ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 512.542

О $\mathfrak{F}$-НОРМЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ[1]

В. Н. Рыжик, И. Н. Сафонова, А. Н. Скиба

Пусть G — конечная группа и $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда пересечение нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов всех подгрупп группы G называется *$\mathfrak{F}$-нормой* группы G и обозначается символом $N_{\mathfrak{F}}(G)$. Группа G называется *$\mathfrak{F}$-критической,* если $G \notin \mathfrak{F}$, но $U \in \mathfrak{F}$ для всех собственных подгрупп U группы G. Мы говорим, что конечная группа G является *обобщенной $\mathfrak{F}$-критической,* если в G имеется нормальная подгруппа N такая, что $N \leq \Phi(G)$ и фактор-группа G/N является $\mathfrak{F}$-критической. В данной публикации мы доказываем следующий результат: *Если G не принадлежит непустой наследственной формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$-норма $N_{\mathfrak{F}}(G)$ группы G совпадает с пересечением нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов всех обобщенных $\mathfrak{F}$-критических подгрупп группы G. В частности, норма $N(G)$ группы G совпадает с пересечением нормализаторов всех циклических подгрупп группы G, имеющих своим порядком степень простого числа.*

Ключевые слова: конечная группа, наследственная формация, $\mathfrak{F}$-корадикал группы, $\mathfrak{F}$-норма группы, обобщенная $\mathfrak{F}$-критическая группа.

V. N. Ryzhik, I. N. Safonova, A. N. Skiba. On the $\mathfrak{F}$-norm of a finite group.

Let G be a finite group, and let $\mathfrak{F}$ be a nonempty formation. Then the intersection of the normalizers of the $\mathfrak{F}$-residuals of all subgroups of G is called the *$\mathfrak{F}$-norm* of G and is denoted by $N_{\mathfrak{F}}(G)$. A group G is called *$\mathfrak{F}$-critical* if $G \notin \mathfrak{F}$, but $U \in \mathfrak{F}$ for any proper subgroup U of G. We say that a finite group G is *generalized $\mathfrak{F}$-critical* if G contains a normal subgroup N such that $N \leq \Phi(G)$ and the quotient group G/N is $\mathfrak{F}$-critical. In this publication we prove the following result: *If G does not belong to the nonempty hereditary formation $\mathfrak{F}$, then the $\mathfrak{F}$-norm $N_{\mathfrak{F}}(G)$ of G coincides with the intersection of the normalizers of the $\mathfrak{F}$-residuals of all generalized $\mathfrak{F}$-critical subgroups of G. In particular, the norm $N(G)$ of G coincides with the intersection of the normalizers of all cyclic subgroups of G of prime power order.*

Keywords: finite group, hereditary formation, $\mathfrak{F}$-residual of a group, $\mathfrak{F}$-norm of a group, generalized $\mathfrak{F}$-critical group.

MSC: 20D10, 20D15

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-232-238

1. Введение

Все рассматриваемые в данной статье группы конечны. Более того, $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп, содержащий все единичные группы, а $G^{\mathfrak{F}}$ — *$\mathfrak{F}$-корадикал* группы G [1; 2], т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех нормальных подгрупп N группы G с условием $G/N \in \mathfrak{F}$. Мы используем $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ для обозначения классов всех нильпотентных и всех абелевых групп соответственно; $\mathfrak{I}$ — класс всех единичных групп.

Группа G называется *$\mathfrak{F}$-критической* [3] или *минимальной не-$\mathfrak{F}$-группой* [1], если $G \notin \mathfrak{F}$, но $U \in \mathfrak{F}$ для всех собственных подгрупп U группы G; $\mathfrak{N}$-критические группы называют *группами Шмидта*; $\mathfrak{A}$-критические группы — *группами Миллера — Морено — Редеи.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если каждый гомоморфный образ фактор-группы $G/G^{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{F}$ для каждой группы G. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной,* если $G \in \mathfrak{F}$ для каждой группы G с условием $G^{\mathfrak{F}} \leq \Phi(G)$; *наследственной* (А. И. Мальцев [4]), если $H \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $H \leq G \in \mathfrak{F}$.

[1]Работа второго автора поддержана Министерством образования Республики Беларусь (проект 20211328), работа третьего автора поддержана Белорусским Республиканским Фондом Фундаментальных Исследований (грант Ф20Р-291).

Хорошо известно, что классы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ суть наследственные формации. Более того, формация $\mathfrak{N}$ насыщена, а формация $\mathfrak{A}$ насыщенной не является.

Напомним, что *норма* $N(G)$ группы G — это пересечение нормализаторов всех подгрупп в G. Это понятие введено Бэром в [5], и первые интересные приложения этой конструкции были даны Бэром в его другой известной статье [6]. Указанные исследования стимулировали большое количество публикаций, связанных с дальнейшим изучением и новыми применениями нормы и обобщенной нормы группы.

В недавней статье [7], например, авторы успешно продемонстрировали, что пересечение нормализаторов производных подгрупп всех подгрупп группы G (которое обозначается символом $D(G)$) также оказывает значительное влияние на строение группы. Ясно, что производная подгруппа G' группы G совпадает с абелевым корадикалом группы, и это простое наблюдение послужило стимулом для изучения пересечений нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов подгрупп для некоторых других формаций [8–10]. В работе [9] пересечение нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов всех подгрупп группы G в случае, когда $\mathfrak{F}$ является непустой формацией, было названо *$\mathfrak{F}$-нормой* группы G и обозначено символом $N_{\mathfrak{F}}(G)$.

В другом направлении результаты статьи [7] были развиты в [11], где был доказан следующий интересный результат.

Теорема 1 [11, теорема 3.2]. *Подгруппа $D(G)$ совпадает с пересечением нормализаторов производных подгрупп $H' = H^{\mathfrak{A}}$ всех таких подгрупп H группы G, которые порождаются двумя элементами и у которых производная подгруппа H' является нильпотентной.*

С целью распространения этого результата на произвольные наследственные формации, мы введем следующее определение.

Определение. Мы говорим, что группа G является *обобщенной $\mathfrak{F}$-критической,* если в G имеется нормальная подгруппа N такая, что $N \leq \Phi(G)$ и фактор-группа G/N является $\mathfrak{F}$-критической.

В теории насыщенных формаций значение обобщенных $\mathfrak{F}$-критических групп прежде всего связано со следующим элегантным результатом М. Дж. Александре и А. Баллестера-Болинчес (см. [12], а также теорему 6.4.17 в книге [2]).

Теорема 2. *Если $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация и $G \notin \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G совпадает с ее подгруппой, порожденной $\mathfrak{F}$-корадикалами всех обобщенных $\mathfrak{F}$-критических подгрупп группы G.*

Замечания. (i) Обобщенные группы Шмидта называют также *B-группами* (Я. Беркович [13]).

(ii) Из известных свойств $\mathfrak{N}$-критических групп (см. [14, III, теоремы 5.1, 5.2] и [1, VI, теорема 26.1]) следует, что каждая группа Шмидта является обобщенной группой Миллера — Морено — Редеи.

(iii) Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{I}$ является формацией всех единичных групп, то каждая $\mathfrak{F}$-критическая группа имеет простой порядок, и поэтому в данном случае обобщенные $\mathfrak{F}$-критические группы суть в точности циклические группы, порядок которых является степенью простого числа.

Из известных свойств $\mathfrak{A}$-критических групп (см. [14, с. 286, 309]) следует, что любая обобщенная $\mathfrak{A}$-критическая группа G порождается двумя элеменами и ее производная подгруппа $G' = G^{\mathfrak{A}}$ нильпотентна. Ввиду этого наблюдения и теоремы 1 вполне естественно возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. *Верно ли, что подгруппа $D(G)$ совпадает с пересечением нормализаторов производных подгрупп всех обобщенных подгрупп Миллера — Морено — Редеи группы G?*

Вопрос 2. *Верно ли, что $\mathfrak{F}$-норма $N_{\mathfrak{F}}(G)$ группы G совпадает с пересечением нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов всех ее обобщенных $\mathfrak{F}$-критических подгрупп?*

В о п р о с 3. *Верно ли, что норма $N(G)$ группы G совпадает с пересечением нормализаторов всех ее циклических подгрупп, имеющих своим порядком степень простого числа?*

В данной статье мы докажем следующий факт, который дает положительный ответ на все эти вопросы.

Теорема 3. *Если группа G не принадлежит непустой наследственной формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$-норма $N_{\mathfrak{F}}(G)$ группы G совпадает с пересечением нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов всех ее обобщенных $\mathfrak{F}$-критических подгрупп.*

Покажем, что условие "всех ее обобщенных $\mathfrak{F}$-критических подгрупп" в теореме 3 нельзя заменить на более слабое условие "всех ее $\mathfrak{F}$-критических подгрупп".

П р и м е р ы. Пусть p и q — простые числа, где q делит $p-1$.

(i) Пусть $H := \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка q^4. Пусть P — простой точный $\mathbb{F}_pE$-модуль, где $E = H/\langle a^{q^2} \rangle$. Тогда существует гомоморфизм $\phi : H \to \mathrm{Aut}(P)$ с $Ker(\phi) = \langle a^{q^2} \rangle$. Пусть $G = P \rtimes_\phi H$ и пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех абелевых групп с элементарными силовскими подгруппами. Подгруппы H и $V = \langle a^q \rangle$ являются обобщенными $\mathfrak{F}$-критическими группами и всякая ненормальная обобщенная $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы G сопряжена с одной из этих подгрупп. Подгруппа $W = \langle a^{q^2} \rangle$ есть нормальная $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа в G и $W = V^{\mathfrak{F}}$. Поэтому $N_G(W^{\mathfrak{F}}) = G = N_G(V^{\mathfrak{F}})$. Понятно также, что $N_G(U^{\mathfrak{F}}) = G$ для всех подгрупп U группы G, содержащих P. Таким образом, пересечение нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов всех $\mathfrak{F}$-критических подгрупп группы G совпадает с G.

Заметим теперь, что $V = H^{\mathfrak{F}}$ и $N_G(V) = H$, поскольку H — максимальная в G подгруппа и $C_G(P) = PW$. Таким образом, пересечение нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов всех обобщенных $\mathfrak{F}$-критических подгрупп группы G совпадает с $W \neq G$.

(ii) Пусть $H := \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка q^2 и P — группа порядка p. Тогда существует гомоморфизм $\phi : H \to \mathrm{Aut}(P)$ с $Ker(\phi) = \langle a^q \rangle$. Пусть $G = P \rtimes_\phi H$. Тогда пересечение нормализаторов всех подгрупп в G, имеющих простой порядок, совпадает с G. С другой стороны, любая обобщенная $\mathfrak{I}$-критическая группа является циклической группой, имеющей своим порядком степень простого числа, и поэтому в силу теоремы 3 имеет место $N(G) = N_{\mathfrak{I}}(G) = \langle a^q \rangle \neq G$.

Первое следствие теоремы 3 не только усиливает теорему 1, но и дает более короткое доказательство этого результата.

Следствие 1. *Подгруппа $D(G)$ совпадает с пересечением нормализаторов производных подгрупп всех обобщенных подгрупп Миллера — Морено — Редеи группы G.*

В случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{I}$, из теоремы 3 получаем следующий факт.

Следствие 2. *Норма $N(G)$ группы G совпадает с пересечением нормализаторов всех циклических подгрупп группы G, имеющих своим порядком степень простого числа.*

Следствие 3. *Пересечение нормализаторов нильпотентных корадикалов всех подгрупп группы G* (см. [8]) *совпадает с пересечением нормализаторов нильпотентных корадикалов всех ее B-подгруп.*

Пусть σ — разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Тогда группа G называется *σ-нильпотентной* [16], если $G = G_1 \times \dots \times G_t$, где G_k — это σ_{i_k}-группа для некоторого $i_k = i_k(G_k)$ для всех k. Символ $\mathfrak{N}_\sigma$ обозначает класс всех σ-нильпотентных групп. Нетрудно установить, что $\mathfrak{N}_\sigma$ — наследственная формация, и можно показать, используя основной результат работы В. А. Белоногова [17], что каждая $\mathfrak{N}_\sigma$-критическая группа является не σ-нильпотентной группой Шмидта (называемой *σ-группой Шмидта*). Таким образом, из теоремы 3 получаем следующее следствие.

Следствие 4. *Пересечение нормализаторов σ-нильпотентных корадикалов всех подгрупп группы G* (см. [10]) *совпадает с пересечением нормализаторов всех ее обобщенных σ-подгрупп Шмидта.*

2. Доказательство теоремы 3

При доказательстве теоремы 3 мы используем следующие свойства $\mathfrak{F}$-корадикала группы.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация и пусть N — нормальная подгруппа в G. Тогда выполняются следущие утверждения.*

(1) $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$.

(2) *Если U есть подгруппа группы $G = NU$, то $U^{\mathfrak{F}}N = G^{\mathfrak{F}}N$.*

(3) *Если формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, то $E^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ для каждой подгруппы E группы G.*

Доказательство. (1), (2) См. доказательство леммы 1.1 из [1].

(3) Поскольку формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, то $EG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и поэтому из изоморфизма

$$EG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \simeq E/(E \cap G^{\mathfrak{F}})$$

получаем $E^{\mathfrak{F}} \leq E \cap G^{\mathfrak{F}}$.

Лемма доказана.

Если подгруппы H и L группы G таковы, что $G = HL$ и $G \neq HU$ для всех собственных подгрупп U группы L, то L называют *минимальным добавлением* к H в G.

Лемма 2 [1, лемма 11.1, гл. III]. *Пусть H и L — подгруппы группы G, где H нормальна в G и L — минимальное добавление к H в G. Тогда $H \cap L \leq \Phi(L)$.*

Доказательство теоремы 3. Для каждой *секции* T/L группы G (здесь $L \trianglelefteq T \leq G$) положим $V(T/L) = T/L$, если $T/L \in \mathfrak{F}$, в противном случае $V(T/L)$ обозначает пересечение нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов всех обобщенных $\mathfrak{F}$-критических подгрупп группы T/L. Следовательно, фактически мы должны показать, что $V(G) = N_{\mathfrak{F}}(G)$. Включение $N_{\mathfrak{F}}(G) \leq V(G)$ очевидно.

Предположим теперь, что обратное включение $V(G) \leq N_{\mathfrak{F}}(G)$ не является верным и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда в группе G найдется такая подгруппа H, что $V(G) \not\leq N_G(H^{\mathfrak{F}})$, но $V(G) \leq N_G(U^{\mathfrak{F}})$ для всех собственных подгрупп U в H.

(1) $V(G)N/N \leq V(G/N)$ *для любой нормальной подгруппы N в G.*

Если $G/N \in \mathfrak{F}$, это ясно. Теперь предположим, что $G/N \notin \mathfrak{F}$, и пусть S/N — произвольная обобщенная $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа в G/N. Пусть U — минимальное добавление к N в S. Тогда

$$U/(U \cap N) \simeq UN/N = S/N$$

является обобщенной $\mathfrak{F}$-критической группой и согласно лемме 2 $U \cap N \leq \Phi(U)$. Следовательно, U — обобщенная $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа в G. Отсюда следует, что $V(G) \leq N_G(U^{\mathfrak{F}})$ и, значит, ввиду п. (2) леммы 1

$$V(G)N/N \leq N_G(U^{\mathfrak{F}})N/N \leq N_{G/N}(U^{\mathfrak{F}}N/N) = N_{G/N}((UN/N)^{\mathfrak{F}}) = N_{G/N}((S/N)^{\mathfrak{F}}).$$

Отсюда следует, что $V(G)N/N \leq V(G/N)$.

(2) $(H^{\mathfrak{F}})_G = 1$.

Предположим, что $N = (H^{\mathfrak{F}})_G \neq 1$. Тогда $V(G)N/N \leq V(G/N)$ по утверждению (1), а значит, в силу выбора группы G и п. (1) леммы 1

$$V(G)N/N \leq N_{G/N}((H/N)^{\mathfrak{F}}) = N_{G/N}(H^{\mathfrak{F}}/N),$$

и поэтому $V(G) \leq N_G(H^{\mathfrak{F}})$; противоречие. Таким образом, утверждение (2) является верным.

(3) *Некоторая максимальная подгруппа U группы H не принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Предположим, что все максимальные подгруппы группы H принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что $H \notin \mathfrak{F}$, так как в противном случае $H^{\mathfrak{F}} = 1$, поэтому $V(G) \leq N_G(H^{\mathfrak{F}}) = G$. Отсюда, H является $\mathfrak{N}_\sigma$-критической и, следовательно, обобщенной $\mathfrak{F}$-критической подгруппой в G. Но тогда $V(G) \leq N_G(H^{\mathfrak{F}})$ по определению подгруппы $V(G)$. Полученное противоречие показывает, что утверждение (3) верно.

(4) $V(G) \cap E \leq V(E)$ *для любой подгруппы* E *группы* G.

Если $E \in \mathfrak{F}$, это ясно. Теперь предположим, что $E \notin \mathfrak{F}$, и пусть $S(E)$ и $S(G)$ — множества всех обобщенных $\mathfrak{F}$-критических подгрупп в E и G соответственно.

Поскольку

$$V(G) = \bigcap_{H \in S(G)} N_G(H^{\mathfrak{F}}) \leq \bigcap_{H \in S(E)} N_G(H^{\mathfrak{F}}),$$

имеет место

$$V(G) \cap E = \bigcap_{H \in S(G)} N_G(H^{\mathfrak{F}}) \cap E \leq \bigcap_{H \in S(E)} N_G(H^{\mathfrak{F}}) \cap E \leq \bigcap_{H \in S(E)} N_E(H^{\mathfrak{F}}) = V(E).$$

(5) $G = V(G)H$.

Предположим, что $W := V(G)H < G$. Тогда $V(W) \leq N_G(H^{\mathfrak{F}})$ по выбору группы G. Но $V(G) \leq V(W)$ по утверждению (4), значит, $V(G) \leq N_G(H^{\mathfrak{F}})$; противоречие. Следовательно, $G = V(G)H$.

Заключительное противоречие. Поскольку максимальная подгруппа U группы H не принадлежит $\mathfrak{F}$, мы имеем $U^{\mathfrak{F}} \neq 1$. С другой стороны, из выбора H вытекает, что $V(G) \leq N_G(U^{\mathfrak{F}})$ и поэтому из утверждения (5) получаем, что

$$(U^{\mathfrak{F}})^G = (U^{\mathfrak{F}})^{V(G)H} = (U^{\mathfrak{F}})^H,$$

где $U^{\mathfrak{F}} \leq H^{\mathfrak{F}}$ по п. (3) леммы 1. Следовательно,

$$1 < (U^{\mathfrak{F}})^G \leq (H^{\mathfrak{F}})_G = 1$$

согласно утверждению (2). Это противоречие завершает доказательство результата.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
2. **Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M.** Classes of finite groups. Dordrecht: Springer, 2006. 381 p. doi: 10.1007/1-4020-4719-3 .
3. **Doerk K., Hawkes T.** Finite Soluble groups. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 1992. 889 p. doi: 10.1515/9783110870138 .
4. **Мальцев А.И.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
5. **Baer R.** Der Kern, eine charkteristishe Untergruppe // Compos. Math. 1935. Vol. 1. P. 254–283. URL: http://eudml.org/doc/88574 .
6. **Baer R.** Norm and hypernorm // Publ. Math. Debrecen. 1956. Vol. 4. P. 347–350. URL: https://zbmath.org/0071.25302 .
7. **Li S., Shen Z.** On the intersection of the normalizers of derived subgroups of all subgroups of a finite group // J. Algebra. 2010. Vol. 323, iss. 5. P. 1349–1357. doi: 10.1016/j.jalgebra.2009.12.015 .
8. **Shen Z., Shi W., Qian G.** On the norm of the nilpotent residuals of all subgroups of a finite group // J. Algebra. 2012. Vol. 352, iss. 1. P. 290–298. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.11.018 .
9. **Su N., Wang Y.** On the normalizers of $\mathfrak{F}$-residuals of all subgroups of a finite group // J. Algebra. 2013. Vol. 392. P. 185–198. doi: 10.1016/j.jalgebra.2013.06.037 .
10. **Hu B., Huang J., Skiba A.N.** On the σ-nilpotent norm and the σ-nilpotent length of a finite group // Glasgow Math. J. 2020. Vol. 63, iss. 1. P. 121–132. doi: 10.1017/S0017089520000051 .

11. **Lin Y., Gong Y., Shen Z.** On the generalized norms of a group // Communications in Algebra. 2021. Vol. 49, iss. 9. P. 4092–4097. doi: 10.1080/00927872.2021.1913501 .
12. **Alejande M.J., Ballester-Bolinches A.** On a theorem of Berkovich // Israel. Math. J. 2002. Vol. 131. P. 149–156. doi: 10.1007/BF02785855 .
13. **Berkovich Y.** Some corollaries to Frobenius' normal p-complement theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 127, no. 9. P. 2505–2509. doi: 10.1090/S0002-9939-99-05275-2 .
14. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1967. 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
15. **Gorenstein D.** Finite groups. NY; Evanston; London: Harper & Row Publishers, 1968. 527 с.
16. **Skiba A.N.** On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra 2015. Vol. 436. P. 1–16. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010 .
17. **Белоногов В.А.** Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 29–43.

Поступила 10.11.2021
После доработки 15.12.2021
Принята к публикации 27.12.2021

Рыжик Валентина Николаевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
кафедра высшей математики
Брянский государственный аграрный университет
г. Кокино
e-mail: v2929222@yandex.ru

Сафонова Инна Николаевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
факультет прикладной математики и информатики
Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
e-mail: safonova@bsu.by

Скиба Александр Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
факультет математики и технологий программирования
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
г. Гомель, Беларусь
e-mail:alexander.skiba49@gmail.com

REFERENCES

1. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 272 p.
2. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. *Classes of finite groups.* Dordrecht: Springer, 2006, 381 p. doi: 10.1007/1-4020-4719-3 .
3. Doerk K., Hawkes T.O. *Finite soluble groups.* Berlin; NY: De Gruyter, 2011, 891 p. doi: 10.1515/9783110870138 .
4. Maltsev A.I. *Algebraic systems.* Berlin; NY: Springer-Verlag, 1973. 317 p. ISBN: 0387057927 . Original Russian text published in Mal'tsev A.I. *Algebraicheskie sistemy*, Moscow: Nauka Publ., 1970, 392 p.
5. Baer R. Der kern, eine charakteristische untergruppe. *Compos. Math.*, 1935, vol. 1, pp. 254–283. Available on: https://eudml.org/doc/88574 .
6. Baer R. Norm and hypernorm. *Publ. Math. Debrecen*, 1956, vol. 4, pp. 347–350. Available on: https://zbmath.org/0071.25302 .
7. Li S., Shen Z. On the intersection of the normalizers of derived subgroups of all subgroups of a finite group. *J. Algebra*, 2010, vol. 323, no. 5, pp. 1349–1357. doi: 10.1016/j.jalgebra.2009.12.015 .

8. Shen Z., Shi W., Qian G. On the norm of the nilpotent residuals of all subgroups of a finite group. *J. Algebra*, 2012, vol. 352, no. 1, pp. 290–298. doi: 10.1016/j.jalgebra.2011.11.018 .
9. Su N., Wang Y. On the normalizers of $\mathfrak{F}$-residuals of all subgroups of a finite group. *J. Algebra*, 2013, vol. 392, pp. 185–198. doi: 10.1016/j.jalgebra.2013.06.037 .
10. Hu B., Huang J., Skiba A.N. On the σ-nilpotent norm and the σ-nilpotent length of a finite group. *Glasgow Math. J.*, 2021, vol. 63, no. 1, pp. 121–132. doi: 10.1017/S0017089520000051 .
11. Lin Y., Gong Y., Shen Z. On the generalized norms of a group. *Communications in Algebra*, 2021, vol. 49, no. 9, pp. 4092–4097. doi: 10.1080/00927872.2021.1913501 .
12. Alejandre M.J., Ballester-Bolinches A. On a theorem of Berkovich. *Isr. J. Math.*, 2002, vol. 131, pp. 149–156. doi: 10.1007/BF02785855 .
13. Berkovich Y. Some corollaries of Frobenius' normal p-complement theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 127, no. 9, pp. 2505–2509. doi: 10.1090/S0002-9939-99-05275-2 .
14. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1967, 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
15. Gorenstein D. *Finite groups.* NY; Evanston; London: Harper & Row Publishers, 1968, 527 p. ISBN: 978-1114223004 .
16. Skiba A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups. *J. Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010 .
17. Belonogov V.A. Finite groups all of whose 2-maximal subgroups are π-decomposable. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 289, pp. 26–41. doi: 10.1134/S008154381505003X .

Received November 10, 2021
Revised December 15, 2021
Accepted December 27, 2021

Funding Agency: The second author was supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus (project no. 20211328), and the third author was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant no. F20R-291).

Valentina Nikolaevna Rizhik, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Department of Automation, Physics and Mathematics, Bryansk State Agrarian University, Bryansk, 243365, Russia,
e-mail: v2929222@yandex.ru .

Inna Nikolaevna Safonova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University, Minsk, 220030, Belarus, e-mail: safonova@bsu.by .

Alexander Nikolaevich Skiba, Department of Mathematics and Programming Technologies, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Belarus, e-mail: alexander.skiba49@gmail.com .

Cite this article as: V. N. Ryzhik, I. N. Safonova, A. N. Skiba. On the $\mathfrak{F}$-norm of a finite group, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 232–238 .