ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 512.542+519.175.1

О ГИПОТЕЗЕ ВАЙСА. I[1]

В. И. Трофимов

Пусть Γ — связный конечный граф и G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ такая, что стабилизатор G_x в ней вершины x графа Γ индуцирует на множестве $\Gamma(x)$ смежных с x вершин примитивную группу $G_x^{\Gamma(x)}$. Гипотеза Вайса утверждает, что при этих предположениях порядок группы G_x ограничен числом, зависящим лишь от степени $|\Gamma(x)|$ графа Γ. Цель работы, первой частью которой является эта статья, — продемонстрировать, что полученные в теории конечных групп общие результаты могут быть использованы для в значительной мере единообразного рассмотрения многих случаев (включая ряд не рассмотренных ранее случаев) гипотезы Вайса. Настоящая первая часть работы является, по существу, вводной. Однако уже этого предварительного рассмотрения оказывается достаточно, чтобы с использованием предшествующих результатов показать, что гипотеза Вайса справедлива для всех примитивных групп $G_x^{\Gamma(x)}$, отличных от почти простых групп и от экспоненцирований последних (т. е. групп типа PA).

Ключевые слова: граф, группа автоморфизмов, гипотеза Вайса.

V. I. Trofimov. On the Weiss conjecture. I.

Let Γ be a connected finite graph and G a vertex-transitive group of automorphisms of Γ such that the stabilizer G_x in G of a vertex x of Γ induces on the neighborhood $\Gamma(x)$ of x a primitive permutation group $G_x^{\Gamma(x)}$. The Weiss conjecture says that, under this assumption, the order of G_x is bounded from above by a number depending only on the degree $|\Gamma(x)|$ of Γ. In the work whose first part is the present paper we show that some results of the theory of finite groups can be used to provide unified considerations of a number of cases of the Weiss conjecture (including a number of cases not considered before). Although this first part is introductory, it makes possible to use certain previous results to confirm the Weiss conjecture for all primitive groups $G_x^{\Gamma(x)}$ different from groups of AS type and from groups of PA type (constructed on the basis of groups of AS type).

Keywords: graph, group of automorphisms, Weiss conjecture.

MSC: 05E18, 20B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-247-256

1. Введение

Под графом всюду далее понимается неориентированный граф без петель и без кратных ребер. Если Γ — граф, то $V(\Gamma)$ — множество его вершин, $E(\Gamma)$ — множество его ребер, $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ — его группа автоморфизмов (рассматриваемая как группа подстановок на $V(\Gamma)$), $d_\Gamma(.,.)$ — обычное расстояние между вершинами графа Γ. Для $x \in V(\Gamma)$ через $\Gamma(x)$ обозначается множество всех смежных с x вершин графа Γ. Если, кроме того, $G \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$, то G_x — стабилизатор в G вершины x, $G_x^{[i]}$ для $i \in \mathbf{Z}_{\ge 0}$ — поэлементный стабилизатор в G множества вершин графа Γ, удаленных от x на расстояние $\le i$ (таким образом, $G_x = G_x^{[0]}$). Для $x_1, x_2, \ldots \in V(\Gamma)$ полагаем $G_{x_1,x_2,\ldots} := G_{x_1} \cap G_{x_2} \cap \ldots$ и $G_{x_1,x_2,\ldots}^{[i]} := G_{x_1}^{[i]} \cap G_{x_2}^{[i]} \cap \ldots$, где $i \in \mathbf{Z}_{\ge 0}$. Как обычно, для произвольного непустого G-инвариантного множества $X \subseteq V(\Gamma)$ через G^X обозначается индуцированная G группа подстановок на X. Граф Γ называется локально конечным, если степени всех его вершин конечны.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-01-00456.

В [11] Ричард Вайс сформулировал следующую получившую в дальнейшем известность гипотезу.

Гипотеза Вайса. *Пусть* Γ *— связный локально конечный граф, и пусть* G *— такая вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа* Γ*, что для* $x \in V(\Gamma)$ *группа* G_x *конечна и группа* $G_x^{\Gamma(x)}$ *примитивна. Тогда порядок группы* G_x *ограничен числом, зависящим лишь от* $|\Gamma(x)|$*, или, эквивалентно,* $G_x^{[t]} = 1$ *для некоторого целого числа* t*, зависящего лишь от* $|\Gamma(x)|$.

Заметим, что, переходя в предположении выполнения условий гипотезы Вайса к универсальному накрытию $\hat{\Gamma}$ графа Γ и соответствующей накрывающей $\hat{G}$ группы $\hat{G}$ (при таком переходе группы $G_x^{\Gamma(x)}$, $x \in V(\Gamma)$, и $\hat{G}_{x'}^{\hat{\Gamma}(x')}$, $x' \in V(\hat{\Gamma})$, подстановочно изоморфны), получаем, что гипотезу Вайса достаточно рассмотреть в случае, когда граф Γ является деревом. Однако в настоящей первой части работы последнее предположение не приводит к сколько-нибудь значимым упрощениям и мы его не делаем. Отметим также, что в “стандартной” формулировке гипотезы Вайса граф Γ предполагается конечным (и опускается автоматически выполняющееся при этом условие конечности G_x). Однако хорошо известно (см., например, [9, разд. 8]), что эта формулировка эквивалентна приведенной выше.

Цель работы, первой частью которой является эта статья, — продемонстрировать, каким образом полученные в теории конечных групп общие результаты могут быть использованы для в значительной мере единообразного рассмотрения многих случаев (включая ряд не рассмотренных ранее случаев) гипотезы Вайса. Настоящая первая часть работы является вводной. В ней определяется ряд представляющих интерес в контексте гипотезы Вайса подгрупп группы G_x и устанавливаются их элементарные свойства. Излагаемый в этой части материал отчасти соответствует бэкграунду метода амальгам и задачи выталкивания (см., например, [5]) и в связи с этим не лишен дидактической составляющей. Уже его оказывается достаточно, чтобы с использованием некоторых предшествующих результатов (в частности, теоремы О'Нэна – Скотта) показать здесь, что гипотеза Вайса справедлива для всех групп $G_x^{\Gamma(x)}$, не являющихся примитивными группами типа II или типа III(b)(i) в обозначениях из [4]. Отметим, что при рассмотрении свойств G_x в этой части мы (имея в виду их использование в дальнейшем при рассмотрении других случаев) не стремились ограничиться теми из них, которые используются при получении последнего результата.

Напомним, что конечная группа K называется квазипростой, если $K = [K, K]$ и $K/Z(K)$ — простая группа. Субнормальная квазипростая подгруппа конечной группы G называется ее компонентой. Множество всех компонент конечной группы G обозначается через $\mathrm{Comp}(G)$. Для конечной группы G, как обычно, $E(G)$ — подгруппа группы G, порожденная всеми ее компонентами, $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, $F^*(G) = F(G)E(G)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы G. Если группа G действует (автоморфизмами) на группе H, то мы используем в очевидном смысле обозначения $C_G(H)$ и $C_H(G)$. При этом из контекста должно быть ясно, какое действие подразумевается.

Если p — простое число, G — конечная группа и V — конечный $\mathbf{F}_pG$-модуль (где $\mathbf{F}_p$ — поле из p элементов), то положим

$\mathcal{O}(G, V) := \{A \leq G : A/C_A(V)$ — элементарная абелева p-группа и $|V/C_V(A)| \leq |A/C_A(V)|\}$ (offenders of G on V);

$\mathcal{BO}(G, V) := \{A \in \mathcal{O}(G, V) : |B||C_V(B)| \leq |A||C_V(A)|$ для всех $B \leq A\}$ (best offenders of G on V);

$\mathcal{QO}(G, V) := \{A \in \mathcal{O}(G, V) : [[V, A], A] = 1\}$ (quadratic offenders of G on V);

$\mathcal{QBO}(G, V) := \mathcal{BO}(G, V) \cap \mathcal{QO}(G, V)$ (quadratic best offenders of G on V).

Элемент A из $\mathcal{O}(G, V)$ (соответственно из $\mathcal{BO}(G, V)$, из $\mathcal{QO}(G, V)$ или из $\mathcal{QBO}(G, V)$) называется нетривиальным, если $A \neq C_A(V)$. $\mathbf{F}_pG$-модуль V называется FF-модулем, если $\mathcal{O}(G, V)$ содержит нетривиальный элемент. (См. [6].)

2. Группа G_x. Предварительное рассмотрение

Всюду в этом разделе предполагается, что Γ *— связный локально конечный граф,* G *— вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа* Γ *и для* $x \in V(\Gamma)$ *группа* G_x *конечна, а группа* $G_x^{\Gamma(x)}$ *примитивна.* В частности, $G_x = \langle G_{x,y_1}, G_{x,y_2}\rangle$ для любых различных $\{x,y_1\},\{x,y_2\} \in E(\Gamma)$, а для любого $\{x,y\} \in E(\Gamma)$ найдется 2-элемент группы G, меняющий местами x и y.

Некоторые результаты настоящего раздела (например, предложения 2.1 и 2.2) можно назвать стандартными для рассматриваемой проблематики. Они включены скорее для удобства ссылок и большей замкнутости изложения.

Предложение 2.1. *Для* $\{x,y\} \in E(\Gamma)$ *справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если* $R \le G_{x,y}$ *и группа* $N_{G_x}(R)^{\Gamma(x)}$ *транзитивна, то из транзитивности группы* $N_{G_y}(R)^{\Gamma(y)}$ *(в частности, из наличия в* G *элемента, нормализующего* R *и меняющего местами вершины* x *и* y*) следует, что* $R = 1$.

(2) *Если* d *— простое число,* $D \in \mathrm{Syl}_d(G_{x,y})$ *и* $1 \ne R \operatorname{char} D$*, то группа* $N_{G_x}(R)^{\Gamma(x)}$ *интранзитивна и, в частности,* $R \ntrianglelefteq G_x$*. Если при этом* d *делит* $|\Gamma(x)|$*, то* $R \ntrianglelefteq G_{x,y}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) очевидно. Докажем утверждение (2). Поскольку D, а следовательно и R, нормализуется некоторым элементом группы G, меняющим местами вершины x и y, то из (1) вытекает интранзитивность группы $N_{G_x}(R)^{\Gamma(x)}$ (и как следствие, $R \ntrianglelefteq G_x$). Если при этом d делит $|\Gamma(x)|$, то $D \notin \mathrm{Syl}_d(G_x)$ и, следовательно, $N_{G_x}(D) \nleq G_{x,y}$. Но тогда $N_{G_x}(R) \nleq G_{x,y}$, что в силу максимальности подгруппы $G_{x,y}$ группы G_x влечет $\langle N_{G_x}(R), G_{x,y}\rangle = G_x$. Поскольку $R \ntrianglelefteq G_x$, отсюда следует, что $R \ntrianglelefteq G_{x,y}$.

Всюду далее в этом разделе предполагается, что $G_{x,y}^{[1]} \ne 1$ *для* $\{x,y\} \in E(\Gamma)$.

Предложение 2.2. *Существует простое число* p *такое, что для* $\{x,y\} \in E(\Gamma)$ *справедливы следующие утверждения.*

(1) $G_{x,y}^{[1]}$ *является* p*-группой.*

(2) $F^*(G_x) = O_p(G_x)$ *и* $F^*(G_{x,y}) = O_p(G_{x,y})$.

(3) *Если* $1 \ne R \operatorname{char} O_p(G_{x,y})$*, то* $N_{G_x}(R) = G_{x,y}$*. В частности,* $O_p(N_{G_x}(O_p(G_{x,y}))) = O_p(G_{x,y})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательства хорошо известных утверждений (1) и (2) (результатов “типа теоремы Томпсона – Виланда”) см., например, в [10]. Если $1 \ne R \operatorname{char} O_p(G_{x,y})$, то $G_{x,y} \le N_{G_x}(R)$ и $N_{G_x}(R) \ne G_x$ в силу утверждения (1) предложения 2.1, что ввиду максимальности подгруппы $G_{x,y}$ группы G_x влечет (3).

С учетом утверждения (1) предложения 2.2 условимся, что *всюду далее в этом разделе через* p *обозначается простое число такое, что* $G_{x,y}^{[1]}$ *— (неединичная)* p*-группа для всех* $\{x,y\} \in E(\Gamma)$.

Для $\{x,y\} \in E(\Gamma)$ (ввиду $G_{x,y}^{[1]} \trianglelefteq G_x^{[1]} \trianglelefteq G_x$) имеем $G_{x,y}^{[1]} \le O_p(G_x)$. Кроме того, легко доказывается (см. [12, с. 44]), что для $\{x,y\} \in E(\Gamma)$ имеем

$$G_{x,y}^{[1]} \le O_p(G_{x,y}) \nleq G_x^{[1]},$$

$$O_p(G_x) = O_p(G_x^{[1]}) \nleq G_y^{[1]}$$

(в [12, с. 44] равенство $O_p(G_x) = O_p(G_x^{[1]})$ доказывается в предположении наличия у $G_x^{\Gamma(x)}$ регулярной нормальной элементарной абелевой подгруппы, но при $O_p(G_x) \ne O_p(G_x^{[1]})$ таковая имеется, поскольку в этом случае $O_p(G_x)^{\Gamma(x)} \ne 1$; если $O_p(G_x^{[1]}) \le G_y^{[1]}$, то $O_p(G_x^{[1]}) = G_{x,y}^{[1]}$ вопреки предложению 2.1(1)) и

$$O_p(G_x) = O_p(G_{x,y}) \cap G_x^{[1]}$$

(ввиду $O_p(G_x) \leq G_x^{[1]}$ и $O_p(G_{x,y}) \cap G_x^{[1]} \trianglelefteq G_x^{[1]} \trianglelefteq G_x$). Как следствие, получаем, что для $\{x,y\} \in E(\Gamma)$

$$O_p(G_{x,y}^{\Gamma(x)}) \neq 1.$$

В дальнейшем эти соотношения зачастую будут использоваться без явного на то указания.

Предложение 2.3. *Для $x \in V(\Gamma)$ у группы $G_x^{\Gamma(x)}$ отсутствуют регулярные нормальные неабелевы подгруппы. В частности,* $\mathrm{Soc}(G_x^{\Gamma(x)})$ *— единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G_x^{\Gamma(x)}$.*

Доказательство. Поскольку $O_p(G_{x,y}^{\Gamma(x)}) \neq 1$ для $\{x,y\} \in E(\Gamma)$, то справедливость предложения 2.3 следует из доказательства утверждения (i) теоремы 4.7В в [2]. (В этом доказательстве из [2] рассматривается конечная примитивная группа подстановок G такая, что регулярна неабелева подгруппа $H = \mathrm{Soc}(G)$ группы G, но те же рассуждения сохраняют силу и в применении к произвольной регулярной неабелевой нормальной подгруппе H группы G.) Отметим, что хотя в условие теоремы 4.7В из [2] входит предположение о справедливости гипотезы Шрейера (доказанной в настоящее время лишь с использованием классификации конечных простых групп), это предположение не используется при доказательстве утверждения (i) теоремы 4.7В в [2], а следовательно, не используется и при доказательстве предложения 2.3.

Замечание 2.1. Предложение 2.3 влечет результат работы [7] о том, что $G_x^{\Gamma(x)}$ не является группой типа III(c) в обозначениях из [4], но кроме того, влечет, что $G_x^{\Gamma(x)}$ не является ни группой типа III(a)(ii), ни группой типа III(b)(ii) с H типа III(a)(ii) в обозначениях из [4]. Если цоколь группы $G_x^{\Gamma(x)}$ абелев, то $G_{x,y}^{[3]} = 1$ для $\{x,y\} \in E(\Gamma)$ согласно [12] и [8]. (Следует отметить, что еще в 1990-е годы Бернд Штельмахер высказывал идеи, каким образом может быть завершено рассмотрение случая группы $G_x^{\Gamma(x)}$ с абелевым цоколем.) Таким образом, если $G_{x,y}^{[3]} \neq 1$ для $\{x,y\} \in E(\Gamma)$, то с учетом теоремы О'Нэна – Скотта (см. [4]) примитивная группа $G_x^{\Gamma(x)}$ является группой одного из следующих типов в обозначениях из [4]: II; III(b)(i); III(a)(i); III(b)(ii) с H типа III(a)(i). В следующем разделе мы покажем (см. теорему 3.1), что для группы $G_x^{\Gamma(x)}$ последние два типа также не реализуются (уже при условии, что $G_{x,y}^{[1]} \neq 1$ для $\{x,y\} \in E(\Gamma)$).

Пусть $r \geq 1$ — наибольшее целое число со свойством $G_{x,y}^{[r]} \neq 1$ для $\{x,y\} \in E(\Gamma)$. Согласно предложению 2.1(1), если $\{x,y\} \in E(\Gamma)$ и i — положительное целое число, не превосходящее r, то

$$G_x^{[i+1]} \lneqq G_{x,y}^{[i]} \lneqq G_x^{[i]}. \tag{2.1}$$

Дополнением этого утверждения является

Предложение 2.4. *Пусть $x \in V(\Gamma)$, $U \trianglelefteq G_x$ и i — положительное целое число такое, что $U \cap G_{x,y}^{[i]} \not\leq G_x^{[i+1]}$ для $y \in \Gamma(x)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *$U \cap G_{x,y_1}^{[i]} \not\leq G_{x,y_2}^{[i]}$ для любых $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$.*

(2) *Если $h \in G_x \setminus G_x^{[1]}$, то $[h, U \cap G_x^{[i]}] \not\leq G_x^{[i+1]}$.*

Доказательство. Докажем утверждение (1). Следующим образом определим $G_x^{\Gamma(x)}$-инвариантное отношение эквивалентности $\sim$ на $\Gamma(x)$: для $z_1, z_2 \in \Gamma(x)$ полагаем $z_1 \sim z_2$, если и только если $U \cap G_{x,z_1}^{[i]} = U \cap G_{x,z_2}^{[i]}$. В силу примитивности группы $G_x^{\Gamma(x)}$ либо любые две вершины из $\Gamma(x)$ являются $\sim$-эквивалентными, но это противоречит условию $U \cap G_{x,y}^{[i]} \not\leq G_x^{[i+1]}$, либо любая вершина из $\Gamma(x)$ является $\sim$-эквивалентной лишь себе, что влечет $U \cap G_{x,y_1}^{[i]} \not\leq G_{x,y_2}^{[i]}$ для любых $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$ (ввиду $U \cap G_{x,y_1}^{[i]} \neq U \cap G_{x,y_2}^{[i]}$ и $|U \cap G_{x,y_1}^{[i]}| = |U \cap G_{x,y_2}^{[i]}|$). Утверждение (1) доказано.

Докажем утверждение (2). Имеем $h(z) \neq z$ для некоторой вершины $z \in \Gamma(x)$. Поскольку $G_{x,z}^{[i]} \not\leq G_{x,h(z)}^{[i]}$ в силу утверждения (1), то $h^{-1}G_{x,z}^{[i]}h \not\leq h^{-1}G_{x,h(z)}^{[i]}h = G_{x,z}^{[i]}$, и потому $[h, G_{x,z}^{[i]}] \not\leq G_{x,z}^{[i]}$. Таким образом, $[h, G_x^{[i]}] \not\leq G_x^{[i+1]}$. Утверждение (2) доказано.

Следствие 2.1. *Пусть $\{x,y\} \in E(\Gamma)$ и i — положительное целое число, не превосходящее r. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) $G_{x,y}^{[i]} \not\leq G_{x,z}^{[i]}$ *для всех* $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$.

(2) *Если* $h \in G_x \setminus G_x^{[1]}$, *то* $[h, G_x^{[i]}] \not\leq G_x^{[i+1]}$ *и* $[h, O_p(G_x)] \not\leq G_x^{[2]}$.

Доказательство. Из (2.1) и предложения 2.4, например с $U = G_x$, следует, что $G_{x,y}^{[i]} \not\leq G_{x,z}^{[i]}$ для всех $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$ и, кроме того, $[h, G_x^{[i]}] \not\leq G_x^{[i+1]}$ для $h \in G_x \setminus G_x^{[1]}$. Если же в предложении 2.4(2) положить $U = O_p(G_x)$ и $i = 1$, то с учетом (2.1) получаем, что $[h, O_p(G_x)] \not\leq G_x^{[2]}$ для $h \in G_x \setminus G_x^{[1]}$.

Замечание 2.2. Для $x \in V(\Gamma)$ по выбору r имеем $G_x^{[r]} \neq 1$ и $G_x^{[r+2]} = 1$. Что касается $G_x^{[r+1]}$, то имеются как примеры Γ и G со свойством $G_x^{[r+1]} = 1$ для $x \in V(\Gamma)$, так и примеры Γ и G со свойством $G_x^{[r+1]} \neq 1$ для $x \in V(\Gamma)$.

Для произвольных смежных вершин x и y графа Γ положим

$$Q_{x,y} := \Omega_1(Z(O_p(G_{x,y}))).$$

(Из $G_{x,y}^{[1]} \neq 1$ и предложения 2.2(1) вытекает $Q_{x,y} \neq 1$.)

Предложение 2.5. $Q_{x,y} \leq G_{x,y}^{[r]}$ *для* $\{x,y\} \in E(\Gamma)$.

Доказательство. Предположим, что $Q_{x,y} \not\leq G_{x,y}^{[r]}$. Тогда найдутся такие $g \in Q_{x,y}$ и $\{z_1, z_2\} \in E(\Gamma)$, что $d_\Gamma(x, z_1) < r$, $g(z_1) = z_1$ и $g(z_2) \neq z_2$. Поскольку $G_{z_1,z_2}^{[r]} \leq O_p(G_x) \leq O_p(G_{x,y})$ влечет, что g централизует $G_{z_1,z_2}^{[r]}$, то $N_{G_{z_1}}(G_{z_1,z_2}^{[r]}) \geq \langle G_{z_1,z_2}, g\rangle = G_{z_1}$. Но тогда по предложению 2.1(1) имеем $G_{z_1,z_2}^{[r]} = 1$, что противоречит выбору r. Предложение доказано.

Для произвольной вершины x графа Γ положим

$$V_x := \langle Q_{x,y} : y \in \Gamma(x)\rangle.$$

Пусть $x \in V(\Gamma)$. Поскольку $G_{x,y}^{[r]} \leq O_p(G_x) \leq O_p(G_{x,y})$ для любой вершины $y \in \Gamma(x)$, то предложение 2.5 влечет, что V_x — нормальная элементарная абелева p-подгруппа группы G_x, $V_x \leq Z(O_p(G_x))$ и $V_x \leq G_x^{[r]}$. Кроме того, $V_x \cap G_{x,y}^{[r]} \not\leq G_x^{[r+1]}$ для $y \in \Gamma(x)$ (так как $Q_{x,y} \leq V_x \cap G_{x,y}^{[r]}$, а $Q_{x,y} \not\leq G_x^{[r+1]}$ ввиду $G_{x,y}^{[r+1]} = 1$). В частности, в силу $O_p(G_x) \leq C_{G_x}(V_x)$ группа $G_x/O_p(G_x)$ естественным образом действует на V_x. При этом $V_x \not\leq G_x^{[r+1]}$, и, более того, с учетом предложения 2.4(2) (для $U = V_x$ и $i = r$)

$$C_{G_x}(V_x/(V_x \cap G_x^{[r+1]})) \leq G_x^{[1]}. \tag{2.2}$$

Зафиксируем до конца настоящего раздела $x \in V(\Gamma)$. В силу $V_x \leq G_x^{[r]}$ и $V_x \not\leq G_x^{[r+1]}$ (см. выше) найдется $z \in V(\Gamma)$ такая, что $d_\Gamma(x,z) = r$, $|V_x^{\Gamma(z)}| > 1$ и $|V_x^{\Gamma(z)}| \geq |V_x^{\Gamma(z')}|$ для всех $z' \in V(\Gamma)$ со свойством $d_\Gamma(x,z') = r$. Положим

$$e := |V_x^{\Gamma(z)}|.$$

Зафиксируем некоторый элемент a группы G со свойством $a(z) = x$, и пусть

$$A := V_{a(x)}O_p(G_x)/O_p(G_x) \leq G_x/O_p(G_x).$$

Тогда с учетом $O_p(G_x) \leq G_x^{[1]}$ группа A естественным образом действует на $\Gamma(x)$ и индуцирует на $\Gamma(x)$ элементарную абелеву p-группу порядка e.

Далее, существует вершина $x' \in \Gamma(x)$ со свойством $d_\Gamma(a(x), x') = r - 1$. Для так выбранной вершины x' имеем

$$V_{a(x)} \leq O_p(G_{x'}) \leq O_p(G_{x,x'}) \tag{2.3}$$

и

$$V_{a(x)} \cap G_x^{[1]} \le G_{x,x'}^{[1]} \le O_p(G_x). \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что действие A на $\Gamma(x)$ точно, $|A| = e$ и

$$[A, G_x^{[1]}/O_p(G_x)] = 1. \tag{2.5}$$

Из $O_p(G_x) \le C_{G_x}(V_x)$ и (2.2) теперь следует, что группа A естественным образом действует на V_x, причем индуцированное действие A на $V_x/(V_x \cap G_x^{[r+1]})$ является точным. Поскольку

$$|V_x : V_x \cap G_{a(x)}^{[1]}| = |V_x^{\Gamma(a(x))}| \le |V_x^{\Gamma(z)}| = e$$

по выбору z, то

$$|V_x/(V_x \cap G_x^{[r+1]})| \le |(V_x \cap G_{a(x)}^{[1]})/(V_x \cap G_x^{[r+1]})||A|.$$

Но $V_x \cap G_{a(x)}^{[1]} \le O_p(G_{a(x)})$, и следовательно, $V_x \cap G_{a(x)}^{[1]} \le C_{V_x}(V_{a(x)}) = C_{V_x}(A)$. Таким образом,

$$|V_x/(V_x \cap G_x^{[r+1]})| \le |C_{V_x/(V_x \cap G_x^{[r+1]})}(A)||A|.$$

Ввиду $C_A(V_x/(V_x \cap G_x^{[r+1]}) = 1$ отсюда следует, что элементарная абелева p-группа

$$V := V_x/(V_x \cap G_x^{[r+1]}),$$

рассматриваемая как $\mathbf{F}_p(G_x/O_p(G_x))$-модуль (напомним, что $O_p(G_x) \le C_{G_x}(V_x)$), есть FF-модуль, для которого в силу (2.2)

$$C_{G_x/O_p(G_x)}(V) = C_{G_x}(V)/O_p(G_x) \le G_x^{[1]}/O_p(G_x), \tag{2.6}$$

причем A — нетривиальный элемент из $\mathcal{O}(G_x/O_p(G_x), V)$ с $C_A(V) = 1$. Более того, $A \in \mathcal{QO}(G_x/O_p(G_x), V)$, поскольку $[V_x, V_{a(x)}] \le O_p(G_{a(x)}) \le C_{G_{a(x)}}(V_{a(x)})$ влечет $[[V, A], A] = 1$.

Пусть B — нетривиальная подгруппа группы A, для которой (среди всех нетривиальных подгрупп группы A) число $|C_V(B)||B|$ является наибольшим. Тогда B — нетривиальный элемент из $\mathcal{QBO}(G_x/O_p(G_x), V)$ с $C_B(V) = 1$.

З а м е ч а н и е 2.3. Отметим попутно, что в силу $G_x^{[r+1]} \le O_p(G_{a(x)}) \le C_G(V_{a(x)})$ и $V_{a(x)}^{\Gamma(x)} \ne 1$ группа $C_{G_x}(G_x^{[r+1]})$ действует нетривиально (и следовательно, транзитивно) на $\Gamma(x)$.

Положим

$$\tilde{G}_x := G_x/C_{G_x}(V)$$

(и для любой подгруппы H группы G_x будем обозначать через $\tilde{H}$ группу $HC_{G_x}(V)/C_{G_x}(V)$). Заметим, что в силу $O_p(G_x) \le C_{G_x}(V) \le G_x^{[1]}$ (см. (2.6)) для произвольных $X \le G_x/O_p(G_x)$ и $Y \le \tilde{G}_x$ естественным образом определены подгруппа $\tilde{X}$ группы $\tilde{G}_x$ и подгруппы $X^{\Gamma(x)}$ и $Y^{\Gamma(x)}$ группы $G_x^{\Gamma(x)}$.

Для точного $\mathbf{F}_p\tilde{G}_x$-модуля V с учетом $C_B(V) = 1$ получаем, что $\tilde{B}$ — нетривиальный элемент из $\mathcal{BO}(\tilde{G}_x, V)$. Теперь так называемая $\mathcal{P}(G, V)$-теорема из [1], применяемая к $\tilde{G}_x$ и V, влечет справедливость утверждения (1) следующего предложения.

Предложение 2.6. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Каждая подгруппа из $\mathcal{BO}(\tilde{G}_x, V)$ нормализует каждую компоненту группы $\tilde{G}_x$. В частности, $\tilde{B}$ нормализует каждую компоненту группы $\tilde{G}_x$.*

(2) *B нормализует каждую компоненту группы $G_x/O_p(G_x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Остается доказать утверждение (2). Пусть K — произвольная компонента группы $G_x/O_p(G_x)$. Если $K \le C_{G_x}(V)/O_p(G_x)$, то B централизует K в силу $C_{G_x}(V)/O_p(G_x) \le G_x^{[1]}/O_p(G_x) \le C_{G_x/O_p(G_x)}(A)$ (см. (2.6) и (2.5)). Предположим поэтому, что $K \not\leq C_{G_x}(V)/O_p(G_x)$. В этом случае $\tilde{K}$ — компонента группы $\tilde{G}_x$ и из утверждения (1) следует, что $\tilde{B}$ нормализует $\tilde{K}$. Но тогда B нормализует K (поскольку различные компоненты группы централизуют друг друга). Предложение 2.6 доказано.

Положим
$$S := \langle O_p(G_{x,y}) : y \in \Gamma(x)\rangle$$
(ср. [10], где соответствующая подгруппа группы G_x обозначается через E_x). Тогда $S \trianglelefteq G_x$ и $S^{\Gamma(x)} \neq 1$ (ввиду $O_p(G_{x,y})^{\Gamma(x)} \neq 1$ для $y \in \Gamma(x)$). В частности, группа $S^{\Gamma(x)}$ транзитивна. Кроме того, $O_p(S) = O_p(G_x)$. Далее, из $[G_x^{[1]}, O_p(G_{x,y})] \leq G_x^{[1]} \cap O_p(G_{x,y}) = O_p(G_x)$ для $y \in \Gamma(x)$ следует
$$[G_x^{[1]}, S] \leq O_p(G_x), \tag{2.7}$$
а из (2.3) следует
$$B \leq A \leq S/O_p(G_x). \tag{2.8}$$
Таким образом, $A \in \mathcal{QO}(S/O_p(G_x), V)$ с $C_A(V) = 1$ и $B \in \mathcal{QBO}(S/O_p(G_x), V)$, если рассматривать V как $\mathbf{F}_p(S/O_p(G_x))$-модуль.

Положим
$$\bar{G}_x := G_x/O_p(G_x)$$
(и для любой подгруппы H группы G_x будем обозначать через $\bar{H}$ группу $HO_p(G_x)/O_p(G_x)$, причем для группы $\bar{H}$ естественным образом определено действие на $\Gamma(x)$, ядро которого будет обозначаться через $\bar{H}^{[1]}$, т.е. $\bar{H}^{[1]} = \overline{H^{[1]}}$).

Согласно (2.7) имеем $[\bar{S}, \bar{G}_x^{[1]}] = 1$. Кроме того, ввиду (2.8) имеем $B \leq A \leq \bar{S} \leq \bar{G}_x$, что с учетом (2.3) влечет
$$B \leq A \leq \overline{O_p(G_{x'})} \leq O_p(\bar{G}_{x,x'}) \cap \bar{S} = O_p(\bar{S}_{x'}). \tag{2.9}$$
Как следствие (2.9) получаем
$$\tilde{B} \leq \tilde{A} \leq \widetilde{O_p(G_{x'})} \leq O_p(\tilde{G}_{x,x'}) \cap \tilde{S} = O_p(\tilde{S}_{x'}) \tag{2.10}$$
и
$$B^{\Gamma(x)} \leq A^{\Gamma(x)} \leq O_p(G_{x'})^{\Gamma(x)} \leq O_p(G_{x,x'}^{\Gamma(x)}) \cap S^{\Gamma(x)} = O_p(S_{x'}^{\Gamma(x)}). \tag{2.11}$$
Далее, в силу (2.4)
$$|A^{\Gamma(x)}| = |\tilde{A}| = |A| = e > 1, \tag{2.12}$$
и следовательно,
$$|B^{\Gamma(x)}| = |\tilde{B}| = |B| > 1.$$
Из (2.12) вытекает, что $\tilde{A}$ — нетривиальный элемент из $\mathcal{QO}(\tilde{S}, V)$ (с $C_{\tilde{A}}(V) = 1$) и $\tilde{B}$ — нетривиальный элемент из $\mathcal{QBO}(\tilde{S}, V)$ (с $C_{\tilde{B}}(V) = 1$). С учетом (2.10) это доказывает утверждение (1) следующего предложения.

Предложение 2.7. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Группа V, рассматриваемая как $\mathbf{F}_p\tilde{S}$-модуль, является точным FF-модулем с нетривиальным элементом $\tilde{A} \in \mathcal{QO}(\tilde{S}, V)$ и с нетривиальным элементом $\tilde{B} \in \mathcal{QBO}(\tilde{S}, V)$, причем $\tilde{B} \leq \tilde{A} \leq \widetilde{O_p(G_{x'})} \leq O_p(\tilde{S}_{x'})$.*

(2) $O_p(\tilde{S}) = 1$.

Доказательство. Утверждение (1) доказано выше. Для доказательства утверждения (2) предварительно заметим, что $C_{\bar{S}}(V) \leq \bar{S} \cap \bar{G}_x^{[1]} \leq Z(\bar{S})$ в силу (2.6) и (2.7). Если $O_p(\tilde{S}) \cong O_p(\bar{S}/C_{\bar{S}}(V)) \neq 1$, отсюда следует, что прообраз $Z(O_p(\bar{S}/C_{\bar{S}}(V)))$ при естественном гомоморфизме $\bar{S} \to \bar{S}/C_{\bar{S}}(V)$ является нильпотентной группой, порядок которой делится на p. Но последнее противоречит равенству $O_p(\bar{S}) = 1$. Утверждение (2) доказано.

3. Применение в случае не почти простой группы $G_x^{\Gamma(x)}$

Всюду в этом разделе предполагается выполненными условия разд. 2: Γ *— связный локально конечный граф,* G *— вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа* Γ, $x \in V(\Gamma)$, *группа* G_x *конечна, группа* $G_x^{\Gamma(x)}$ *примитивна,* p *— простое число, для* $y \in \Gamma(x)$ *группа* $G_{x,y}^{[1]}$ *— неединичная* p*-группа.* Мы также используем обозначения (и результаты) из разд. 2.

Напомним, что $\bar{G}_x = G_x/O_p(G_x)$ и $\tilde{G}_x = G_x/C_{G_x}(V)$. Напомним также, что $O_p(G_x) \leq C_{G_x}(V) \leq G_x^{[1]}$ (см.(2.2)) и $B \leq A \leq \bar{S} \leq \bar{G}_x$ (см.(2.8)).

Принимая во внимание замечание 2.1, мы *дополнительно предполагаем в этом разделе, что группа* $G_x^{\Gamma(x)}$ *является группой одного из следующих типов в обозначениях из* [4]: II; III(a)(i); III(b)(i); III(b)(ii) *с* H *типа* III(a)(i). Таким образом, $\mathrm{Soc}(G_x^{\Gamma(x)})$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G_x^{\Gamma(x)}$ и $\mathrm{Soc}(G_x^{\Gamma(x)}) = T_1 \times \ldots \times T_k$ для некоторого положительного целого числа k и некоторых простых неабелевых групп $T_1 \cong \ldots \cong T_k$.

Предложение 3.1. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) $F(\bar{G}_x) = F(\bar{G}_x^{[1]})$.

(2) $\bar{S} \cap \bar{G}_x^{[1]} = Z(\bar{S}) = F(\bar{S})$.

(3) $\mathrm{Soc}(\bar{S}^{\Gamma(x)}) = \mathrm{Soc}(G_x^{\Gamma(x)}) = T_1 \times \ldots \times T_k$, *и компоненты группы* $\bar{S}$ *— это в точности коммутанты прообразов* $T_1, \ldots, T_k$ *при естественном гомоморфизме* $\bar{S} \to \bar{S}^{\Gamma(x)}$.

(4) $\mathrm{Comp}(\bar{G}_x) = \mathrm{Comp}(\bar{S}) \cup \mathrm{Comp}(\bar{G}_x^{[1]})$, *причем* $\mathrm{Comp}(\bar{S}) \cap \mathrm{Comp}(\bar{G}_x^{[1]}) = \varnothing$. *Таким образом,* $E(\bar{G}_x)$ *— центральное произведение групп* $E(\bar{S})$ *и* $E(\bar{G}_x^{[1]})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $F((\bar{G}_x)^{\Gamma(x)}) = 1$, то имеет место (1).

Так как $\bar{S} \cap \bar{G}_x^{[1]} \leq Z(\bar{S})$ в силу (2.7), то с учетом (1) заключаем, что имеет место (2).

Поскольку $1 \neq \bar{S}^{\Gamma(x)} \trianglelefteq G_x^{\Gamma(x)}$ и $\mathrm{Soc}(G_x^{\Gamma(x)})$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G_x^{\Gamma(x)}$, то $\mathrm{Soc}(\bar{S}^{\Gamma(x)}) = \mathrm{Soc}(\bar{G}_x^{\Gamma(x)}) = T_1 \times \ldots \times T_k$. С учетом (2) это влечет (3) (см. [3, (6.5.1)]).

Ясно, что

$$\mathrm{Comp}(\bar{S}) \cup \mathrm{Comp}(\bar{G}_x^{[1]}) \subseteq \mathrm{Comp}(\bar{G}_x),$$

причем

$$\mathrm{Comp}(\bar{S}) \cap \mathrm{Comp}(\bar{G}_x^{[1]}) = \varnothing$$

в силу (2). Пусть K — компонента группы $\bar{G}_x$. Тогда либо $K \leq \bar{G}_x^{[1]}$, и в этом случае $K \in \mathrm{Comp}(\bar{G}_x^{[1]})$, либо $K^{\Gamma(x)} \in \mathrm{Comp}(\bar{G}_x^{\Gamma(x)})$, и в этом случае $K^{\Gamma(x)} = T_i$ для некоторого $1 \leq i \leq k$. Но в последнем случае в силу (3) коммутант прообраза T_i при естественном гомоморфизме $\bar{S} \to \bar{S}^{\Gamma(x)}$, являющийся компонентой группы $\bar{S}$, совпадает с K (действительно, $\mathrm{Comp}(\bar{S}) \subseteq \mathrm{Comp}(\bar{G}_x)$, а различные компоненты группы $\bar{G}_x$ коммутируют). Таким образом, $K \in \mathrm{Comp}(\bar{S})$, что завершает доказательство (4).

Поскольку действие A на $\Gamma(x)$ является точным, то (2.11) влечет

$$1 \neq B^{\Gamma(x)} \leq A^{\Gamma(x)} \leq O_p(G_{x,x'}^{\Gamma(x)}). \tag{3.1}$$

Пусть C — подгруппа группы $G_x^{\Gamma(x)}$, состоящая из всех ее элементов, нормализующих каждую из подгрупп T_i, $1 \leq i \leq k$. Тогда $C \trianglelefteq G_x^{\Gamma(x)}$ и $B^{\Gamma(x)} \leq C$ в силу предложений 2.6(2) и 3.1. В силу (3.1) это влечет

$$C \cap O_p(G_{x,x'}^{\Gamma(x)}) \neq 1. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *В предположениях настоящего раздела группа* $G_x^{\Gamma(x)}$ *не является ни группой типа* III(a)(i), *ни группой типа* III(b)(ii) *с* H *типа* III(a)(i) *в обозначениях из* [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $G_x^{\Gamma(x)}$ имеет тип III(a)(i), то с учетом утверждений (3) и (4) предложения 3.1 группа $G_{x,x'}^{\Gamma(x)} \cap C$ изоморфна содержащей $\mathrm{Inn}(T_1)$ подгруппе группы $\mathrm{Aut}(T_1)$ (см. [4]). Но тогда $O_p(G_{x,x'}^{\Gamma(x)}) \cap C = 1$, что противоречит (3.2).

Аналогично, если $G_x^{\Gamma(x)}$ имеет тип III(b)(ii) с H типа III(a)(i), то с учетом утверждений (3) и (4) предложения 3.1 для некоторого целого $l > 1$ группа $G_{x,x'}^{\Gamma(x)} \cap C$ изоморфна содержащей $\mathrm{Inn}(T_1)^l$ подгруппе группы $\mathrm{Aut}(T_1)^l$. Но тогда $O_p(G_{x,x'}^{\Gamma(x)}) \cap C = 1$, что противоречит (3.2).

Теорема 3.1 доказана.

Следствием теоремы 3.1 и замечания 2.1 является

Теорема 3.2. *Пусть* Γ *— связный локально конечный граф и* G *— вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа* Γ *такая, что для* $x \in V(\Gamma)$ *группа* G_x *конечна и группа* $G_x^{\Gamma(x)}$ *примитивна. Предположим, что* $G_{x,y}^{[3]} \neq 1$ *для* $y \in \Gamma(x)$. *Тогда группа* $G_x^{\Gamma(x)}$ *имеет либо тип* II, *либо тип* III(b)(i) *в обозначениях из* [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chermak A.** Quadratic action and the $\mathcal{P}(G,V)$-theorem in arbitrary characteristic // J. Group Theory. 1999. Vol. 2, no. 1. P. 1–13. doi: 10.1515/jgth.1999.002 .
2. **Dixon J. D., Mortimer B.** Permutation groups. NY etc.: Springer-Verlag, 1996. 346 p.
3. **Kurzweil H., Stellmacher B.** The theory of finite groups: an introduction. NY etc.: Springer-Verlag, 2004. 387 p. doi: 10.1007/b97433 .
4. **Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.** On the O'Nan–Scott theorem for finite primitive permutation groups // J. Austral. Math. Soc. (A). 1988. Vol. 44, no. 3. P. 389–396. doi: 10.1017/S144678870003216X .
5. **Meierfrankenfeld U.** Eine Lösung des Pushing-up Problems für eine Klasse endlicher Gruppen. Dissertation. Bielefeld, 1986.
6. **Meierfrankenfeld U., Stellmacher B.** The general FF-module theorem // J. Algebra. 2012. Vol. 351. P. 1–63. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.10.029 .
7. **Spiga P.** On G-locally primitive graphs of locally twisted wreath type and a conjecture of Weiss // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 2011. Vol. 118, no. 8. P. 2257–2260. doi: 10.1016/j.jcta.2011.05.005 .
8. **Spiga P.** An application of the local $C(G,T)$ theorem to a conjecture of Weiss // Bull. London Math. Soc. 2016. Vol. 48, no. 1. P. 12–18. doi: 10.1112/blms/bdv071 .
9. **Trofimov V. I.** Vertex stabilizers of locally projective groups of automorphisms of graphs: a summary // Groups, Combinatorics and Geometry. Durham, 2001. NJ etc.: World Sci. Publ., 2003. P. 313–326. doi: 10.1142/9789812564481_0019 .
10. **van Bon J.** Thompson–Wielandt-like theorems revisited // Bull. Lond. Math. Soc. 2003. Vol. 35, no. 1. P. 30–36. doi: 10.1112/S0024609302001418 .
11. **Weiss R. M.** s-transitive graphs // Algebraic methods in graph theory (Szeged, 1978). Vol. II. (Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 25). Amsterdam etc.: North-Holland, 1981. P. 827–847.
12. **Weiss R. M.** An application of p-factorization methods to symmetric graphs // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1979. Vol. 85, no. 1. P. 43–48. doi: 10.1017/S030500410005547X .

Поступила 29.10.2021

После доработки 19.11.2021

Принята к публикации 13.12.2021

Трофимов Владимир Иванович

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;

профессор

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: trofimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Chermak A. Quadratic action and the $\mathcal{P}(G,V)$-theorem in arbitrary characteristic. *J. Group Theory*, 1999, vol. 2, no. 1, pp. 1–13. doi: 10.1515/jgth.1999.002 .
2. Dixon J.D., Mortimer B. *Permutation groups.* NY: Springer-Verlag, 1996, 346 p. ISBN: 9781461207313 .

3. Kurzweil H., Stellmacher B. *The theory of finite groups: an introduction.* NY: Springer, 2004, 387 p. doi: 10.1007/b97433 .
4. Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J. On the O'Nan–Scott theorem for finite primitive permutation groups. *J. Austral. Math. Soc. (A)*, 1988, vol. 44, no. 3, pp. 389–396. doi: 10.1017/S144678870003216X .
5. Meierfrankenfeld U. *Eine Lösung des Pushing-up Problems für eine Klasse endlicher Gruppen.* Dissertation. Bielefeld, 1986.
6. Meierfrankenfeld U., Stellmacher B. The general FF-module theorem. *J. Algebra*, 2012, vol. 351, pp. 1–63. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.10.029 .
7. Spiga P. On G-locally primitive graphs of locally twisted wreath type and a conjecture of Weiss. *J. Combinatorial Theory. Series A*, 2011, vol. 118, no. 8, pp. 2257–2260. doi: 10.1016/j.jcta.2011.05.005 .
8. Spiga P. An application of the local $C(G,T)$ theorem to a conjecture of Weiss. *Bull. London Math. Soc.*, 2016, vol. 48, no. 1, pp. 12–18. doi: 10.1112/blms/bdv071 .
9. Trofimov V.I. Vertex stabilizers of locally projective groups of automorphisms of graphs: a summary. In: *"Groups, Combinatorics and Geometry", Durham 2001.* NJ etc.: World Sci. Publ., 2003, pp. 313–326. doi: 10.1142/9789812564481_0019 .
10. van Bon J. Thompson–Wielandt-like theorems revisited. *Bull. London Math. Soc.*, 2003, vol. 35, no. 1, pp. 30–36. doi: 10.1112/S0024609302001418 .
11. Weiss R.M. s-transitive graphs. In: *"Algebraic methods in graph theory" (Szeged, 1978).* Vol. II. Ser. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, vol. 25. Amsterdam etc.: North-Holland, 1981, pp. 827–847.
12. Weiss R.M. An application of p-factorization methods to symmetric graphs. *Math. Proc. Phil. Soc.*, 1979, vol. 85, no. 1, pp. 43–48. doi: 10.1017/S030500410005547X .

Received October 29, 2021
Revised November 19, 2021
Accepted December 13, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. № 20-01-00456).

Trofimov Vladimir Ivanovich, Dr. Phys.-Math. Sci., Leading researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: trofimov@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. I. Trofimov. On the Weiss Conjecture. I, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 247–256 .