ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 517.95

НЕПРЕРЫВНОЕ ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ С ТРЕХКОМПОНЕНТНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

Л. Г. Шагалова

В случае, когда размерность фазового пространства равна единице, изучается задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби эволюционного типа. Область, в которой исследуется уравнение, разбивается на три подобласти. В каждой из подобластей гамильтониан непрерывен, а на их границах терпит разрыв по фазовой переменной. Гамильтониан является выпуклым по импульсной переменной, при этом зависимость от импульсной переменной экспоненциальна. На основе вязкостного/минимаксного подхода вводится определение непрерывного обобщенного решения изучаемой задачи Коши с разрывным гамильтонианом. Доказательство существования такого обобщенного решения имеет конструктивный характер. Вначале строится вязкостное решение в замыкании средней области. При этом существенным является коэрцитивность гамильтониана по импульсной переменной в средней области. Затем решение непрерывно продолжается на две другие области посредством решения вариационных задач с подвижными концами и на основе метода обобщенных характеристик. Единственность обобщенного решения доказывается при условии глобальной липшицевости начальной функции.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона — Якоби, разрывный гамильтониан, обобщенные решения, вязкостные решения, метод обобщенных характеристик.

L. G. Shagalova. A continuous generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation with a three-component Hamiltonian.

The Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation of evolution type is studied in the case of one-dimensional state space. The domain in which the equation is considered is divided into three subdomains. In each of these subdomains, the Hamiltonian is continuous, and at their boundaries it suffers a discontinuity in the state variable. The Hamiltonian is convex in the impulse variable, and the dependence on this variable is exponential. We define a continuous generalized solution of the Cauchy problem with a discontinuous Hamiltonian on the basis of the viscous/minimax approach. The proof of the existence of such a generalized solution is constructive. First, a viscosity solution is constructed in the closure of the middle domain. Here, the coercivity of the Hamiltonian with respect to the impulse variable in the middle domain is essential. The solution is then continuously extended to the other two domains. The extensions are constructed by solving variational problems with movable ends based on the method of generalized characteristics. The uniqueness of the generalized solution is proved under the condition that the initial function is globally Lipschitz.

Keywords: Hamilton–Jacobi equation, discontinuous Hamiltonian, generalized solutions, viscosity solutions, method of generalized characteristics.

MSC: 35F21, 35F25

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-257-268

Введение

Уравнения Гамильтона — Якоби, как правило, не имеют классических решений даже при достаточно гладких входных данных задачи. Поэтому в теории этих уравнений рассматривались различные концепции обобщенного решения (см., например [1–5]). В рамках этих концепций исследованы решения начальных и краевых задач различных типов, доказаны теоремы существования и единственности, изучены свойства решений и разработаны методы их построения. При этом на входные данные задачи, в частности на гамильтониан, накладываются определенные требования, обеспечивающие существование решения. Как правило, гамильтониан предполагается непрерывным и удовлетворяющим при этом некоторым дополнительным условиям, таким как липшицевость, условие подлинейного роста или условие коэрцитивности по импульсной переменной.

Вместе с тем ряд практических задач (например, в кристаллографии [6]) приводят к уравнениям Гамильтона — Якоби, в которых гамильтониан не удовлетворяет указанным требованиям и известные теоремы существования обобщенных решений не выполнены. Для таких задач приходится вводить новые определения решений.

В данной работе рассматривается уравнение Гамильтона — Якоби с гамильтонианом, зависящим от фазовой и импульсной переменной. Фазовая переменная одномерна, а зависимость от импульсной переменной экспоненциальна. Задачи с экспоненциальной зависимостью гамильтониана от импульсной переменной нетипичны для теории уравнений Гамильтона — Якоби. Однако такие уравнения возникают в прикладных исследованиях, в частности, в молекулярной генетике [7]. Ранее уравнение подобного типа исследовалось [8; 9] в ограниченной по x замкнутой области как задача с фазовыми ограничениями.

В настоящей работе нет фазовых ограничений, но область, в которой рассматривается уравнение, разбивается на три подобласти, в которых гамильтониан задается разными формулами. Внутри каждой из областей гамильтониан непрерывен, но на линиях, разделяющих эти области, терпит разрыв по фазовой переменной. Для рассматриваемой задачи Коши на основе вязкостного/минимаксного подхода вводится непрерывное обобщенное решение, доказывается его существование. При условии глобальной липшицевости начальной функции устанавливается единственность обобщенного решения.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби эволюционного типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\Big(x, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Здесь T — заданный момент времени, $T > 0$; $u_0(\cdot)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Предполагается, что заданы непрерывно дифференцируемые функции $h(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а также $f(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(\cdot)$ является монотонно возрастающей, а $g(\cdot)$ — монотонно убывающей. Пусть существуют точки x_* и x^* такие, что $f(x_*) = 0$, $g(x^*) = 0$, и справедливо неравенство $x_* < x^*$.

Задача (1.1), (1.2) исследуется в предположении, что гамильтониан имеет вид

$$H(x,p) = \begin{cases} g(x_*)e^{-p}, & x < x_*, & p \in \mathbb{R}, \\ h(x) + f(x)e^{p} + g(x)e^{-p}, & x_* \le x \le x^*, & p \in \mathbb{R}, \\ f(x^*)e^{p}, & x > x^*, & p \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Определим области

$$G_- = \{(t,x) \,|\, 0 < t < T,\, x < x_*\}, \quad G_+ = \{(t,x) \,|\, 0 < t < T,\, x > x^*\},$$

$$G_0 = \{(t,x) \,|\, 0 < t < T,\, x_* < x < x^*\}, \quad \overline{G}_0 = \{(t,x) \,|\, 0 < t < T,\, x_* \le x \le x^*\}.$$

Справедливо равенство

$$(0,T) \times \mathbb{R} = G_- \cup \overline{G}_0 \cup G_+.$$

Таким образом, область $[0,T) \times \mathbb{R}$, в которой рассматривается задача (1.1), (1.2), разбивается на три подобласти, в каждой из которых гамильтониан определяется соответствующей непрерывной функцией, и, если $h(x_*) \ne 0$, $h(x^*) \ne 0$, на линиях $x = x_*$ и $x = x^*$ гамильтониан разрывен.

Для задачи Коши (1.1)–(1.3) с разрывным гамильтонианом требуется найти непрерывное обобщенное решение, исследовать вопросы существования и единственности такого решения.

2. Определение обобщенного решения

В теории уравнений Гамильтона — Якоби известны различные подходы к поиску обобщенного решения (см., например, [1]). Построения в данной работе опираются на концепции вязкостного [2] и минимаксного [3;4] решений, которые при определенных условиях на входные данные задачи являются эквивалентными [3; 4].

Напомним одно из эквивалентных определений вязкостного решения для уравнения с непрерывным гамильтонианом. Приведем его для актуального в данной работе случая одномерной фазовой переменной.

Пусть задано множество $W \subset \mathbb{R}^2$. Символом $C(W)$ будем обозначать класс функций, непрерывных на множестве W.

Пусть $u(\cdot) \in C(W)$ и $(t,x) \in W$. Субдифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t,x) называется множество

$$D^- u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\middle|\; \liminf_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in W}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y-x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right\}. \tag{2.1}$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t,x) называется множество

$$D^+ u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\middle|\; \limsup_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in W}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y-x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leq 0 \right\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Функция $u \in C(W)$ называется нижним вязкостным решением уравнения (1.1) на множестве W, если справедливо неравенство

$$a + H(x,s) \leq 0 \quad \forall\,(t,x) \in W,\ \forall\,(a,s) \in D^+ u(t,x). \tag{2.2}$$

Функция $u \in C(W)$ называется верхним вязкостным решением уравнения (1.1) на W, если справедливо неравенство

$$a + H(x,s) \geq 0 \quad \forall\,(t,x) \in W,\ \forall\,(a,s) \in D^- u(t,x). \tag{2.3}$$

Непрерывная функция $u(\cdot)$ называется вязкостным решением уравнения (1.1) на W, если она является одновременно нижним и верхним решением (1.1) на W.

Если множество W ограничено и замкнуто, функция $u(\cdot)$, являющаяся вязкостным решением уравнения (1.1) на этом множестве, согласно определению 1 должна удовлетворять обоим неравенствам (2.2), (2.3) как во внутренних, так и в граничных точках множества W.

Отметим, что в граничных точках множества W субдифференциал $D^- u(t,x)$, если он непуст, является неограниченным множеством. Обозначим через ∂W и clW соответственно границу и замыкание множества W. Пусть $(t_*, y_*) \in \partial W$, $(a,s) \in D^- u(t_*, y_*)$, а вектор (n_1, n_2) есть внешняя нормаль к множеству clW в точке (t_*, y_*). Тогда, как нетрудно заметить из определения (2.1) субдифференциала, для любого положительного числа k справедливо

$$(a + kn_1, s + kn_2) \in D^- u(t_*, y_*).$$

Согласно (1.3) на множествах G_-, G_+ и $\overline{G}_0$ гамильтониан непрерывен. Опираясь на определение вязкостного решения для задачи с непрерывным гамильтонианом, дадим следующее определение обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) с гамильтонианом, разрывным по фазовой переменной.

О п р е д е л е н и е 2. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) назовем непрерывную функцию $u(\cdot) : [0;T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую начальному условию (1.2) и такую, что

1) ее сужение $u_{|\overline{G}_0}(\cdot)$ на множество $\overline{G}_0$ является на этом множестве верхним вязкостным решением уравнения (1.1) с гамильтонианом вида (1.3);

2) сужения $u_{|G_-}(\cdot)$, $u_{|G_+}(\cdot)$, $u_{|G_0}(\cdot)$ на множества G_-, G_+ и G_0 соответственно являются на этих множествах вязкостными решениями уравнения (1.1) с гамильтонианом вида (1.3).

З а м е ч а н и е. Проверка того, что сужения функции $u(\cdot)$ суть вязкостные решения, сводится к проверке выполнения дифференциальных неравенств (2.2), (2.3). Следует подчеркнуть, что для точек (t,x), принадлежащих границе области $\overline{G}_0$ (лежащих на линиях $x = x_*$ и $x = x^*$), субдифференциал и супердифференциал функции $u(\cdot)$ не совпадают с соответствующими субдифференциалом и супердифференциалом сужения $D^-u_{|\overline{G}_0}(t,x)$ и $D^+u_{|\overline{G}_0}(t,x)$. В частности, если функция $u(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, $D^-u(t,x)$ является ограниченным (возможно, пустым) множеством, а множество $D^-u_{|\overline{G}_0}(t,x)$ в случае непустоты не ограничено.

3. Существование обобщенного решения

Покажем, что непрерывное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) в смысле определения 2 существует. Для этого опишем процедуру его построения.

3.1. Построение решения в области $\overline{G}_0$

В данном разделе построим удовлетворяющее начальному условию (1.2) верхнее вязкостное решение уравнения (1.1) на множестве $\overline{G}_0$, которое на множестве G_0 является вязкостным решением этого уравнения.

Согласно (1.3) гамильтониан в области $\overline{G}_0$ имеет вид

$$H(x,p) = h(x) + f(x)e^p + g(x)e^{-p}. \tag{3.1}$$

Поскольку в рассматриваемой области функции f и g неотрицательны, гамильтониан является выпуклым по переменной p. Кроме того, в открытой области G_0 гамильтониан (3.1) удовлетворяет условию коэрцитивности

$$H(x,p) \to +\infty \quad \text{при} \quad |p| \to \infty. \tag{3.2}$$

На границах $x = x_*$ и $x = x^*$ условие (3.2) не выполняется.

Для $\varepsilon > 0$ определим область

$$G_0^\varepsilon = \big\{(t,x) \,|\, 0 \le t < T,\ x_* + \varepsilon \le x \le x^* - \varepsilon\big\}.$$

Из [5, Sect. V; Theorem X.I, p. 678] получаем, что в области $G_0^\varepsilon \subset G_0$ существует единственное верхнее вязкостное решение $u^\varepsilon(\cdot)$ уравнения (1.1), (1.3), удовлетворяющее условию (1.2). При этом его значение в точке $(t,x) \in G_0^\varepsilon$ вычисляется как

$$u^\varepsilon(t,x) = \inf\left\{ u_0(\xi(0)) + \int\limits_0^t H^*\big(\xi(s),\dot{\xi}(s)\big)ds \,\middle|\, \xi(0) = y, \xi(t) = x,\ y \in [x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon] \right\}. \tag{3.3}$$

Здесь H^* — функция, сопряженная к гамильтониану, определяемая следующим образом:

$$H^*(x,q) = \sup_{p\in\mathbb{R}} \{pq - H(x,p)\}.$$

Функции ξ, по которым находится инфимум в (3.3), принадлежат классу $C^1(0,T;[x_*+\varepsilon; x^*-\varepsilon])$ непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[0,T]$ и принимающих значения из отрезка $[x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon]$.

В области G_0 рассмотрим функцию $u(\cdot)$, значение которой в точке $(t,x)\in G_0$ описывается формулой

$$u(t,x)=\min\left\{u_0(\xi(0))+\int\limits_0^t H^*\left(\xi(s),\dot\xi(s)\right)ds\,\middle|\,\xi(0)=y,\xi(t)=x,\,y\in(x_*;x^*)\right\}. \tag{3.4}$$

Минимум в (3.4) находится в классе $C^1(0,T;(x_*;x^*))$ непрерывно дифференцируемых функций, заданных на отрезке $[0,T]$ и принимающих значения из интервала $(x_*;x^*)$. Поскольку гамильтониан $H(\cdot)$ удовлетворяет условию (3.2) и является выпуклым по импульсной переменной, используя [10, Theorem I, p. 170], можно показать, что минимум в (3.4) достигается.

Характеристическая система (см., например, [11; 12]) для задачи (1.1), (1.2) с гамильтонианом (3.1) имеет вид

$$\begin{gathered}\dot x=H_p(x,p)=f(x)e^p-g(x)e^p,\\ \dot p=-H_x(x,p)=-h'(x)-f'(x)e^p-g'(x)e^{-p},\\ \dot z=pH_p(x,p)-H(x,p)=p(f(x)e^p-g(x)e^p)-f(x)e^p-g(x)e^p-h(x)\end{gathered} \tag{3.5}$$

и рассматривается с начальными условиями

$$x(0,y)=y,\quad p(0,y)=u_0'(y),\quad z(0,y)=u_0(y),\quad y\in(x_*;x^*). \tag{3.6}$$

Здесь $H_x(x,p)=\partial H(x,p)/\partial x,\ H_p(x,p)=\partial H(x,p)/\partial p$, а символом $f'(x)$ обозначается производная функции $f(x)$.

Решения системы (3.5), (3.6) называются характеристиками. Компоненты $x(\cdot,y)$, $p(\cdot,y)$ и $z(\cdot,y)$ решения называются соответственно фазовыми, импульсными и ценовыми характеристиками.

Выписывая необходимые условия экстремума для вариационной задачи (3.4), можно утверждать, что минимум достигается на фазовых характеристиках и согласно методу обобщенных характеристик [12; 13] значение функции $u(\cdot)$ в точке $(t,x)\in G_0$ вычисляется как

$$u(t,x)=\min\left\{u_0(y)+\int\limits_0^t\left(p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau))-H(x(\tau),p(\tau))\right)d\tau\,\middle|\,x(t,y)=x\right\}, \tag{3.7}$$

где $x(t)=x(t,y)$ и $p(t)=p(t,y)$ являются соответственно фазовой и импульсной компонентами решения характеристической системы (3.5), (3.6), определяемого параметром $y\in(x_*;x^*)$. Очевидно, что функция (3.7) удовлетворяет начальному условию (1.2).

Покажем, что функцию, заданную в открытой области G_0 репрезентативной формулой (3.7), можно непрерывно продолжить на границы области $x=x_*$ и $x=x^*$, и полученное продолжение будет верхним вязкостным решением уравнения (1.1) в области $\overline{G}_0$.

Исследуем в системе (3.5) уравнение для импульсной компоненты характеристики. Поскольку функции h, f и g, рассматриваемые на ограниченном отрезке $[x_*,x^*]$, непрерывно дифференцируемы, а f и g, кроме того, являются соответственно строго возрастающей и строго убывающей функциями, выводим оценку $-Ae^p-B<\dot p<Ae^{-p}+B$, где $A>0$, $B\geq 0$. Используя эту оценку, справедливо утверждать, что найдутся числа $K>0$, C_1 и C_2 такие, что

$$-Kt+C_1<p(t)<Kt+C_2. \tag{3.8}$$

Из (3.8) получаем, что $p(t)$ внутри области G_0 принимают конечные значения, поэтому импульсные компоненты характеристик (3.5), как и фазовые компоненты, продолжимы либо до момента $t=T$, либо до верхней ($x=x^*$) или нижней ($x=x_*$) границы области G_0. Таким образом, заданную соотношением (3.7) в области G_0 функцию $u(t,x)$ можно непрерывно продолжить на $\overline{G}_0$.

По схеме, аналогичной использованной в работе [8, разд. 3.5; 4] для доказательства супердифференцируемости обобщенного решения, покажем, что функция $u(t,x)$ субдифференцируема в $\overline{G}_0$, т. е. $\forall (t,x) \in \overline{G}_0 \quad D^- u(t,x) \neq \varnothing$.

Из (3.7) следует, что в точках $(t,x) \in G_0$ выполнены дифференциальные неравенства (2.2), (2.3), т. е. построенная функция есть вязкостное решение уравнения (1.1), (3.1) в области G_0.

Докажем, что на границах $x = x_*$ и $x = x^*$ имеет место дифференциальное неравенство (2.3).

Заметим, что если функция u дифференцируема в точке $(t,x) \in G_0$, то

$$D^- u(t,x) = D^+ u(t,x) = \Big\{ \Big(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \Big) \Big\}.$$

Символом $\mathrm{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot)$ дифференцируема. Определим множество

$$\partial u(t,x) = \mathrm{co}\Big\{ (a,s) \,\Big|\, a = \lim_{i\to\infty} \frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial t},\ s = \lim_{i\to\infty} \frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial x}; \\ (t_i,x_i) \to (t,x) \text{ при } i \to \infty, \quad (t_i,x_i) \in \mathrm{Dif}(u) \Big\}.$$

Для $0 < t < T$ справедливы включения

$$D^- u(t,x_*) \subset \{(a, s+k) \,|\, (a,s) \in \partial u(t,x_*),\ k > 0\},$$
$$D^- u(t,x^*) \subset \{(a, s-k) \,|\, (a,s) \in \partial u(t,x^*),\ k > 0\}.$$

Таким образом, в силу (3.1) для проверки выполнения неравенства (2.3) на верхней границе области $\overline{G}_0$ достаточно убедиться, что если $a + h(x^*) + f(x^*)e^s \geq 0$, то для всех $k > 0$ выполняется

$$a + h(x^*) + f(x^*)e^{s+k} \geq 0. \tag{3.9}$$

Поскольку $f(x^*) > 0$, неравенство (3.9) справедливо. Итак, на верхней границе $x = x^*$ имеет место дифференциальное неравенство (2.3) для субдифференциала функции $u(\cdot)$.

Для проверки неравенства (2.3) на нижней границе $x = x_*$ области $\overline{G}_0$ достаточно показать, что если $a + h(x_*) + g(x_*)e^{-s} \geq 0$, то для всех $k > 0$ выполняется

$$a + h(x_*) + g(x_*)e^{-(s-k)} = a + h(x_*) + g(x_*)e^{-s+k} \geq 0. \tag{3.10}$$

Неравенство (3.10) справедливо, так как $g(x_*) > 0$. Значит, в точках нижней границы $x = x_*$ выполнено дифференциальное неравенство (2.3), и это завершает доказательство того, что построенная в области $\overline{G}_0$ функция $u(\cdot)$ есть верхнее вязкостное решение в этой области и вязкостное решение в области G_0. Поскольку гамильтониан (3.1) и функция $u_0(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы, из результатов [5, Sect. III] следует, что в области $\overline{G}_0$ верхнее вязкостное решение, которое удовлетворяет начальному условию (1.2) и является вязкостным решением в области G_0, единственно.

Свойства решения на границах области $\overline{G}_0$. Изучим поведение построенного в области $\overline{G}_0$ решения $u(\cdot)$ на линиях $x = x^*$ и $x = x_*$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = u(t,x^*), \quad t \in [0,T].$$

Справедливо утверждение.

Лемма 1. *Функция $\varphi(\cdot)$ обладает следующими свойствами.*

I. $\varphi(0) = u_0(x^*)$.

II. *Для всех $t \in (0,T)$ субдифференциал $D^-\varphi(t)$ является непустым ограниченным множеством.*

III. *$\varphi(\cdot)$ дифференцируема почти всюду на $(0,T)$.*

IV. *Функция $\varphi(\cdot)$ в точке $t = 0$ имеет правую производную $\varphi'_+(0)$, и*

$$\varphi'_+(0) = u'_0(x^*).$$

Доказательство. Справедливость свойства I вытекает из описанного выше построения функции $u(t,x)$ на множестве $\overline{G}_0$.

Поскольку найденное в области $\overline{G}_0$ решение $u(\cdot)$ субдифференцируемо, функция $\varphi(\cdot)$ также является субдифференцируемой, и справедливо свойство

$$\forall\, t \in (0,T) \quad D^-\varphi(t) \neq \varnothing.$$

Из липшицевости функции $u(\cdot)$ следует, что функция $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, поэтому для всех $t \in (0,T)$ субдифференциал $D^-\varphi(t)$ — ограниченное множество, и свойство II доказано.

Свойство III следует из [14, Lemma 1, p. 274].

Пусть $\Delta > 0$. Согласно (3.7) существует $y_\Delta \in (x_*, x^*)$ такое, что

$$\varphi(\Delta) = u_0(y_\Delta) + \int\limits_0^\Delta \big(p_\Delta(\tau)H_p(x_\Delta(\tau), p_\Delta(\tau)) - H(x_\Delta(\tau), p_\Delta(\tau))\big)\, d\tau, \tag{3.11}$$

где $x_\Delta(t)$ и $p_\Delta(t)$ есть соответственно фазовая и импульсная компоненты решения характеристической системы (3.5), (3.6), определяемого параметром y_Δ.

При малых значениях Δ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка величину $p_\Delta(t)$ можно считать равной значению $u_0'(x^* - y_\Delta)$, а фазовую характеристику $x_\Delta(t)$ — отрезком прямой, соединяющей точки $(0, x^* - y_\Delta)$ и $(0, \Delta)$. При этом значение интеграла в выражении (3.11) по теореме о среднем будет равно $K\Delta^2$.

Поскольку $y_\Delta \to x^*$ при $\Delta \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\varphi(\Delta) - \varphi(0)}{\Delta} = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{u_0(y_\Delta) + K\Delta^2 + o(\Delta) - u_0(x^*)}{\Delta} = u_0'(x^*).$$

Итак, функция $\varphi(\cdot)$ в точке $t = 0$ имеет правую производную, значение которой равно производной начальной функции $u_0'(\cdot)$ в точке x^*, и справедливость свойства IV установлена.

Лемма доказана.

Для функции

$$\psi(t) = u(t, x_*), \quad t \in [0,T],$$

аналогично можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Функция $\psi(\cdot)$ обладает следующими свойствами.*

I. $\psi(0) = u_0(x_*)$.

II. *Для всех $t \in (0,T)$ субдифференциал $D^-\psi(t)$ является непустым ограниченным множеством.*

III. *$\psi(\cdot)$ дифференцируема почти всюду на $(0,T)$.*

IV. *Функция $\psi(\cdot)$ в точке $t = 0$ имеет правую производную $\psi_+'(0)$, и*

$$\psi_+'(0) = u_0'(x_*).$$

3.2. Построение решения в областях G_+ и G_-

Рассмотрим процедуру непрерывного продолжения на области G_+ и G_- построенного в области $\overline{G}_0$ решения.

В области G_+ гамильтониан задачи (1.1)–(1.3) имеет вид

$$H(x,p) = f(x^*)e^p, \tag{3.12}$$

и соответствующая характеристическая система записывается так:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = f(x^*)e^p, \\ \dot{p} &= -H_x(x,p) = 0, \\ \dot{z} &= pH_p(x,p) - H(x,p) = f(x^*)e^p(p-1). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Начальное многообразие, с которого согласно методу обобщенных характеристик [12; 13] следует выпускать характеристики, разбивается на две части:

$$\big\{(t,x,z)\,|\,t=0,\ x \geq x^*,\ z=u_0(x)\big\} \cup \big\{(t,x,z)\,|\,0 \leq t < T,\ x=x^*,\ z=\varphi(t)=u(t,x^*)\big\};$$

поэтому система (3.13) должна рассматриваться с двумя наборами начальных условий.

Начальные условия для характеристик, стартующих в момент $t=0$, имеют вид

$$x(0,y)=y, \quad p(0,y)=u_0'(y), \quad z(0,y)=u_0(y), \quad y \in [x^*;\infty). \tag{3.14}$$

Для характеристик, стартующих в момент $\tau \in [0,T)$ из точек, расположенных на линии $x=x^*$, начальные условия записываются следующим образом:

$$x(\tau)=x^*, \quad p(\tau) \in D^-\varphi(\tau), \quad z(\tau)=\varphi(\tau)=u(\tau,x^*). \tag{3.15}$$

Если функция $\varphi(\cdot)$ дифференцируема в точке τ, то в этой точке ее субдифференциал состоит из единственного элемента и $D^-\varphi(\tau)=D^+\varphi(\tau)=\varphi'(\tau)$. В точках недифференцируемости $\varphi(\cdot)$ супердифференциал пуст, а субдифференциал является отрезком. Значит, если в точке τ функция $\varphi(\cdot)$ недифференцируема, из точки (τ,x^*) выпускается пучок характеристик.

Из системы (3.13) несложно получить, что фазовые компоненты характеристик суть прямые вида

$$x = x_0 + f(x^*)e^{p(t_0,x_0)}t.$$

Здесь (t_0,x_0) — точка, из которой стартует фазовая характеристика; $p(t_0,x_0)$ — соответствующее начальное значение импульсной компоненты.

Определим множество

$$\Gamma_+ = \big\{(t,x,)\,|\,t=0,\ x \geq x^*\big\} \cup \big\{(t,x)\,|\,0 \leq t < T,\ x=x^*\big\}.$$

Для точки $(\bar{t},\bar{x}) \in G_+$ определим $X(\Gamma_+;\bar{t},\bar{x})$ как множество всех фазовых характеристик $x(\cdot)$, выпущенных из точек множества Γ_+, таких, что для них справедливо условие $x(\bar{t})=\bar{x}$. Из леммы 1 и вида фазовых характеристик следует, что $X(\Gamma_+;\bar{t},\bar{x})$ непусто. Используя метод обобщенных характеристик, можно показать, что функция

$$u(t,x) = \min_{X(\Gamma_+;\,t,\,x)} \left\{ u(\tau^\natural,x^\natural) + \int\limits_{\tau^\natural}^{t} \big(p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau))\big)\,d\tau \right\}$$

является вязкостным решением задачи (1.1)–(1.3) в области G_+. Здесь $(\tau^\natural,x^\natural)$ — точка из множества Γ_+, из которой выпущена фазовая характеристика $x(\cdot)$; $p(\cdot)$ — соответствующая импульсная характеристика;

$$u(\tau^\natural,x^\natural) = \begin{cases} u_0(x^\natural), & \text{если } \tau^\natural = 0, \\ \varphi(\tau^\natural), & \text{если } 0 \leq \tau^\natural < T, \quad x^\natural = x^*. \end{cases}$$

Аналогично строится вязкостное решение в области G_-. В этой области гамильтониан имеет вид

$$H(x,p) = g(x_*)e^{-p},$$

а соответствующая характеристическая система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = -g(x_*)e^{-p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x,p) = 0, \\ \dot{z} &= pH_p(x,p) - H(x,p) = -g(x_*)e^{-p}(p+1). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Для характеристик, выпускаемых в момент $t = 0$, начальные условия имеют вид

$$x(0,y) = y, \quad p(0,y) = u_0'(y), \quad z(0,y) = u_0(y), \quad y \in (-\infty; x_*].$$

Начальные условия для характеристик, стартующих в момент $\tau \in [0,T)$ из точек, расположенных на линии $x = x_*$, записываются так:

$$x(\tau) = x_*, \quad p(\tau) \in D^-\psi(\tau), \quad z(\tau) = \psi(\tau) = u(\tau, x_*).$$

Несложно проверить, что фазовые характеристики являются прямыми вида

$$x = x_0 - g(x_*)e^{-p(t_0,x_0)}t.$$

Определим множество

$$\Gamma_- = \big\{(t,x,) \,|\, t=0,\, x \le x_*\big\} \cup \big\{(t,x) \,|\, 0 \le t < T,\, x = x_*\big\}.$$

Для точки $(\bar{t},\bar{x}) \in G_-$ определим множество $X(\Gamma_-;\bar{t},\bar{x})$ как множество всех фазовых характеристик $x(\cdot)$, выпущенных из точек множества Γ_-, таких, что для них справедливо условие

$$x(\bar{t}) = \bar{x}.$$

Из леммы 2 и вида фазовых характеристик следует, что $X(\Gamma_-;\bar{t},\bar{x})$ непусто. Функция

$$u(t,x) = \min_{X(\Gamma_-;\,t,\,x)} \left\{ u(\tau^\natural, x^\natural) + \int\limits_{\tau^\natural}^{t} \big(p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau))\big)d\tau \right\}$$

является вязкостным решением задачи (1.1)–(1.3) в области G_-. Здесь $(\tau^\natural, x^\natural)$ — точка из множества Γ_-, из которой выпущена фазовая характеристика $x(\cdot)$; $p(\cdot)$ — соответствующая импульсная характеристика;

$$u(\tau^\natural, x^\natural) = \begin{cases} u_0(x^\natural), & \text{если } \tau^\natural = 0, \\ \psi(\tau^\natural), & \text{если } 0 \le \tau^\natural < T,\ x^\natural = x_*. \end{cases}$$

3.3. Теорема существования

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для задачи* (1.1)–(1.3) *существует обобщенное в смысле определения* 2 *решение* $u(\cdot) : [0;T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция, описание построения которой приведено выше, удовлетворяет определению 2 и, значит, является обобщенным решением.

Теорема доказана.

4. Единственность обобщенного решения

В области $\overline{G}_0$ верхнее вязкостное решение уравнения (1.1) такое, что оно является вязкостным решением в области G_0 и удовлетворяет начальному условию (1.2), единственно. Но на неограниченных открытых множествах $G_- \times \mathbb{R}$ и $G_+ \times \mathbb{R}$ гамильтониан , задаваемый формулой (1.3), не удовлетворяет известным достаточным условиям единственности вязкостного решения, поэтому на множестве $[0;T] \times \mathbb{R}$ обобщенное решение может быть неединственным.

Пусть начальная функция $u_0(\cdot)$ не только непрерывно дифференцируема, но и удовлетворяет условию Липшица

$$|u_0(x_1) - u_0(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Теорема 2. *Если начальная функция* $u_0(\cdot)$ *в задаче* (1.1)–(1.3) *удовлетворяет условию* (4.1)*, тогда обобщенное в смысле определения* 2 *решение единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что непрерывное продолжение на область G_+, удовлетворяющее неравенствам (2.2), (2.3), вязкостного решения задачи (1.1)–(1.3), которое определено на замкнутом множестве $\overline{G}_0$, единственно.

В области G_+ гамильтониан (1.3) имеет вид (3.12).

Пусть $M > x^*$. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.3) для $(t,x) \in (0,T) \times (x^*; M)$, т. е. в ограниченной по x области. В этом случае значения импульсных компонент характеристических систем (3.13), (3.14) и (3.13), (3.15) будут ограничены, $p(t) \in P$, $t \in [0,T]$, где P — ограниченный отрезок.

Определим

$$G_+^M = \big\{(t,x) \,|\, 0 < t < T,\, x^* < x < M\big\}.$$

Гамильтониан (3.12) на ограниченном замкнутом множестве $clG_+^M \times P$ удовлетворяет условию Липшица. Поэтому вязкостное решение задачи (1.1)–(1.3) в области G_+^M единственно.

Решение, построение которого описано в разд. 3.2, в области G_+ формируется из характеристик — решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.13). При этом рассматриваются два типа характеристик: первые стартуют в момент $t = 0$ с начальными условиями (3.14), а вторые — в моменты $\tau \in [0,T)$ с начальными условиями (3.15).

Характеристики второго типа участвуют в формировании решения только в ограниченной области. Существует число $K > x_*$ такое, что в области $G_+ \setminus clG_+^K$ решение строится только из характеристик первого типа и при этом в этой области решение задачи (1.1)–(1.3) совпадает с решением задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(x^*)e^{\partial u/\partial x} = 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

с начальным условием (1.2).

Гамильтониан (3.12) зависит только от импульсной переменной и является выпуклым, а начальная функция $u_0(\cdot)$ (по условию) удовлетворяет условию Липшица (4.1).

Из [15, Theorem 2.1] следует, что вязкостное решение задачи (4.2), (1.2) единственно.

Пусть $a > 0$. Поскольку вязкостное решение задачи (1.1)–(1.3) единственно в областях $G_+ \setminus clG_+^K$ и G_+^{K+a}, оно единственно в области G_+.

Так же доказывается единственность вязкостного решения задачи (1.1)–(1.3) в области G_-.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I // Мат. сб. 1966. Т. 70(112), № 3. С. 394–415.
2. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol.277, no. 1. P. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .

3. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
4. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 .
5. **Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L.** Hamilton–Jacobi equations with state constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318, no. 2. P. 643–683. doi: 10.1090/S0002-9947-1990-0951880-0 .
6. **Yokoyama E., Giga Y., Rybka P.** A microscopic time scale approximation to the behavior of the local slope on the faceted surface under a nonuniformity in supersaturation // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2008. Vol. 237, iss. 22. P. 2845–2855. doi: 10.1016/j.physd.2008.05.009 .
7. **Saakian D. B., Rozanova O., Akmetzhanov A.** Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution// Physical Review E — Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2008. Vol. 78, iss. 4. Art. no. 041908. doi: 10.1103/PhysRevE.78.041908 .
8. **Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г.** О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 191–208.
9. **Шагалова Л. Г.** Непрерывное обобщенное решение уравнения Гамильтона — Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические. обзоры. 2020. Т. 186. С. 144–151.
10. **Clarke F. H.** Tonelli's regurarity theory in the calculus of variations: Recent progress // Optimization and Related Fields. Lecture Notes in Math. 1986. Vol. 1190. P. 163–179. doi:10.1007/bfb0076705 .
11. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 832 с.
12. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern Mathematics and its Applications. 2004. Vol. 20. P. 2955–3091.
13. **Miricǎ Ş.** Generalized solutions by Cauchy's method of characteristics // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. 1987. Vol. 77. P. 317–350.
14. **Shagalova L.** A viscosity solution of the Hamilton–Jacobi equation with exponential dependence of Hamiltonian on the momentum // Cybernetics and Physics. 2021. Vol. 10, No. 4. P. 273–276. doi:10.35470/2226-4116-2021-10-2-273-276 .
15. **Bardi M., Evans L. C.** On Hopf's formulas for solutions of Hamilton–Jacobi equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1984. Vol. 8, iss. 11. P. 1373–1381. doi: 10.1016/0362-546X(84)90020-8 .

Поступила 16.09.2021
После доработки 17.01.2022
Принята к публикации 21.01.2022

Шагалова Любовь Геннадьевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: shag@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kruzhkov S.N. Generalized solutions of nonlinear equations of the first order with several variables. I. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1966, vol. 70 (112), no. 3, pp. 394–415 (in Russian).
2. Crandall M.G., Lions P. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
3. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* [Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations]. Moscow: Nauka Publ., 1991, 216 p. ISBN: 5-02-000139-2 .
4. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective.* Basel: Birkhäuser, 1995, 312 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 .
5. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P. Hamilton–Jacobi equations with state constraints. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1990, vol. 318, no. 2, pp. 643–683. doi: 10.1090/S0002-9947-1990-0951880-0 .

6. Yokoyama E., Giga Y., Rybka P. A microscopic time scale approximation to the behavior of the local slope on the faceted surface under a nonuniformity in supersaturation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2008, vol. 237, no. 22, pp. 2845–2855. doi: 10.1016/j.physd.2008.05.009 .
7. Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A. Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 78, no. 4, art. no. 041908. doi: 10.1103/PhysRevE.78.041908 .
8. Subbotina N.N., Shagalova L.G. On a solution to the Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation with state constraints. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 191–208 (in Russian).
9. Shagalova L.G. Continuous generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation with a noncoercive hamiltonian. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, 2020, vol. 186, pp. 144–151 (in Russian). doi: 10.36535/0233-6723-2020-186-144-151 .
10. Clarke F.H. Tonelli's regurarity theory in the calculus of variations: Recent progress. In: Conti R., De Giorgi E., Giannessi F. (eds), *Optimization and Related Fields*, 2006, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1190, pp. 163–179. doi: 10.1007/BFb0076705 .
11. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol. 2. Partial differential equations.* NY: Interscience, 1962, 830 p. ISBN: 9780470179857 . Translated to Russian under the title *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi.* Moscow: Mir Publ., 1964, 832 p.
12. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 135, no. 3, pp. 2955–3091. (Modern Math. Appl., vol. 20). doi: 10.1007/s10958-006-0146-2 .
13. Mirică Ş. Generalized solutions by Cauchy's method of characteristics. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1987, vol. 77, pp. 317–350.
14. Shagalova L. A viscosity solution of the Hamilton–Jacobi equation with exponential dependence of Hamiltonian on the momentum. *Cybernetics and Physics*, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 273–276. doi:10.35470/2226-4116-2021-10-2-273-276 .
15. Bardi M., Evans L.C. On Hopf's formulas for solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1984, vol. 8, no. 11, pp. 1373–1381. doi: 10.1016/0362-546X(84)90020-8 .

Received September 16, 2021
Revised January 17, 2022
Accepted January 21, 2022

Lyubov Gennad'evna Shagalova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: shag@imm.uran.ru .

Cite this article as: L. G. Shagalova. A continuous generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation with a three-component Hamiltonian, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 257–268 .