcal{U}'_{ex}(u) - \mathrm{i}\varepsilon\Theta_{\Gamma,M_0}(\varepsilon)\mathcal{U}_{ex}(u) = 0$$

в вершинах M_i^{ex}, где обозначено

$$\mathcal{U}'_{ex}(u) := \begin{pmatrix} \dfrac{du\big|_{\mathrm{e}_1^{ex}}}{d\xi_1}(M_1^{ex}) \\ \vdots \\ \dfrac{du\big|_{\mathrm{e}_{d_0}^{ex}}}{d\xi_{d_0}}(M_{d_0}^{ex}) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{U}_{ex}(u) := \begin{pmatrix} u(M_1^{ex}) \\ \vdots \\ u(M_{d_0}^{ex}) \end{pmatrix}, \quad \mathsf{q}_i(\varepsilon) := \nu_i(M_0)q_\Gamma\big|_{\mathrm{e}_i}(M_0,\varepsilon).$$

В [12] было показано, что оператор $\mathcal{H}_{ex}(\varepsilon)$ самосопряжен.

1.3. Части резольвенты и известные результаты

Пусть $\mathcal{P}_\Gamma : L_2(\Gamma_\varepsilon) \to L_2(\Gamma)$ и $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} : L_2(\Gamma_\varepsilon) \to L_2(\gamma_\varepsilon)$ — операторы сужения на подграфы Γ и γ_ε, а именно $\mathcal{P}_\Gamma f := f\big|_\Gamma$, $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f := f\big|_{\gamma_\varepsilon}$. Ясно, что

$$L_2(\Gamma_\varepsilon) = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma_\varepsilon), \quad \mathcal{P}_\Gamma \oplus \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} = \mathcal{I}_{\Gamma_\varepsilon}, \tag{1.10}$$

где $\mathcal{I}_{\Gamma_\varepsilon}$ — тождественный оператор в $L_2(\Gamma_\varepsilon)$.

Так как оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ самосопряжен, его резольвента $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ корректно определена для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Поэтому можно ввести пару операторов

$$\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda) := \mathcal{P}_\Gamma(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}(\mathcal{I}_\Gamma \oplus \mathcal{S}_\varepsilon), \quad \mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda) := \mathcal{S}_\varepsilon^{-1}\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon}(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}(\mathcal{I}_\Gamma \oplus \mathcal{S}_\varepsilon),$$

где $\mathcal{I}_\Gamma$ — тождественный оператор в $L_2(\Gamma)$. Эти операторы линейны и ограничены как действующие из $L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma)$ соответственно в $\dot{W}_2^2(\Gamma)$ и $\dot{W}_2^2(\gamma)$.

Поясним действие операторов $\mathcal{R}_\Gamma$ и $\mathcal{R}_\gamma$. Для произвольной пары функций $(f_\Gamma, f_\gamma) \in L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma)$ построим функцию $f \in L_2(\Gamma_\varepsilon)$ по правилу $f := f_\Gamma$ на Γ и $f := \mathcal{S}_\varepsilon f_\gamma$ на γ_ε. Далее к f применяется резольвента $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ и рассматриваются сужения результата на подграфы Γ и γ_ε, т. е. функции $\mathcal{P}_\Gamma(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}f$ и $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon}(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}f$. Первая из этих функций — это действие оператора $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)$ на (f_Γ, f_γ). Ко второму сужению дополнительно применим оператор $\mathcal{S}_\varepsilon^{-1}$: полученная функция $\mathcal{S}_\varepsilon^{-1}\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon}(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}f$ — это действие оператора $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)$ на (f_Γ, f_γ). Отметим еще формулу

$$(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} = \big(\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda) \oplus \mathcal{S}_\varepsilon\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)\big)(\mathcal{P}_\Gamma \oplus \mathcal{S}_\varepsilon^{-1}\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon}). \tag{1.11}$$

Далее нам понадобится еще один вспомогательный оператор на графе Γ, рассматриваемом как отдельный граф. Этот оператор обозначается через $\mathcal{H}_0$, и ему соответствуют дифференциальное выражение $\hat{\mathcal{H}}(0)$ и краевые условия

$$\mathrm{A}_M^{(0)}\mathcal{U}_M(u) + \mathrm{B}_M^{(0)}\mathcal{U}'_M(u) = 0 \quad \text{в вершинах} \quad M \in \Gamma. \tag{1.12}$$

Для $M\neq M_0$ матрицы $\mathrm{A}_M^{(0)}$ и $\mathrm{B}_M^{(0)}$ вводятся просто: $\mathrm{A}_M^{(0)}:=\mathrm{A}_M(0)$, $\mathrm{B}_M^{(0)}:=\mathrm{B}_M(0)$. В случае $M=M_0$ описание матриц $\mathrm{A}_{M_0}^{(0)}$ и $\mathrm{B}_{M_0}^{(0)}$ гораздо более громоздко. А именно эти матрицы размера $d_0\times d_0$, и они имеют вид

$$\mathrm{A}_{M_0}^{(0)}:=\begin{pmatrix}\mathrm{Q} & 0\\ 0 & \mathrm{I}_{d_0-k}\end{pmatrix}\Psi^*+\mathrm{i}\begin{pmatrix}\mathrm{I}_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Psi^*\Theta_{\Gamma,M_0}(0),\quad \mathrm{B}_{M_0}^{(0)}:=-\begin{pmatrix}\mathrm{I}_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Psi^*\Pi_{\Gamma,M_0}(0),\tag{1.13}$$

где для произвольного d символом I_d обозначена единичная матрица размера $d\times d$, а символом 0 — нулевые матрицы соответствующих размеров. Матрицы Π_{Γ,M_0} и Θ_{Γ,M_0} описываются формулами

$$\Pi_{\Gamma,M_0}(\varepsilon):=\operatorname{diag}\left\{\nu_i(M_0)p_\Gamma\big|_{\mathrm{e}_i}(M_0,\varepsilon)\right\}_{i=1,\ldots,d_0},\quad \Theta_{\Gamma,M_0}(\varepsilon):=\operatorname{diag}\left\{\nu_i(M_0)q_\Gamma\big|_{\mathrm{e}_i}(M_0,\varepsilon)\right\}_{i=1,\ldots,d_0},$$

где, напомним, e_i — ребра графа Γ, выходящие из вершины M_0, числа $\nu_i(M_0)$ определены как и в (1.6). Матрица Q имеет вид

$$\mathrm{Q}:=\begin{pmatrix}Q^{(11)} & \ldots & Q^{(k1)}\\ \vdots & & \vdots\\ Q^{(1k)} & \ldots & Q^{(kk)}\end{pmatrix},\quad Q^{(ij)}:=Q_\gamma^{(ij)}+\sum_{M\in\gamma_\infty}Q_M^{(ij)}.\tag{1.14}$$

Здесь

$$\begin{aligned}Q_\gamma^{(ij)}:=&\Big(\frac{dp_\gamma}{d\varepsilon}(\,\cdot\,,0)\frac{d\psi^{(i)}}{d\xi},\frac{d\psi^{(j)}}{d\xi}\Big)_{L_2(\gamma)}+\Big(\frac{d\psi^{(i)}}{d\xi},\mathrm{i}\frac{dq_\gamma}{d\varepsilon}(\,\cdot\,,0)\psi^{(j)}\Big)_{L_2(\gamma)}\\ &+\Big(\mathrm{i}\frac{dq_\gamma}{d\varepsilon}(\,\cdot\,,0)\psi^{(i)},\frac{d\psi^{(j)}}{d\xi}\Big)_{L_2(\gamma)}+\Big(\frac{dV_\gamma}{d\varepsilon}(\,\cdot\,,0)\psi^{(i)},\psi^{(j)}\Big)_{L_2(\gamma)},\end{aligned}\tag{1.15}$$

$$Q_M^{(ij)}:=\big(\mathcal{L}_M(\psi^{(i)}),\mathcal{U}_M(\psi^{(j)})\big)_{\mathbb{C}^{d(M)}}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\mathcal{E}_M(\psi^{(i)}),\mathcal{V}_M(\psi^{(j)})\Big)_{\mathbb{C}^{d(M)}},\tag{1.16}$$

$$\mathcal{L}_M(\psi^{(i)}):=\frac{d\Pi_{\gamma,M}}{d\varepsilon}(0)\mathcal{U}_M'(\psi^{(i)})-\mathrm{i}\frac{d\Theta_{\gamma,M}}{d\varepsilon}(0)\mathcal{U}_M(\psi^{(i)})+\big(\mathrm{U}_M+\mathrm{I}_{d(M)}\big)^{-1}\mathrm{P}_M^{\perp}\mathcal{E}_M(\psi^{(i)}),\tag{1.17}$$

$$\mathcal{E}_M(\,\cdot\,):=2\mathrm{i}\mathrm{C}_M\Big(\mathrm{A}_M^{(1)}\mathcal{U}_M(\,\cdot\,)+\mathrm{B}_M^{(1)}\mathcal{U}_M'(\,\cdot\,)\Big),\tag{1.18}$$

$$\mathrm{U}_M:=-\mathrm{C}_M\big(\tilde{\mathrm{A}}_M+\mathrm{i}\tilde{\mathrm{B}}_M\big),\quad \mathcal{V}_M(\,\cdot\,):=\Pi_{\gamma,M}(0)\mathcal{U}_M'(\,\cdot\,)-\mathrm{i}\Theta_{\gamma,M}(0)\mathcal{U}_M(\,\cdot\,),\tag{1.19}$$

$$\tilde{\mathrm{A}}_M:=\mathrm{A}_M^{(0)}+\mathrm{i}\mathrm{B}_M^{(0)}\Pi_{\gamma,M}^{-1}(0)\Theta_{\gamma,M}(0),\quad \tilde{\mathrm{B}}_M:=\mathrm{B}_M^{(0)}\Pi_{\gamma,M}^{-1}(0),\quad \mathrm{C}_M:=\big(\tilde{\mathrm{A}}_M-\mathrm{i}\tilde{\mathrm{B}}_M\big)^{-1},$$

$$\mathrm{A}_M^{(1)}:=\begin{pmatrix}\mathrm{A}_M^{+}(0)\\[2mm] \dfrac{d\mathrm{A}_M^{-}}{d\varepsilon}(0)\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}_M^{(1)}:=\begin{pmatrix}\dfrac{d\mathrm{B}_M^{+}}{d\varepsilon}(0)\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2\mathrm{B}_M^{-}}{d\varepsilon^2}(0)\end{pmatrix},$$

$$\Pi_{\gamma,M}(\varepsilon):=\operatorname{diag}\left\{\nu_i(M)p_\gamma\big|_{\mathrm{e}_i(M)}(M,\varepsilon)\right\}_{i=1,\ldots,d(M)},$$

$$\Theta_{\gamma,M}(\varepsilon):=\operatorname{diag}\left\{\nu_i(M)q_\gamma\big|_{\mathrm{e}_i(M)}(M,\varepsilon)\right\}_{i=1,\ldots,d(M)},$$

где матрица $A_M^{+}(\cdot)$ образована первыми $r(M)$ строками матрицы $A_M(\cdot)$, $\mathrm{e}_i(M)$ — ребра, выходящие из вершины M, числа $\nu_i(M)$ определены в (1.6), а функции p_γ и q_γ продолжены на ребра e_i^∞, $i\in J_j$, $j=1,\ldots,n$, формулами $p_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon)\equiv\mathsf{p}_i(\varepsilon)$, $q_\gamma(\,\cdot\,,\varepsilon)\equiv\varepsilon\mathsf{q}_i(\varepsilon)$. В [12] было показано, что матрица Q самосопряжена, а матрица U_M из (1.19) унитарна.

Через P_M обозначим проектор в $\mathbb{C}^{d(M)}$ на собственное подпространство матрицы U_M, соответствующее собственному значению -1, и еще положим $\mathrm{P}_M^{\perp}:=\mathrm{I}_{d(M)}-\mathrm{P}_M$.

Определим еще пространства:

$$\mathfrak{C}(\,\cdot\,) := \bigoplus_{\mathrm{e}\in\,\cdot} C(\overline{\mathrm{e}}) \cap L_\infty(\mathrm{e}), \qquad \|u\|_{\mathfrak{C}(\overline{\mathrm{e}})} := \sum_{\mathrm{e}\in\cdot} \|u\|_{L_\infty(\mathrm{e})},$$
$$\mathfrak{C}^1(\,\cdot\,) := \bigoplus_{\mathrm{e}\in\,\cdot} C^1(\overline{\mathrm{e}}) \cap W^1_\infty(\mathrm{e}), \quad \|u\|_{\mathfrak{C}^1(\overline{\mathrm{e}})} := \sum_{\mathrm{e}\in\cdot} \|u\|_{W^1_\infty(\mathrm{e})}.$$

Основной результат работы [12] звучит следующим образом.

Теорема 1 [12, теорема 2.1]. *Пусть матрицы $\mathrm{A}_M(\varepsilon)$, $\mathrm{B}_M(\varepsilon)$ удовлетворяют приведенным выше условиям. Тогда операторы $\mathcal{H}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_0$ самосопряжены. Пусть еще выполнено условие* (A). *Тогда операторы $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)$ и $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)$ линейны и ограничены как действующие из $L_2(\Gamma)\oplus L_2(\gamma)$ в $\dot{W}^2_2(\Gamma)$ и $\dot{W}^2_2(\gamma)$ и в $\mathfrak{C}^1(\Gamma)$ и $\mathfrak{C}^1(\gamma)$. Для каждого $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ существует $\varepsilon_0(\lambda)>0$, такое что при $\varepsilon<\varepsilon_0(\lambda)$ операторы $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)$ и $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)$ аналитичны по ε, как операторы из $L_2(\Gamma)\oplus L_2(\gamma)$ в $\dot{W}^2_2(\Gamma)$ и $\dot{W}^2_2(\gamma)$ и в $\mathfrak{C}^1(\Gamma)$ и $\mathfrak{C}^1(\gamma)$. В обоих случаях первые члены рядов Тейлора этих операторов имеют вид*

$$\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda) = (\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\mathcal{P}_\Gamma + O(\varepsilon), \quad \mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda) = \mathcal{R}^{(0)}_\gamma(\lambda)\mathcal{P}_\Gamma + O(\varepsilon), \tag{1.20}$$
$$\mathcal{R}^{(0)}_\gamma(\lambda)f := \sum_{i=1}^{k} c_i(f)\psi^{(i)}, \quad \big(c_1(f) \quad \ldots \quad c_k(f)\big)^t := \big(\Psi^{(1)} \quad \ldots \quad \Psi^{(k)}\big)^* \mathcal{U}_{M_0}\big((\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}f\big).$$

1.4. Основной результат

Основной результат настоящей работы описывает все коэффициенты рядов Тейлора для операторов $\mathcal{R}_\Gamma$ и $\mathcal{R}_\gamma$, а также аналог ряда Тейлора для резольвенты оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Определим семейство вспомогательных функций — решений задач

$$\begin{gathered}\big(\mathcal{H}(0)-\lambda\big)v_{i,\Gamma} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,\\ \mathrm{A}^{(0)}_M\mathcal{U}_M(v_{i,\Gamma}) + \mathrm{B}^{(0)}_M\mathcal{U}'_M(v_{i,\Gamma}) = 0 \quad \text{в} \quad M\neq M_0, \quad \mathcal{U}_{M_0}(v_{i,\Gamma}) = \Psi^{(i)}.\end{gathered} \tag{1.21}$$

Применение леммы 2 из разд. 2 гарантирует однозначную разрешимость этих задач.

Рассмотрим две системы краевых задач. Первая вводится на графе Γ, рассматриваемом как независимый граф ($p\geqslant 0$):

$$\big(\hat{\mathcal{H}}(0)-\lambda\big)u^\Gamma_p = -\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{q!}\frac{d^q\hat{\mathcal{H}}}{d\varepsilon^q}(\,\cdot\,,0)u^\Gamma_{p-q} \quad \text{в} \quad \Gamma, \tag{1.22}$$
$$\begin{gathered}\mathrm{A}^{(0)}_M\mathcal{U}_M(u^\Gamma_p) + \mathrm{B}^{(0)}_M\mathcal{U}'_M(u^\Gamma_p) = -\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{q!}\Big(\frac{d^q\mathrm{A}_M}{d\varepsilon^q}(0)\mathcal{U}_M(u^\Gamma_{p-q}) + \frac{d^q\mathrm{B}_M}{d\varepsilon^q}(0)\mathcal{U}'_M(u^\Gamma_{p-q})\Big),\\ M\in\Gamma, \quad M\neq M_0.\end{gathered} \tag{1.23}$$

Вторая система краевых задач вводится на графе γ_{ex} ($p\geqslant 0$):

$$\hat{\mathcal{H}}_{ex}(0)u^\gamma_p = \delta_{2p}\chi_\gamma f_\gamma - \sum_{q=1}^{p}\frac{1}{q!}\frac{d^q\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon^q}(0)\chi_\gamma u^\gamma_{p-q} + \lambda\chi_\gamma u^\gamma_{p-2} \quad \text{на} \quad \gamma_{ex}, \quad p\geqslant 0, \tag{1.24}$$

$$\mathrm{P}_M\mathcal{U}_M(u^\gamma_p) = -\mathrm{P}_M\mathrm{C}_M\mathrm{g}^\gamma_p, \quad \mathrm{P}^\perp_M\mathcal{V}_M(u^\gamma_p) + \mathrm{K}^\perp_M\mathcal{U}_M(u^\gamma_p) = 2\mathrm{i}\mathrm{C}_M\big(\mathrm{U}_M+\mathrm{E}_{d(M)}\big)^{-1}\mathrm{C}_M\mathrm{g}^\gamma_p, \tag{1.25}$$
$$\mathrm{g}^\gamma_p := \sum_{i=1}^{p}\left(\mathrm{A}^{(i)}_M\mathcal{U}_M(u^\gamma_{p-i}) + \mathrm{B}^{(i)}_M\mathcal{U}'_M(u^\gamma_{p-i})\right),$$
$$\mathrm{A}^{(i)}_M := \begin{pmatrix}\dfrac{1}{(i-1)!}\dfrac{d^{i-1}\mathrm{A}^+_M}{d\varepsilon^{i-1}}(0)\\ \dfrac{1}{i!}\dfrac{d^i\mathrm{A}^-_M}{d\varepsilon^i}(0)\end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}^{(i)}_M := \begin{pmatrix}\dfrac{1}{i!}\dfrac{d^i\mathrm{B}^+_M}{d\varepsilon^i}(0)\\ \dfrac{1}{(i+1)!}\dfrac{d^{i+1}\mathrm{B}^+_M}{d\varepsilon^{i+1}}(0)\end{pmatrix}, \quad M\in\gamma_\infty,$$

где полагаем $u_p^\gamma := 0$ при $p \leqslant -1$, через χ_γ обозначена характеристическая функция графа γ, через δ_{qp} — символ Кронекера — Капелли и

$$\mathrm{K}_M^\perp := \mathrm{i}\big(\mathrm{U}_M + \mathrm{E}_{d(M)}\big)^{-1}\mathrm{P}_M^\perp\big(\mathrm{U}_M - \mathrm{E}_{d(M)}\big).$$

Основной результат о рядах Тейлора для операторов $\mathcal{R}_\Gamma$ и $\mathcal{R}_\gamma$ выглядит следующим образом.

Теорема 2. *Пусть выполнены все приведенные выше условия на коэффициенты дифференциального выражения $\hat{\mathcal{H}}(\varepsilon)$ и матрицы $\mathrm{A}_M(\varepsilon)$, $\mathrm{B}_M(\varepsilon)$, а также выполнено условие* (A). *Для каждой пары $(f_\Gamma, f_\gamma) \in L_2(\Gamma) \oplus L_2(\gamma)$ ряды Тейлора функций $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma)$ и $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma)$ имеют вид*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma) &= \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p u_p^\Gamma, \qquad u_0^\Gamma := (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} f_\Gamma, \\
\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma) &= \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p u_p^\gamma, \qquad u_0^\gamma := \sum_{i=1}^{k} c_i(f_\Gamma)\psi^{(i)}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

и сходятся равномерно по ε в пространствах $\dot{W}_2^2(\Gamma)$ и $\dot{W}_2^2(\gamma)$, а также в нормах пространств $\mathfrak{C}^2(\Gamma)$ и $\mathfrak{C}^2(\gamma)$. Коэффициенты этих рядов даются формулами

$$u_p^\Gamma = u_{p,*}^\Gamma + \sum_{i=1}^{k} c_{i,p} v_{i,\Gamma}, \quad u_p^\gamma = u_{p,*}^\gamma + \sum_{i=1}^{k} c_{i,p}\psi^{(i)}, \quad p \geqslant 1, \tag{1.27}$$

где $u_{p,*}^\Gamma$ — единственное решение задачи (1.22), (1.23) *с граничными условиями*

$$\mathcal{U}_{M_0}(u_{p,*}^\Gamma) = \mathcal{U}_\gamma(u_{p,*}^\gamma), \tag{1.28}$$

а $u_{p,*}^\gamma$ — частное решение задачи (1.24), (1.25) *с граничным условием*

$$\mathcal{U}'_{\gamma_{ex}}(u_{p,*}^\gamma) = \mathcal{U}'_{M_0}(u_{p-1}^\Gamma), \tag{1.29}$$

определяемое условиями ортогональности

$$\big(\mathcal{U}_\gamma(u_{p,*}^\gamma), \Psi^{(j)}\big)_{\mathbb{C}^{d_0}} = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{1.30}$$

Константы $c_{i,p}$, $p \geqslant 1$, даются формулами

$$\mathrm{c}_p = \big(\mathrm{Q} + \mathrm{L}\big)^{-1}\mathrm{h}_p\,, \tag{1.31}$$

$$\mathrm{c}_p := \begin{pmatrix} c_{1,p} \\ \vdots \\ c_{k,p}\end{pmatrix}, \quad \mathrm{h}_p := \begin{pmatrix} h_{1,p} \\ \vdots \\ h_{k,p}\end{pmatrix}, \quad \mathrm{L} := \begin{pmatrix} \big(\mathcal{V}_0(v_{1,\Gamma}), \Psi^{(1)}\big)_{\mathbb{C}^{d_0}} & \ldots & \big(\mathcal{V}_0(v_{k,\Gamma}), \Psi^{(1)}\big)_{\mathbb{C}^{d_0}} \\ \vdots & & \vdots \\ \big(\mathcal{V}_0(v_{1,\Gamma}), \Psi^{(k)}\big)_{\mathbb{C}^{d_0}} & \ldots & \big(\mathcal{V}_0(v_{k,\Gamma}), \Psi^{(k)}\big)_{\mathbb{C}^{d_0}} \end{pmatrix}, \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
h_{j,p} := &-\sum_{q=2}^{p} \frac{1}{q!}\Big(\frac{d^q\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon^q}(0)u_{p-q}^\gamma, \psi^{(j)}\Big)_{L_2(\gamma)} - \Big(\frac{d\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon}(0)u_{p-1,*}^\gamma, \psi^{(j)}\Big)_{L_2(\gamma)} \\
&+ \delta_{1p}(f_\gamma, \psi^{(j)})_{L_2(\gamma)} + \lambda(u_{p-2}^\gamma, \psi^{(j)})_{L_2(\gamma)} - \big(\Pi_{\Gamma,M_0}(0)\mathcal{U}'_{M_0}(u_{p-1,*}^\Gamma, \Psi^{(j)}\big)_{\mathbb{C}^{d_0}} \\
&- \sum_{M\in\gamma}\Big(\big(\mathrm{P}_M \mathrm{g}_{M,j}, \mathrm{P}_M\mathcal{U}'_M(\psi^{(j)})\big)_{\mathbb{C}^{d(M)}} + 2\mathrm{i}\big((\mathrm{U}_M(0)+\mathrm{E}_{d(M)})^{-1}\mathrm{P}_M^\perp \mathrm{g}_{M,j}, \mathrm{P}_M^\perp\mathcal{U}_M(\psi^{(j)})\big)_{\mathbb{C}^{d(M)}}\Big),
\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\mathrm{g}_{M,j} := \mathrm{P}_M\mathrm{C}_M\bigg(\sum_{i=2}^{p}\big(\mathrm{A}_M^{(i)}\mathcal{U}_M(u_{p-i}^\gamma) + \mathrm{B}_M^{(i)}\mathcal{U}'_M(u_{p-i}^\gamma)\big) + \mathrm{A}_M^{(1)}\mathcal{U}_M(u_{p-1,*}^\gamma) + \mathrm{B}_M^{(1)}\mathcal{U}'_M(u_{p-1,*}^\gamma)\bigg),$$

$$\mathcal{V}_0(\,\cdot\,) := \Pi_{\Gamma,M_0}(0)\mathcal{U}'_{M_0}(\,\cdot\,) - \mathrm{i}\Theta_{\Gamma,M_0}(0)\mathcal{U}_{M_0}(\,\cdot\,).$$

Наш второй основной результат описывает аналог ряда Тейлора для резольвенты оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Теорема 3. *Пусть выполнены все приведенные выше условия на коэффициенты дифференциального выражения* $\hat{\mathcal{H}}(\varepsilon)$ *и матрицы* $\mathrm{A}_M(\varepsilon)$, $\mathrm{B}_M(\varepsilon)$, *а также выполнено условие* (A). *Для каждой функции* $f \in L_2(\Gamma_\varepsilon)$ *функция* $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$ *может быть представлена сходящимся в* $\dot{W}_2^2(\Gamma_\varepsilon)$ *и* $\mathfrak{C}^2(\Gamma_\varepsilon)$ *рядом*

$$(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p u_p^\Gamma \oplus \mathcal{S}_\varepsilon^{-1} u_p^\gamma, \tag{1.34}$$

где функции u_p^Γ *и* u_p^γ *— коэффициенты рядов* (1.26) *с* $f_\Gamma := \mathcal{P}_\Gamma f$, $f_\gamma := \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f$. *Для произвольного* $N \in \mathbb{Z}_+$ *верны оценки*

$$\Big\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p u_p^\Gamma \Big\|_{\dot{W}_2^2(\Gamma)} \leqslant C^{N+1} \varepsilon^{N+1/2} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \tag{1.35}$$

$$\Big\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p u_p^\Gamma \Big\|_{\mathfrak{C}^1(\Gamma)} \leqslant C^{N+1} \varepsilon^{N+1/2} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \tag{1.36}$$

$$\Big\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p \mathcal{S}_\varepsilon u_p^\gamma \Big\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)} \leqslant C^{N+1} \varepsilon^{N+1} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \tag{1.37}$$

$$\Big\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p \mathcal{S}_\varepsilon u_p^\gamma \Big\|_{\dot{W}_2^i(\gamma_\varepsilon)} \leqslant C^{N+1} \varepsilon^{N+1-i} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \quad i = 1, 2, \tag{1.38}$$

$$\Big\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p \mathcal{S}_\varepsilon u_p^\gamma \Big\|_{\mathfrak{C}(\gamma_\varepsilon)} \leqslant C^{N+1} \varepsilon^{N+1/2} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \tag{1.39}$$

$$\Big\| (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p \mathcal{S}_\varepsilon u_p^\gamma \Big\|_{\mathfrak{C}^1(\gamma_\varepsilon)} \leqslant C^{N+1} \varepsilon^{N-1/2} \|f\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \tag{1.40}$$

где C *— некоторая фиксированная константа, не зависящая от* ε, N *и* f.

Кратко обсудим основные результаты. Настоящая работа является продолжением статьи [12], где была доказана аналитичность операторов $\mathcal{R}_\Gamma$ и $\mathcal{R}_\gamma$ по параметру ε и, как следствие, получен предельный оператор для $\mathcal{H}_\varepsilon$ в смысле равномерной резольвентной сходимости. Следующий естественный вопрос — об устройстве рядов Тейлора операторов $\mathcal{R}_\Gamma$ и $\mathcal{R}_\gamma$, а именно об определении коэффициентов этих рядов. Еще один естественный вопрос — о ряде Тейлора для самой резольвенты оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ в свете имеющихся результатов об операторах $\mathcal{R}_\Gamma$ и $\mathcal{R}_\gamma$, которые, по сути, являются частями этой резольвенты. Ответы на эти два вопроса даются в наших основных теоремах 2, 3. В теореме 2 приводится рекуррентная схема для определения коэффициентов рядов Тейлора операторов $\mathcal{R}_\Gamma$ и $\mathcal{R}_\gamma$. Эта схема позволяет эффективно, шаг за шагом определить все коэффициенты упомянутых рядов. Сама схема, по сути, является адаптацией метода согласования асимптотических разложений [11] для операторов на графах. Роль внешнего разложения здесь играет ряд для $\mathcal{R}_\Gamma$ из (1.26), роль внутреннего разложения — ряд для $\mathcal{R}_\gamma$. При этом ввиду своего определения коэффициенты второго ряда фактически зависят от растянутой переменной $\xi = x\varepsilon^{-1}$, меняющейся по графу ξ при изменении x по графу γ_ε. Аналогом условий согласования в данном случае выступают граничные условия (1.28), (1.29). Эти краевые условия связывают коэффициенты рядов из (1.26). Следует подчеркнуть, что ранее аналогичная процедура согласования для собственных значений и собственных функций операторов на графах с малыми ребрами уже использовалась в [9] для построения соответствующих рядов упомянутых спектральных объектов. В настоящей работе эта техника впервые применяется для резольвенты оператора на графах с малыми ребрами, причем как сам граф, так и оператор на нем имеют общий вид.

Теорема 3, по существу, является следствием теоремы 2 и формулы (1.11). Ее основной результат — это представление резольвенты оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ в виде ряда (1.34) типа Тейлора. Коэффициентами в этом ряде служат прямые суммы коэффициентов рядов Тейлора для операторов $\mathcal{R}_\Gamma$ и $\mathcal{R}_\gamma$ из теоремы 2. Остаточные члены ряда (1.34) удается оценить в различных нормах, при этом показатели степени ε в этих оценках зависят от выбранной нормы (см. оценки (1.35)–(1.40)). Эти оценки позволяют аппроксимировать резольвенту оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ частичными суммами ряда (1.34) с заданной точностью. При этом оценки на подграфе Γ позволяют аппроксимировать сужение этой резольвенты на данный подграф с помощью частичных сумм ряда $\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon^p u_p^\Gamma(x)$, а аналогичные оценки на подграфе γ_ε дают возможность аппроксимировать сужение резольвенты на этой подграфе частичными суммами ряда $\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon^p u_p^\gamma(x\varepsilon^{-1})$.

2. Вспомогательные леммы

Для доказательства основного результата нам понадобится серия вспомогательных лемм и фактов, которые приводятся в настоящем разделе.

Лемма 1 [12, лемма 5.2]. *Предположим, что выполнено условие* (A). *Для произвольного семейства векторов* $\mathrm{g}_M\in\mathrm{P}_M\mathbb{C}^{d(M)}$, $\mathrm{g}_{M,\perp}\in\mathrm{P}_{M,\perp}\mathbb{C}^{d(M)}$, $M\in\gamma_\infty$, *произвольного вектора* $\mathrm{g}_{ex}\in\mathbb{C}^{d_0}$ *и произвольной функции* $g\in L_2(\gamma_{ex})$ *краевая задача*

$$\begin{gathered}\hat{\mathcal{H}}_{ex}(0)u=g \quad \text{в} \quad \gamma_{ex},\qquad \Pi_{\Gamma,M_0}(0)\mathcal{U}'_{ex}(u)=\mathrm{g}_{ex},\\ \mathrm{P}_M\mathcal{U}_M(u)=\mathrm{g}_M,\qquad \mathrm{P}_M^\perp\mathcal{V}_M(u)+\mathrm{K}_M^\perp\mathcal{U}_M(u)=\mathrm{g}_{M,\perp}\quad \text{на}\quad M\in\gamma_\infty,\end{gathered}\tag{2.1}$$

разрешима в $\dot W_2^2(\gamma_{ex})$, *если и только если для всех* $j=1,\ldots,k$ *выполнено равенство*

$$(g,\psi^{(j)})_{L_2(\gamma_{ex})}=-\big(\mathrm{g}_{ex},\mathcal{U}_\gamma(\psi^{(j)})\big)_{\mathbb{C}^{d_0}}+\sum_{M\in\gamma_\infty}\big(\mathrm{g}_{M,\perp},\mathcal{U}_M(\psi^{(j)})\big)_{\mathbb{C}^{d(M)}}-\sum_{M\in\gamma_\infty}\big(\mathrm{g}_M,\mathcal{V}_M(\psi^{(j)})\big)_{\mathbb{C}^{d(M)}}.\tag{2.2}$$

Справедливость следующего утверждения проверяется совершенно аналогично доказательству [12, лемма 5.2].

Лемма 2. *Для произвольного семейства векторов* $\mathrm{g}_M\in\mathbb{C}^{d(M)}$, $M\in\Gamma$, *произвольной функции* $g\in L_2(\Gamma)$ *и каждого* $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *краевая задача*

$$\begin{gathered}\big(\hat{\mathcal{H}}(0)-\lambda\big)u=g\quad\text{на}\quad\Gamma,\\ \mathcal{U}_{M_0}(u)=\mathrm{g}_{M_0},\qquad \mathrm{A}_M^{(0)}\mathcal{U}_M(u)+\mathrm{B}_M^{(0)}\mathcal{U}'_M(u)=\mathrm{g}_M\quad\text{в}\quad M\in\Gamma,\qquad M\neq M_0,\end{gathered}$$

однозначно разрешима в $\dot W_2^2(\Gamma)$.

Следующая вспомогательная лемма гарантирует обратимость матрицы $\mathrm{Q}+\mathrm{L}$ из формулировки теоремы 2 (см. (1.31)).

Лемма 3. *Матрица* $\mathrm{Q}+\mathrm{L}$ *невырождена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы воспроизводит основные идеи доказательства аналогичной леммы 6.5 из [12]. А именно умножим уравнение в (1.21) на $v_{j,\Gamma}$ скалярно в $L_2(\Gamma)$ и дважды проинтегрируем по частям с учетом краевых условий из (1.21). Тогда получим, что матрица $\mathrm{L}-\mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda\mathrm{G}_\Gamma$ самосопряжена, где G_Γ — положительно определенная самосопряженная матрица Грама функций $v_{i,\Gamma}$. Поскольку матрица Q также самосопряжена, то отсюда уже элементарно следует, что для всех $\mathrm{c}\in\mathbb{C}^{d_0}$ выполнено

$$\operatorname{Im}((\mathrm{Q}+\mathrm{L})\mathrm{c},\mathrm{c})_{\mathbb{C}^k}=-\operatorname{Im}\lambda(\mathrm{G}_\Gamma\mathrm{c},\mathrm{c})_{\mathbb{C}^k}\neq0,$$

что немедленно влечет невырожденность матрицы Q и завершает доказательство леммы.

3. Ряды Тейлора для частей резольвенты

В настоящем разделе мы доказываем теорему 2. Согласно теореме 1 операторы $\mathcal{R}_\Gamma$ и $\mathcal{R}_\gamma$ аналитичны по ε как операторы из $L_2(\Gamma)\oplus L_2(\gamma)$ в $\dot W_2^2(\Gamma)$ и $\dot W_2^2(\gamma)$ и в $\mathfrak{C}^1(\Gamma)$ и $\mathfrak{C}^1(\gamma)$. Это означает, что для произвольной пары $(f_\Gamma,f_\gamma)\in L_2(\Gamma)\oplus L_2(\gamma)$ функции $u_\varepsilon^\Gamma:=\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma)$ и $u_\gamma^\varepsilon:=\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma)$ представляются рядами (1.26), сходящимися равномерно по ε в нормах $\dot W_2^2(\Gamma)$ и $\dot W_2^2(\gamma)$ и в нормах $\mathfrak{C}^1(\Gamma)$ и $\mathfrak{C}^1(\gamma)$. Из формулы (1.11) также вытекает, что в смысле разложений (1.10) верно равенство

$$(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}f=:u_\varepsilon=u_\varepsilon^\Gamma\oplus\mathcal{S}_\varepsilon u_\varepsilon^\gamma,\quad f:=f_\Gamma\oplus\mathcal{S}_\varepsilon f_\gamma. \tag{3.1}$$

Отсюда и из уравнения для резольвенты $(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}$ следует, что функция u_ε является решением дифференциального уравнения $(\hat{\mathcal{H}}(\varepsilon)-\lambda)u_\varepsilon^\Gamma=f_\Gamma$ на графе Γ и удовлетворяет граничным условиям (1.4) в вершинах $M\in\Gamma$, $M\neq M_0$. Подставим ряд для $\mathcal{R}_\Gamma$ из (1.26) в данное уравнение и граничные условия, разложим все коэффициенты в ряды Тейлора по ε и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда получим рекуррентную систему краевых задач (1.22), (1.23) для функций u_p^Γ.

Наш следующий шаг — получение аналогичных краевых задач для функций u_p^γ. Для этого мы вначале продолжим эти функции с графа γ на графе γ_{ex} по следующему правилу:

$$u_p^\gamma(\xi_i):=\frac{du_{p-1}^\Gamma\big|_{\mathrm{e}_i}}{dx_i}(M_0)\nu_i(M_0)\xi_i+u_p^\Gamma\big|_{\mathrm{e}_i}(M_0),\quad i\in J_j,\quad j=1,\dots,n. \tag{3.2}$$

В силу такого продолжения, равенства (3.1) и непрерывной дифференцируемости функции u_ε немедленно заключаем, что должны выполняться следующие равенства:

$$\mathcal{U}_{M_0}(u_p^\Gamma)=\mathcal{U}_\gamma(u_p^\gamma),\quad p\geqslant 1, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{U}'_{\gamma_{ex}}(u_0^\gamma)=0,\quad \mathcal{U}'_{\gamma_{ex}}(u_p^\gamma)=\mathcal{U}'_{M_0}(u_{p-1}^\Gamma),\quad p\geqslant 1. \tag{3.4}$$

Эти соотношения — условия непрерывности, связывающие сужения функции u_ε на подграфы Γ и γ_ε на ребрах e_i; при этом следует иметь в виду замену $\xi=x_i\varepsilon^{-1}$, связывающую переменные на ребрах e_i^{ex} и e_i. Далее мы эти условия непрерывности также рассматриваем как граничные условия для функций u_p^Γ и u_p^γ.

Из формул (3.1), уравнения для резольвенты $(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}$, определения оператора $\mathcal{H}_{ex}(\varepsilon)$ в разд. 2 и формул продолжения (3.2) следует, что функция u_ε^γ является решением дифференциального уравнения $(\mathcal{H}_{ex}(\varepsilon)-\varepsilon^2\lambda)u_\gamma^\varepsilon=\varepsilon^2 f_\gamma$ на γ с краевыми условиями (1.9). Подставим в эту задачу ряд для $\mathcal{R}_\gamma$ из (1.26), разложим все коэффициенты в ряды Тейлора по ε и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда с учетом формул продолжения (3.2) и определения (1.8) дифференциального выражения $\hat{\mathcal{H}}_{ex}(0)$ на ребрах e_i^{ex} получим рекуррентную систему краевых уравнений (1.24) для функций u_p^γ с краевыми условиями

$$\mathrm{A}_M^{(0)}\mathcal{U}_M(u_p^\gamma)+\mathrm{B}_M^{(0)}\mathcal{U}'_M(u_p^\gamma)=-\mathrm{g}_p^\gamma,\quad \mathrm{g}_p^\gamma:=\sum_{i=1}^{p}\Big(\mathrm{A}_M^{(i)}\mathcal{U}_M(u_{p-i}^\gamma)+\mathrm{B}_M^{(i)}\mathcal{U}'_M(u_{p-i}^\gamma)\Big),\quad M\in\gamma_\infty. \tag{3.5}$$

Применяя матрицу $-2\mathrm{i}\mathrm{C}_M$ к этим граничным условиям, аналогично выводу условий (47) в [13] несложно переписать (3.5) к эквивалентной формулировке (1.25).

Исследуем теперь разрешимость задач (1.22), (1.23), (3.3) и (1.24), (1.25), (3.4). Функция u_0^Γ уже определена в (1.26). Так как задача (1.24), (1.25), (3.4) для u_0^γ однородная, ее решение есть линейная комбинация функций $\psi^{(i)}$: $u_0^\gamma=\sum_{i=1}^k c_{i,0}\psi^{(i)}$. В силу граничных условий для u_0^Γ в вершине M_0 и определения векторов $\Psi^{(i)}$, $i\leqslant k+1$, очевидно имеем $\big(\mathcal{U}_{M_0}(u_0^\Gamma),\Psi^{(j)}\big)_{\mathbb{C}^{d_0}}=0$ для $j\geqslant k+1$. Следовательно,

$$c_{0,i}=c_i(f_\Gamma),\quad \mathcal{U}_{M_0}(u_0^\Gamma)=\sum_{i=1}^k c_i(f_\Gamma)\Psi^{(i)},$$

где функционалы $c_i(f)$ были определены в (1.20). Это приводит к формуле для u_0^γ из (1.26).

Рассмотрим теперь задачу (1.24), (1.25), (3.4) для u_1^γ. Правая часть $\mathcal{U}'_{M_0}(u_0^\Gamma)$ в граничном условии (3.4) с $p=1$ является известной величиной, так как функция u_0^Γ уже полностью определена. Эта задача является частным случаем задачи (2.1) с

$$f = -\frac{d\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon}(0)u_0^\gamma, \quad \mathrm{g}_{M^{ex}} = \Pi_{\Gamma,M_0}(0)\mathcal{U}'_{M_0}(u_0^\Gamma),$$
$$\mathrm{g}_M = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{P}_M\mathcal{E}_M(u_0^\gamma), \quad \mathrm{g}_{M,\perp} = (\mathrm{U}_M + \mathrm{E}_{d(M)})^{-1}\mathrm{P}_M^\perp\mathcal{E}_M(u_0^\gamma),$$

где оператор $\mathcal{E}_M$ определен в (1.18). Условие разрешимости этой задачи дается равенством (2.2), которое в данном случае принимает вид

$$0 = -\big(\Pi_{\Gamma,M_0}(0)\mathcal{U}'_{M_0}(u_0^\Gamma), \mathcal{U}_\gamma(\psi^{(j)})\big)_{\mathbb{C}^{d_0}} + \Big(\frac{d\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon}(0)u_0^\gamma, \psi^{(j)}\Big)_{L_2(\gamma)}$$
$$- \sum_{M\in\gamma_\infty}\frac{\mathrm{i}}{2}\big(\mathrm{P}_M\mathcal{E}_M(u_0^\gamma), \mathcal{V}_M(\psi^{(j)})\big)_{\mathbb{C}^{d(M)}} + \sum_{M\in\gamma_\infty}\big((\mathrm{U}_M+\mathrm{E}_{d(M)})^{-1}\mathrm{P}_M^\perp\mathcal{E}_M(u_0^\gamma), \mathcal{U}_M(\psi^{(j)})\big)_{\mathbb{C}^{d(M)}}. \quad (3.6)$$

Используя очевидные равенства

$$\frac{d\psi^{(i)}}{d\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma\setminus\gamma_{ex}, \quad \frac{d\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon}(0)\psi^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon}(0)\chi_\gamma\psi^{(i)} & \text{на} \quad \gamma, \\ 0 & \text{на} \quad \gamma\setminus\gamma_{ex}, \end{cases}$$

и определение (1.15) величин $Q_\gamma^{(ij)}$, интегрированием по частям проверяем, что

$$\Big(\frac{d\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon}(0)\chi_\gamma\psi^{(i)}, \psi^{(j)}\Big)_{L_2(\gamma)} = \Big(\frac{d\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon}(0)\psi^{(i)}, \psi^{(j)}\Big)_{L_2(\gamma_{ex})}$$
$$= Q_\gamma^{(ij)} + \sum_{M\in\gamma_\infty}\bigg(\frac{d\Pi_{\gamma,M}}{d\varepsilon}(0)\mathcal{U}'_M(\psi^{(i)}) - \mathrm{i}\frac{d\Theta_{\gamma,M}}{d\varepsilon}(0)\mathcal{U}_M(\psi^{(i)}), \mathcal{U}_M(\psi^{(j)})\bigg)_{\mathbb{C}^{d(M)}}. \quad (3.7)$$

С учетом последнего соотношения и определения функции u_0^γ в (1.26) легко видеть, что условие разрешимости (3.6) задачи для u_1^γ эквивалентно краевому условию (1.12) в вершине M_0 с матрицами (1.13). Так как это условие выполнено, то задача для u_1^γ разрешима и ее общее решение имеет вид

$$u_1^\gamma = u_{1,*}^\gamma + \sum_{i=1}^k c_{i,1}\psi^{(i)}, \quad (3.8)$$

где $u_{1,*}^\gamma$ — частное решение задачи (1.24), (1.25), (3.4), удовлетворяющее условию ортогональности (1.30), а $c_{i,1}$ — некоторые константы, которые будут найдены позднее.

Отыскав функцию u_1^γ, можно уже определить функцию u_1^Γ. Она находится как решение задачи (1.22), (1.23), (3.3). Согласно лемме 2 задача (1.24), (3.5), (3.2) для u_1^Γ однозначно разрешима и ее решение имеет вид

$$u_1^\Gamma = u_{1,*}^\Gamma + \sum_{i=1}^k c_{i,1}v_{i,\Gamma}, \quad (3.9)$$

где $u_{1,*}^\Gamma$ — решение задачи (1.22), (1.23) с граничным условием $\mathcal{U}_{M_0}(u_{1,*}^\Gamma) = \mathcal{U}_\gamma(u_{1,*}^\gamma)$.

Изучим теперь задачу (1.24), (1.25), (3.4). Подставим формулу (3.8) в правые части равенств (1.24), (1.25), а равенство (3.9) подставим в правую часть (3.4). Полученная задача —

частный случай задачи (2.1), разрешимость которой определяется условием (2.2). Выписывая это условие для данной задачи и учитывая соотношения (3.7) и (1.14)–(1.17), получаем

$$\sum_{i=1}^{k} Q^{(ij)} c_{i,1} + \sum_{i=1}^{k} c_{i,1} \big(\mathcal{V}_0(v_{i,\Gamma}), \Psi^{(j)}\big)_{\mathbb{C}^{d_0}} = h_{j,1}, \tag{3.10}$$

где числа $h_{j,1}$ определяются равенствами

$$h_{j,1} := \Big(f_\gamma - \frac{1}{2}\frac{d^2\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon^2}(0)\chi_\gamma u_0^\gamma + \lambda u_0^\gamma - \frac{d\hat{\mathcal{H}}_{ex}}{d\varepsilon}(0) u_{1,*}^\gamma, \psi^{(j)}\Big)_{L_2(\gamma)} - \big(\Pi_{\Gamma,M_0}(0)\mathcal{U}'_{M_0}(u_{1,*}^\Gamma), \Psi^{(j)}\big)_{\mathbb{C}^{d_0}}$$
$$- 2\mathrm{i} \sum_{M\in\gamma_\infty} \Big((\mathrm{U}_M(0) + \mathrm{E}_{d(M)})^{-1} \mathrm{P}_M^\perp \mathrm{C}_M \big(\mathrm{A}_M^{(1)} \mathcal{U}_M(u_{1,*}^\gamma) + \mathrm{B}_M^{(1)} \mathcal{U}'_M(u_{1,*}^\gamma)$$
$$+ \mathrm{A}_M^{(2)} \mathcal{U}_M(u_0^\gamma) + \mathrm{B}_M^{(2)} \mathcal{U}'_M(u_0^\gamma)\big), \mathrm{P}_M^\perp \mathcal{U}_M(\psi^{(j)})\Big)_{\mathbb{C}^{d(M)}}$$
$$- \sum_{M\in\gamma_\infty} \Big(\mathrm{P}_M \mathrm{C}_M \big(\mathrm{A}_M^{(1)} \mathcal{U}_M(u_{1,*}^\gamma) + \mathrm{B}_M^{(1)} \mathcal{U}'_M(u_{1,*}^\gamma) + \mathrm{A}_M^{(2)} \mathcal{U}_M(u_0^\gamma) + \mathrm{B}_M^{(2)} \mathcal{U}'_M(u_0^\gamma)\big), \mathrm{P}_M \mathcal{V}_M(\psi^{(j)})\Big)_{\mathbb{C}^{d(M)}}.$$

В матричном виде равенства (3.10) переписываются к уравнению $(\mathrm{Q}+\mathrm{L})\mathrm{c}_1 = \mathrm{h}_1$, и лемма 3 позволяет однозначно разрешить это уравнение, отыскав коэффициенты $c_{i,1}$. Это приводит к формулам (1.31), (1.32) с $p = 1$.

Остальные функции, u_p^Γ и u_p^γ, определяются аналогичным образом. А именно функция u_p^γ определяется с точностью до линейной комбинации функций $\psi^{(j)}$ с некоторыми коэффициентами $c_{i,p}$ формулой из (1.27). Тогда задача (1.22), (1.23) для функции u_p^Γ однозначно разрешима и ее решение имеет вид (1.27). Теперь мы можем решить задачу (1.24), (3.4), (3.5) для u_{p+1}^γ, так как все правые части в этой задачи выражаются через уже найденные функции. Условие разрешимости последней задачи дается равенством (2.2) и приводит к системе линейных уравнений $(\mathrm{Q} + \mathrm{L})\mathrm{c}_p = \mathrm{h}_p$, где вектор h_p — из (1.32) с коэффициентами из (1.33). Это система однозначно решается благодаря лемме 3 и решение дается формулой (1.31). Описанная процедура позволяет определить все коэффициенты рядов Тейлора (1.26).

Теорема 2 полностью доказана.

4. Аналог ряда Тейлора для резольвенты

Настоящий раздел посвящен доказательству теоремы 3. Равенство (1.34) немедленно вытекает из (1.26) и (1.11), достаточно лишь подставить ряды (1.26) в формулу (1.11).

Так как по теореме 1 операторы $\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)$ и $\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)$ аналитичны по ε и согласно теореме 2 их ряды Тейлора даются равенствами (1.26), то справедливы следующие неравенства:

$$\Big\|\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma) - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p u_p^\Gamma\Big\|^2_{\dot W_2^2(\Gamma)} \leqslant C^{2N+2}\varepsilon^{2N+2}\big(\|f_\Gamma\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|f_\gamma\|^2_{L_2(\gamma)}\big), \tag{4.1}$$

$$\Big\|\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma) - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p u_p^\gamma\Big\|^2_{\dot W_2^2(\gamma)} \leqslant C^{2N+2}\varepsilon^{2N+2}\big(\|f_\Gamma\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|f_\gamma\|^2_{L_2(\gamma)}\big), \tag{4.2}$$

$$\Big\|\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma) - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p u_p^\Gamma\Big\|_{\mathfrak{C}^1(\Gamma)} \leqslant C^{N+1}\varepsilon^{N+1}\big(\|f_\Gamma\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|f_\gamma\|^2_{L_2(\gamma)}\big)^{1/2}, \tag{4.3}$$

$$\Big\|\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma) - \sum_{p=0}^{N} \varepsilon^p u_p^\gamma\Big\|_{\mathfrak{C}^1(\gamma)} \leqslant C^{N+1}\varepsilon^{N+1}\big(\|f_\Gamma\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|f_\gamma\|^2_{L_2(\gamma)}\big)^{1/2}, \tag{4.4}$$

где C — фиксированная константа, не зависящая от ε, N, f_Γ и f_γ. Из определения (1.2) оператора $\mathcal{S}_\varepsilon$ следует, что

$$\Big\|\frac{d^i\mathcal{S}_\varepsilon u}{dx^i}\Big\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)}=\varepsilon^{1-2i}\Big\|\frac{d^i u}{dx^i}\Big\|^2_{L_2(\gamma)},\quad \Big\|\frac{d^i\mathcal{S}_\varepsilon u}{dx^i}\Big\|_{\mathfrak{C}(\gamma_\varepsilon)}=\varepsilon^{-i}\Big\|\frac{d^i u}{dx^i}\Big\|_{\mathfrak{C}(\gamma)},\tag{4.5}$$

и, в частности,

$$\|f_\gamma\|^2_{L_2(\gamma)}=\varepsilon^{-1}\|f\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)}.\tag{4.6}$$

Отметим еще, что из формулы (1.11) вытекает равенство

$$\begin{aligned}&(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}f-\sum_{p=0}^{N}\varepsilon^p u_p^\Gamma\oplus\mathcal{S}_\varepsilon u_p^\gamma\\ &=\Big(\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma)-\sum_{p=0}^{N}\varepsilon^p u_p^\Gamma\Big)\oplus\mathcal{S}_\varepsilon\Big(\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma)-\sum_{p=0}^{N}\varepsilon^p u_p^\gamma\Big).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Тогда из (4.1), (4.6) имеем

$$\begin{aligned}\Big\|(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}f-\sum_{p=0}^{N}\varepsilon^p u_p^\Gamma\Big\|^2_{\dot W_2^2(\Gamma)}&=\Big\|\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma)-\sum_{p=0}^{N}\varepsilon^p u_p^\Gamma\Big\|^2_{\dot W_2^2(\Gamma)}\\ &\leqslant C^{2N+2}\varepsilon^{2N+2}\big(\|f\|^2_{L_2(\Gamma)}+\varepsilon^{-1}\|f\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)}\big)\end{aligned}$$

и отсюда уже следует (1.35). Аналогично, используя (4.3) вместо (4.1), легко доказывается оценка (1.36).

Как и выше, применяя неравенство (4.2), первую формулу в (4.5) и равенства (4.6), (4.7), мы получаем оценки (1.37), (1.38):

$$\begin{aligned}&\Big\|(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)^{-1}f-\sum_{p=0}^{N}\varepsilon^p\mathcal{S}_\varepsilon u_p^\gamma\Big\|^2_{\dot W_2^i(\gamma_\varepsilon)}=\Big\|\mathcal{S}_\varepsilon\Big(\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma)-\sum_{p=0}^{N}\varepsilon^p u_p^\gamma\Big)\Big\|^2_{\dot W_2^i(\gamma_\varepsilon)}\\ &\leqslant\varepsilon^{1-2i}\Big\|\mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma,f_\gamma)-\sum_{p=0}^{N}\varepsilon^p u_p^\gamma\Big\|^2_{\dot W_2^i(\gamma)}\leqslant C^{2N+2}\varepsilon^{2(N-i+1)}\|f\|^2_{L_2(\Gamma_\varepsilon)},\end{aligned}$$

где $i=0,1,2$, и при $i=0$ для удобства полагаем $\dot W_2^i:=L_2$. Рассуждая как и выше и используя неравенство (4.4) вместо (4.2) и второе равенство в (4.5) вместо первого, легко доказываем неравенства (1.39), (1.40).

Теорема 3 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.** Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М: Физматлит, 2005. 272 с.
2. **Berkolaiko G., Kuchment P.** Introduction to quantum graphs. Providence: Americ. Math. Soc., 2013. 270 p.
3. **Cheon T., Exner P., Turek O.** Approximation of a general singular vertex coupling in quantum graphs // Ann. Phys. 2010. Vol. 325, № 3. P. 548–578. doi: 10.1016/j.aop.2009.11.010 .
4. **Жиков В.В.** Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Изв. РАН. Сер. математическая. 2002. Т. 66, № 2. С. 81–148.
5. **Berkolaiko G., Latushkin Yu., Sukhtaiev S.** Limits of quantum graph operators with shrinking edges // Adv. Math. 2019. Vol. 352. P. 632–669. doi: 10.1016/j.aim.2019.06.017 .
6. **Cacciapuoti C.** Scale invariant effective hamiltonians for a graph with a small compact core // Symmetry. 2019. Vol. 11, no. 3. Art. no. 359. doi: 10.3390/sym11030359 .

7. **Борисов Д.И., Коныркулжаева М.Н.** Возмущение края непрерывного спектра простейшего графа с малым ребром // Проблемы мат. анализа. 2019. Вып. 97. С. 15–30.
8. **Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И.** О модельном графе с петлей и малыми ребрами // Проблемы мат. анализа. 2020. Вып. 106. С. 17–42.
9. **Борисов Д.И., Коныркулжаева М.Н., Мухаметрахимова А.И.** О дискретном спектре модельного графа с петлей и малыми ребрами // Проблемы мат. анализа. 2021. Вып. 111. С. 3–17.
10. **Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskii B.** Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. I, II. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000. 758 p.
11. **Ильин А.М.** Согласование асимтотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
12. **Borisov D.I.** Analyticity of resolvents of elliptic operators on quantum graphs with small edges // Adv. Math. 2021. Art. no. 108125. doi: 10.1016/j.aim.2021.108125 .
13. **Borisov D.I.** Spectra of elliptic operators on quantum graphs with small edges // Mathematics. 2021. Vol. 9, № 16. Art. no. 1874. doi: 10.3390/math9161874 .
14. **Berkolaiko G., Kuchment P.** Dependence of the spectrum of a quantum graph on vertex conditions and edge lengths // Spectral Geometry. Providence: Amer. Math. Soc., RI, 2012. P. 117–137. (Ser. Proc. Sympos. Pure Math.; vol. 84.)

Поступила 30.11.2021
После доработки 17.12.2021
Принята к публикации 27.12.2021

Борисов Денис Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор РАН
главный науч. сотрудник, зав. отделом
Институт математики
с вычислительным центром УФИЦ РАН
г. Уфа
e-mail: borisovdi@yandex.ru

Газизова Лейсан Ильдаровна
аспирант
Институт математики
с вычислительным центром УФИЦ РАН
г. Уфа
e-mail: gazizovalejsa@gmail.com

REFERENCES

1. Pokornyi Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L., Borovskikh A.V., Lazarev K.P., Shabrov S.A. *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential equations on geometric graphs]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 272 p. ISBN: 5-9221-0425-X .
2. Berkolaiko G., Kuchment P. *Introduction to quantum graphs.* Providence: Americ. Math. Soc., 2013, 270 p. ISBN: 0821892118 .
3. Cheon C., Exner E., Turek T. Approximation of a general singular vertex coupling in quantum graphs. *Ann. Phys.*, 2010, vol. 325, no. 3, pp. 548–578. doi: 10.1016/j.aop.2009.11.010 .
4. Zhikov V.V. Homogenization of elasticity problems on singular structures. *Izv. Math.*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 299–365. doi: 10.1070/IM2002v066n02ABEH000380 .
5. Berkolaiko B., Latushkin L., Sukhtaiev S. Limits of quantum graph operators with shrinking edges. *Advances in Mathematics*, 2019, vol. 352, pp. 632–669. doi: 10.1016/j.aim.2019.06.017 .
6. Cacciapuoti C. Scale invariant effective hamiltonians for a graph with a small compact core. *Symmetry*, 2019, vol. 11, no. 3, art. no. 359. doi: 10.3390/sym11030359 .
7. Borisov D.I., Konyrkulzhaeva M.N. Perturbation of threshold of the essential spectrum of the Schrödinger operator on the simplest graph with a small edge. *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 239, no. 3, pp. 248–267. doi: 10.1007/s10958-019-04302-0 .
8. Borisov D.I., Mukhametrakhimova A.I. On a model graph with a loop and small edges. *J. Math. Sci.*, 2020, vol. 251, no. 5, pp. 573–601. doi: 10.1007/s10958-020-05118-z .

9. Borisov D.I., Konyrkulzhaeva M.N., Mukhametrakhimova A.I. On discrete spectrum of a model graph with loop and small edges. *J. Math. Sci.*, 2021, vol. 257, no. 5, pp. 551–568. doi: 10.1007/s10958-021-05503-2 .
10. Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains.* Basel: Birkhäuser, 2000, 758 p. ISBN: 978-3-7643-2964-8 .
11. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence: American Mathematical Society, 1992, Ser. Trans. Math. Monogr., vol. 102, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5 . Original Russian text published in Il'in A.M. *Soglasovanie asimtoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1989, 336 p.
12. Borisov B. Analyticity of resolvents of elliptic operators on quantum graphs with small edges. *Adv. Math.*, 2021, art. no. 108125. doi: 10.1016/j.aim.2021.108125 .
13. Borisov D.I. Spectra of elliptic operators on quantum graphs with small edges. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 16, art. no. 1874. doi: 10.3390/math9161874 .
14. Berkolaiko G., Kuchment P. Dependence of the spectrum of a quantum graph on vertex conditions and edge lengths. In: *Spectral Geometry*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 84. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2012, ISBN: 978-0-8218-5319-1 , pp. 117–137.

Received November 30, 2021
Revised December 17, 2021
Accepted December 27, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 20-11-19995).

Denis Ivanovich Borisov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics of Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia, e-mail: borisovdi@yandex.ru .

Lejsan Ildarovna Gazizova, doctoral student, Institute of Mathematics of Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia, e-mail: gazizovalejsa@gmail.com .

Cite this article as: D. I. Borisov, L. I. Gazizova. Taylor series for resolvents of operators on graphs with small edges, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 40–57 .